重大版·建筑

高等院校教材

DAOLU ZUOBIAO CELIANGJISHU

道路坐标测量技术

■主编 李柏林 ■副主编 王中伟 ■主审 唐杰军

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

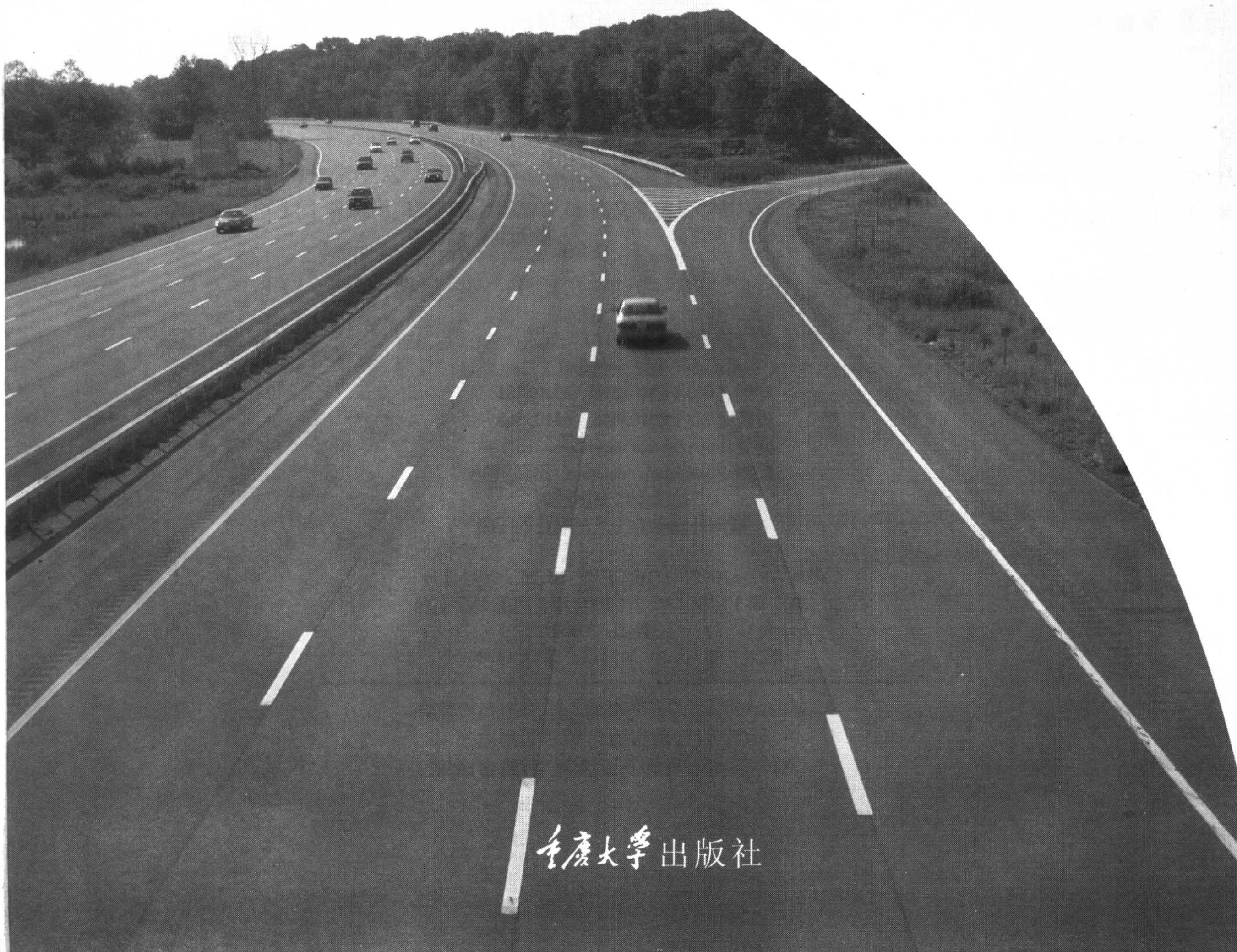
重大版·建筑

高等院校教材

DAOLU ZUOBIAO CELIANGJISHU

道路坐标测量技术

■主编 李柏林 ■副主编 王中伟 ■主审 唐杰军



重庆大学出版社

内容提要

本书共分5章，主要内容有：坐标计算基础知识，道路平面控制网坐标计算，道路坐标计算基本方法和实用计算程序，全站仪坐标测量技术和数字化测绘软件运用，GPS卫星定位测量基本原理和定位实施案例。

本书内容精练，实用性强，可作为高等职业院校、中等职业院校公路与城市道路、桥梁工程、隧道工程、交通工程和公路工程监理等专业的教材，亦可作为相关专业参考教材或供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

道路坐标测量技术/李伯林主编．—重庆：重庆大学出版社，2007.3

ISBN 978-7-5624-3923-3

Ⅰ.道…　Ⅱ.李…　Ⅲ.道路测量　Ⅳ.U412.24

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第006620号

道路坐标测量技术

主　编　李柏林

副主编　王中伟

主　审　唐杰军

责任编辑：林青山　李文杰　　版式设计：林青山

责任校对：李定群　　　　　　责任印制：赵　晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：张鸽盛

社址：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编：400030

电话：(023) 65102378　65105781

传真：(023) 65103686　65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn(市场营销部)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：10.25　字数：256千

2007年3月第1版　2007年3月第1次印刷

印数：1—3 000

ISBN 978-7-5624-3923-3　定价：14.00元

前言

随着国家经济建设的飞速发展，我国工程测绘事业有了质的飞跃。先进的测量仪器设备和工程软件的成功开发，使工程测绘工作进入了崭新的数字化时代，道路工程坐标测量方法已经成为我国公路建设中普遍运用的新技术。如何把现代工程测量的新理论、新规范、新方法和新设备融入到道路工程测量教材改革和建设之中，正是本书的宗旨所在。

全书就道路工程坐标测量技术中：工程坐标的基本知识，坐标及导线计算基本理论公式，道路平面控制网坐标计算方法，道路坐标计算理论公式及运用程序计算坐标的方法，全站仪坐标测量技术，GPS 卫星定位坐标测量的基本原理和工程勘测设计软件的运用等做了比较详尽的叙述。在编写中，尽可能简化理论的推导过程，对原理、公式的给出不做深究，把重点放在坐标计算和坐标测量实用操作技术上。为了突出道路坐标测量技术的实际运用，在道路坐标计算章节中，直接为读者提供了坐标计算的简易源程序，并在有关章节收录了典型的工程实际案例，以利于在教学中理论联系实际和学员自学。

本书由湖南交通职业技术学院工程经济系、路桥工程系和院实训处合作编写：第 1 章、第 2 章、第 5 章由工程经济系李柏林编写；第 3 章由院实训处王中伟编写；第 4 章由工程经济系陈华和路桥工程系唐杰军编写；工程经济系肖颜、曾丹、彭子茂、叶自钊、蒋丰伟等教师参与了部分章节的图文编写工作。全书由李柏林统稿校核，唐杰军主审。

由于编者水平有限，且本书为首次推出，书中的缺点和错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2007 年 1 月

目录

1　坐标计算基础知识 …… 1

1.1　坐标系统基本概念 …… 1

1.2　坐标计算基本方法 …… 6

1.3　坐标系统转换 …… 8

复习思考题 …… 12

2　道路平面控制网坐标计算 …… 13

2.1　闭合导线坐标计算 …… 13

2.2　附合导线坐标计算 …… 16

2.3　小三角近似平差计算 …… 18

复习思考题 …… 26

3　道路坐标计算方法和实用计算程序 …… 27

3.1　道路平面线型概述 …… 27

3.2　道路中线坐标计算 …… 31

3.3　道路边线坐标计算 …… 39

3.4　道路坐标计算程序 …… 42

3.5　道路坐标计算案例 …… 55

复习思考题 …… 69

4　全站仪坐标测量技术与软件应用 …… 72

4.1　全站仪概述 …… 72

4.2　全站仪坐标测量的原理与方法 …… 77

4.3　全站仪道路测量放样案例 …… 79

4.4　数字化测量软件应用 …… 86

复习思考题 …… 125

5　GPS 卫星定位测量技术 …… 126

5.1　GPS 卫星定位测量基本原理 …… 126

5.2　GPS 卫星定位测量实施方法 …… 133

5.3　使用 HD 8200G 静态 GPS 接收机进行控制测量的案例 …… 137

复习思考题 …… 151

附录 …… 153
GPS 卫星定位测量专业术语注释 …… 153
大地坐标系有关资料 …… 156
参考文献 …… 157

1　坐标计算基础知识

1.1　坐标系统基本概念

工程构造物在地面上的特征点是空间点，需用三维坐标来确定。在工程测量工作中，通常建立平面坐标系统，将三维坐标中影响球面或平面上的投影位置的两个量用平面坐标表示；建立高程系统，将从地面点到大地水准面的铅垂距离用高程表示。

· *1.1.1　平面坐标系统* ·

根据实际需要，可选用下列 3 种坐标系统来表示地面点的位置。

1）地理坐标

地理坐标是以经度和纬度来表示的。它可以把整个地球面上的点置于一个坐标系中，故又称绝对坐标。由于采用的基准面不同，又可分为天文地理坐标和大地地理坐标。

（1）天文地理坐标

天文地理坐标是以大地水准面作为基准面，而水准面又是以铅垂线为依据。坐标以天文经度 λ 和天文纬度 ϕ 表示。

天文子午面和子午线：过地面任一点的铅垂线并与地轴平行的平面，称为该点的天文子午面。其与地面的交线称为该点的天文子午线。

天文经度 λ：过一点的天文子午面与首子午面（过英国格林尼治天文台的子午面，经度的起算点）所夹的二面角，称为该点的天文经度。首子午线上的点经度为 0°，向东、向西各算至 180°，在首子午线以东为东经，以西为西经。

天文纬度 ϕ：通过一点的铅垂线与赤道平面所组成的角度，称为该点的天文纬度。赤道上的点纬度为 0°，向北、向南各算至 90°，在赤道以北为北纬，以南为南纬。

（2）大地地理坐标

大地地理坐标（通常称为大地坐标）是以参考椭球体作为基准面，基准面以法线为依据。坐标用大地经度 L 和大地纬度 B 表示。

大地子午面和子午线：包含参考椭球面的法线及其短轴的平面，称为大地子午面。与椭球面的交线称为子午线。

大地经度 L：通过一点的大地子午面与首子午面所夹的二面角，称为该点的大地经度，分为东经、西经。

大地纬度 B：通过一点的法线和赤道平面所组成的角度，称为该点的大地纬度，分为北纬

和南纬。

大地经度和纬度是根据大地原点的大地坐标,通过大地测量所得的数据推算得到。我国现以位于陕西省泾阳县永乐镇的国家大地原点为起算点,建立了统一坐标系,称为"1980 年国家大地坐标系"。在此之前采用的是"1954 年北京坐标系"。

由于垂线偏差的存在,地面点的天文地理坐标和大地地理坐标是不相同的。在测量工作中,地面点的投影位置一般用大地地理坐标 L 和 B 表示。但实际测量时,如测距或测角均以铅垂线为准,因而所测得的数据必须经过改化才能得到大地地理坐标。在普通测量工作中,精度要求不是很高时,则可不考虑这种改化。

2)高斯(Gauss,K. F)平面直角坐标

当测区范围较小时,可将地球表面视为平面,但若测区范围较大,则不能当作平面看待。由于工程建设是在地球曲面上进行的,而工程设计计算是在平面上进行的,这样就会有曲面上的数据向平面归算的问题。如何将球面上的点准确地绘制在平面上(图纸上),这就要求选用适当的投影方法。我国通常采用高斯投影的方法。

(1)高斯投影的几何意义

高斯投影是高斯平面直角坐标系建立的基础,其几何意义如图 1.1 所示。

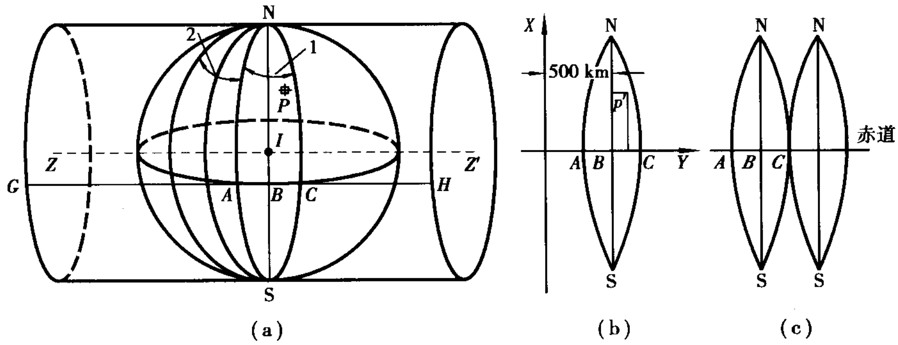


图 1.1 高斯平面直角坐标系投影图

为了便于说明高斯投影的概念,将地球椭球体作为圆球看待。在圆球表面上选定一个子午圈,将投影面卷成一个圆柱,套在圆球上并使其与选定的子午圈相切,这条切线 N*B*S 称为轴子午线(中央子午线)。N*A*S 和 N*C*S 是 2 条和 N*B*S 经差为 3°或 1.5°,并关于 N*B*S 对称的子午线。这样,球面上的轴子午线就毫无变形地转移到圆柱面上。此外,将赤道面扩大使之与圆柱体相交,其交线 *GH* 即与轴子午线垂直。当将圆柱体从两极沿着圆柱轴线切开,并展开成平面时,圆柱体上的这两条正交的直线,就是高斯平面直角坐标系统的坐标轴。其中,由轴子午线投影的直线 N*B*S 是高斯平面直角坐标系的纵轴,称为 *X* 轴;而由赤道投影的直线 *GH* 是高斯平面直角坐标系的横轴,称为 *Y* 轴;*B* 为坐标原点。由子午线 N*A*S、N*C*S 所包围而构成的带状称为投影带。若子午线 N*A*S 和 N*C*S 经差为 6°,称为 6°投影带,若经差为 3°,称为 3°投影带。

(2)投影带的中央子午线与编号

投影带的宽度以投影带边缘子午线之间的经度差 ΔL 表示。为避免高斯投影带的变形太大,投影带的宽度 ΔL 不能太宽,一般取 6°或者 3°所对应的宽度。高斯投影根据经差 ΔL 逐带

连续进行，即将地面曲面展开成平面。图 1.2 为 6°带与 3°带的投影关系。

经差 ΔL 为 6°的 6°带高斯投影平面，将全球分为 60 个 6°的投影带，各带的中央子午线的经度 L_0 与投影带的带号 N 有如下对应关系：

$$L_0 = 6N - 3 \tag{1.1}$$

经差 ΔL 为 3°的 3°带高斯投影平面，将全球分为 120 个 3°的投影带，各带的中央子午线的经度 L_0 与投影带的带号 N 有如下对应关系：

$$L_0 = 3N \tag{1.2}$$

根据我国在大地坐标系统中的经度位置（74°～135°），从上述公式可见，我国用到的 6°带的带号 N 为 13～23，用到的 3°带的带号 N 为 25～45。

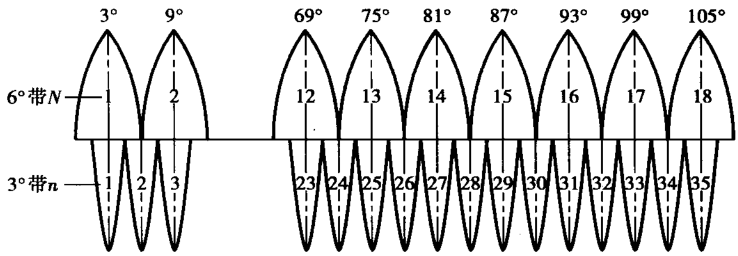


图 1.2　6°带与 3°带投影的关系

（3）高斯平面直角坐标系的建立

如上所述，每一个高斯投影的 6°带和 3°带都有其自己的坐标轴和坐标原点。横坐标的计算是以轴子午线以东为正，以西为负。纵坐标的计算是以赤道以北为正，以南为负。

由于我国领土均在赤道以北，因此 X 值均为正值，但 Y 值却有正有负。由于 Y 坐标的最大值（在赤道上）约为 330 km，为了避免出现负值，就将纵坐标轴向西平移了 500 km（图 1.1b），这样就等于在横坐标上加了 500 km。此外，为了表明坐标点位于哪一个 6°带内，在横坐标值前面再冠以带号，这种坐标称为国家统一坐标。

高斯平面的特点：

①投影后的中央子午线 NBS 是直线，长度不变。

②投影后的赤道 ABC 是直线，保持 ABC 垂直 NBS。

③离开中央子午线的子午线投影是以两极为中点的弧线，离中央子午线越远，弧线的曲率越大，这说明离中央子午线越远投影变形就越大。

高斯平面直角坐标系 4 个规则：

①X 轴是中央子午线 NBS 的投影，北向为正方向。

②Y 轴是赤道 ABC 的投影，东向为正方向。

③原点，即中央子午线与赤道交点，用 O 表示。

④ 4 个象限按顺时针顺序 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ排列，如图 1.3 所示。

（4）高斯平面直角坐标表示的地面位置

我国国家测量大地控制点均按高斯投影计算其高斯平面直角坐标。在图 1.1（a）中，球面点 P，大地坐标为 L_P, B_P。在图 1.1（b）中的 P' 点是 P 的高斯投影点，其高斯平面直角坐标是 x_p, y_p。

它们的意义是：

①x_p 表示 P 点在高斯平面上到赤道的距离。

②y_p 包括有投影带的带号、附加值 500 km 和实际坐标 Y 3 个参数，即

$$y_p = N + 500\ \text{km} + Y_P \tag{1.3}$$

例如，P 点的高斯平面直角坐标 $X_P = 3\ 275\ 611.188$ m，$Y_P = -376\ 543.211$ m。若该点位于第 19 带内，则 P 点的国家统一坐标表示为 $x_P = 3\ 275\ 611.188$ m；$y_P = 19\ 123\ 456.789$ m。

3）独立平面直角坐标

当测量区域较小（如半径不大于 10 km 的范围）时，水准面曲率对水平距离的影响小于 1/1 217 700，此时可以不考虑地球曲率而把球面看作平面。这种将地面点直接沿铅垂线投影到水平面上，把局部地球表面作为平面而建立的坐标系称为独立平面直角坐标系。

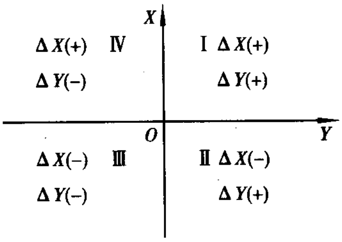


图 1.3 独立直角坐标

由于测量中确定直线方向的角度即坐标方位角，是从坐标纵轴北端开始按顺时针方向计量的，而数学上的角度则是从坐标横轴开始逆时针方向计量的，为了与数学保持一致，直接应用数学上的三角公式，测量中就以 X 轴作为纵轴，正向指北；Y 轴作为横轴，正向指东，坐标象限按顺时针方向编号，如图 1.3 所示。

这种坐标系统可与国家控制网联系，获取起算坐标及起始方位角；亦可先采用假定坐标，然后进行坐标换算，换算成统一的坐标系，再计算各点的坐标数据。

《公路勘测规范》（JTJ 061—99）中规定，二级（含二级）以下公路，独立桥梁、隧道及其他构造物等小测区可采用假定坐标施测。

·1.1.2 高程系统·

1）绝对高程

绝对高程的基准面是大地水准面。地面点到大地水准面的铅垂距离，称为该点的绝对高程，亦称海拔。在图 1.4 中，符号 H 表示高程（一般不用其他符号），H_A 和 H_B 为地面点 A 和 B 的绝对高程。

我国的绝对高程采用青岛验潮站经长年观测求得的黄海平均海水面作为高程基准面，其高程为零，并在青岛观象山设立水准原点，根据 1987 年开始使用的“1985 年国家高程基准”，水准原点的高程为 72.260 m。在此之前采用“1956 年黄海高程系”，水准原点高程为 72.289 m。

2）相对高程

在局部地区，如果工程许可，可采用相对高程。即假设一个水准面作为高程的起算面。地面点到假设水准面的铅垂距离，就是该点的相对高程，亦称假定高程。图 1.4 中 H'_A 和 H'_B，分别为 A 点和 B 点的相对高程。

3）高差

2 点高程之差称为高差，一般以 h 表示。图 1.4 中 A、B 两点的高差（或述为 B 点相对于 A 点的高差）为：

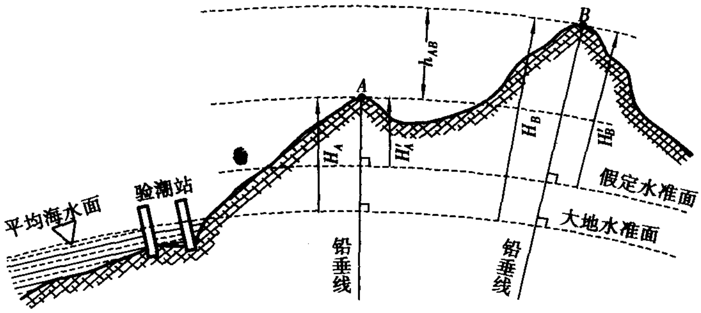


图 1.4 高程与高差的关系

$$h_{ab} = H_B - H_A = H'_B - H'_A \tag{1.4}$$

4)大地高程系统

大地高程系统是以地球椭球面为基准面的高程系统,与大地坐标系属同一系统。如图1.4所示,M 点的大地高 H 是指 M 点沿过该点的参考椭球面法线到椭球面的距离。大地高随所选用的参考椭球不同而异。全球定位系统(GPS)采用 WGS-84 椭球,利用 GPS 定位技术,可直接测定观测站在 WGS-84 中的大地高。

·1.1.3 用水平面代替水准面的限度·

从理论上讲,地点面的空间位置均应投影到大地水准面上。若把大地水准面当作平面看待,必然会产生变形。由于测量及绘图不可避免会产生误差,如果把某一测区范围内的水准面看作平面,其产生的误差不超过测量及制图过程所产生的误差,这样做显然是可以的。那么应该限定在多大的范围之内呢? 测量误差对平面距离和高程的影响是不同的。

1)对平面距离的影响

以水平面代替水准面对距离的影响,可以用相对误差的形式表示:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{3}\left(\frac{D}{R}\right)^2 \tag{1.5}$$

地球半径 R 取 6 371 km,则

当 $D = 10$ km 时,$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{1\ 220\ 000}$

当 $D = 20$ km 时,$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{300\ 000}$

当 $D = 25$ km 时,$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{200\ 000}$

结论:目前最精密测距的容许误差为其长度的 1/1 000 000,故在半径为 10 km 的圆面积范围内,可不考虑地球曲率,即把水准面当作水平面。如果测距精度仅要求 1/300 000 或 1/200 000,则可将圆面积半径的限度放宽至 20 km 或 25 km。

2)对高程的影响

以水平面代替水准面对高程的影响,可以用下列公式表示:

$$\Delta h = \frac{D^2}{2R} \tag{1.6}$$

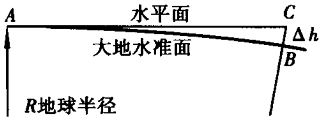


图 1.5　用水平面代替水准面

如图 1.5，地球半径 R 取 6 371 km，

$D=AC$，水平观测距离；

当 $D=100$ m 时，$\Delta h=0.08$ cm；

当 $D=500$ m 时，$\Delta h=2$ cm；

当 $D=1$ km 时，$\Delta h=8$ cm；

当 $D=2$ km 时，$\Delta h=31$ cm。

显然，以水平面代替水准面对高程所产生的误差要远大于测量高程的误差。所以，对于高程而言，即使距离很短，亦不能将水准面当作水平面，一定要考虑地球曲率对高程的影响。

地球曲率除了对距离和高程产生影响外，对水平角亦会产生影响。这就是数学上的球面角超的问题。对于工程测量而言，测区面积不会很大，一般可不考虑地球曲率的影响。

1.2　坐标计算基本方法

道路平面坐标测量计算，一般先按独立平面直角坐标进行，然后根据需要进行联测或改正。平面直角坐标以南北方向为纵轴，北向取正，南向取负；以东西方向为横轴，东向取正，西向取负。在坐标系中，确定道路工程构造物特征相对位置的特征量，主要用坐标方位角、距离和坐标值表示。

· *1.2.1　已知两点坐标推算坐标方位角和点间的距离* ·

坐标方位角是指在坐标系中的任意两点的连线，以其中一坐标点为中心，相对于正北方向顺时针方向的夹角。设已知点 A、B 的坐标为 X_A、Y_A 和 X_B、Y_B，如图 1.6 所示。则坐标方位角 α 和距离计算：

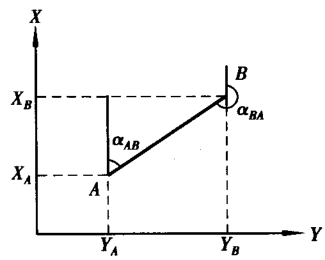


图 1.6　坐标与方位角

(1) 以坐标点 A 为中心，坐标方位角 α_{AB}

$$\alpha_{AB} = \arctan\left[\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right] \tag{1.7}$$

(2) 以坐标点 B 为中心，坐标方位角 α_{BA}

$$\alpha_{BA} = \arctan\left[\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}\right] \tag{1.8}$$

直线两端点坐标方位角关系：

$$\alpha_{AB} = \alpha_{BA} + 180°, \alpha_{BA} = \alpha_{AB} + 180° \tag{1.9}$$

当计算坐标方位角大于 360°，应减去 360°。

(3) AB 两点间连线的距离 D_{AB}

$$D_{AB} = D_{BA} = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2} \tag{1.10}$$

[例 1.1]　已知点 A、B 的坐标为 $X_A = 245\ 678.123$ m，$Y_A = 245\ 678.123$ m；$X_B = 256\ 789.123$ m，$Y_B = 256\ 789.123$ m；求方位角 α_{AB}、α_{BA} 距离 D_{AB}。

解：首先建立平面直角坐标系，将 A、B 两点按坐标点标注并连线如图 1.7：

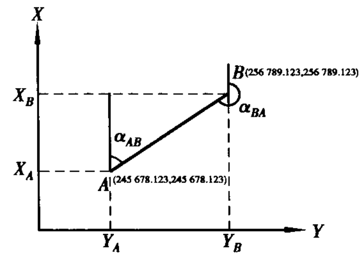


图 1.7 例 1.1

求坐标方位角 α_{AB}：

$$\alpha_{AB} = \arctan\left[\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right]$$

$$= \arctan\left[\frac{256\ 789.123 - 245\ 678.123}{256\ 789.123 - 245\ 678.123}\right]$$

$$= \arctan[1] = 45°$$

求坐标方位角 α_{BA}：

$$\alpha_{BA} = \arctan\left[\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}\right]$$

$$= \arctan[1] = 45^{\circ} + 180^{\circ} = 225^{\circ}$$

求 AB 两点距离：

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(256\ 789.123\ \text{m} - 245\ 678.123\ \text{m})^2 + (256\ 789.123\ \text{m} - 245\ 678.123\ \text{m})^2}$$

$$= 15\ 713.327\ \text{m}$$

· 1.2.2 已知点坐标、直线距离和坐标方位角求未知点坐标 ·

运用已知坐标点到未知点的距离和坐标方位角求算未知点坐标，是坐标测量放样和坐标计算程序设计的基本方法。设已知点 A 的坐标为 X_A、Y_A，已知点 A 到未知点 B 的距离 D_{AB} 和坐标方位角 α_{AB}。求 B 点的坐标 X_B、Y_B：

$$\begin{aligned} X_B &= X_A + D_{AB} \times \cos\alpha_{AB} \\ Y_B &= Y_A + D_{AB} \times \sin\alpha_{AB} \end{aligned} \tag{1.11}$$

[例 1.2] 已知 A 点坐标 $X_A = 1\ 000.000$ m，$Y_A = 1\ 000.000$ m，B 点到 A 点的距离为 100 m，$\alpha_{BA} = 135°$。求 B 点坐标 X_B，Y_B。

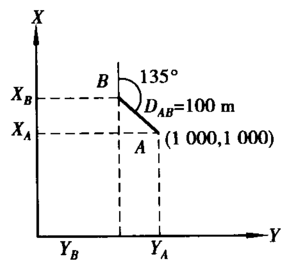


图 1.8 例 1.2

解：因为 $\alpha_{BA} = 135°$，则坐标方位角

$$\alpha_{AB} = \alpha_{BA} + 180°$$

$$= 135° + 180° = 315°$$

$$X_B = Y_A + D_{AB} \times \cos\alpha_{AB}$$

$$= 1\ 000\ \text{m} + 100\ \text{m} \times \cos 315°$$

$$= 1\ 000\ \text{m} + 70.711\ \text{m} = 1\ 070.711\ \text{m}$$

$$Y_B = X_A + D_{AB} \times \sin\alpha_{AB}$$

$$= 1\ 000\ \text{m} + 100\ \text{m} \times \sin 315°$$

$$= 1\ 000\ \text{m} - 70.711\ \text{m} = 929.289\ \text{m}$$

B 点坐标：

$$\begin{cases} X_B = 1\ 070.711\ \text{m} \\ Y_B = 929.289\ \text{m} \end{cases}$$

结果绘制如图 1.8。

1.3 坐标系统转换

·1.3.1 平面直角坐标换算·

在计算平面点位坐标数据时,如果点的坐标处于不同的坐标系,要首先进行坐标换算,换算成统一的坐标系,再计算各点的坐标数据。

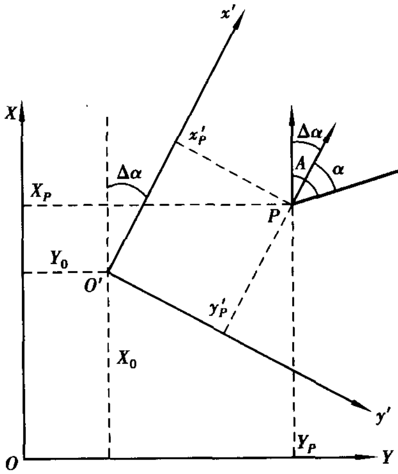


图 1.9 坐标转换关系图

如图 1.9 所示,设 X_P、Y_P 为 P 点在国家控制网坐标系中的坐标;x'_P、y'_P 为 p 点在工程独立控制网坐标系中的坐标;X_0、Y_0 为工程独立坐标系原点 O 在国家坐标系中的坐标;$\Delta\alpha$ 为两坐标纵坐标轴的夹角。如果一条边 PM 在国家坐标系中的坐标方位角为 A,而在工程独立坐标系中的坐标方位角为 α,则 $\Delta\alpha$ 可按下式计算:

$$\Delta\alpha = A - \alpha \tag{1.12}$$

当由工程独立坐标系中的坐标(x'_p、y'_p)换算到国家坐标系中的坐标(X_P、Y_P)时,其换算公式为:

$$\left.\begin{aligned} X_P &= x'_p\cos\Delta\alpha - y'_p\sin\Delta\alpha + X_0 \\ Y_P &= x'_p\sin\Delta\alpha + x'_p\cos\Delta\alpha + Y_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

当由国家坐标系换算到工程独立坐标系时,也可以使用上式。换算时应将式中的 X_P、Y_P 与 x'_p、y'_p 互换,并且 $\Delta\alpha = \alpha - A$。

[例 1.3] 已知 A、B 两点在国家坐标系中的坐标为:X_A = 100 000.000 m,Y_A = 80 000.000 m;X_B = 100 100.000 m,Y_B = 80 100.000 m。在工程独立坐标系中的坐标为 x'_A = 1 000.000 m,y'_A = 2 000.000 m;x'_B = 1 128.172 m,y'_B = 2 059.767 m。试求出两坐标的换算公式。

解:(1)求工程独立坐标系中的坐标换算到国家坐标系中的坐标的实用公式

$$A_{AB} = \arctan\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \arctan\frac{80\ 100 - 80\ 000}{100\ 100 - 10\ 000} = 45°$$

$$\alpha_{AB} = \arctan\frac{y'_B - y'_A}{x'_B - x'_A} = \arctan\frac{2\ 059.767 - 2\ 000}{1\ 128.17 - 1\ 000} = 25°$$

由式 1.11 得:

$$\Delta\alpha = A_{AB} - \alpha_{AB} = 45° - 25° = 20°$$

将 A 点在两坐标系中的坐标 X_A、Y_A、x'_A、y'_A 以及 $\Delta\alpha$ 之值代入式 1.13,计算工程独立坐标系原点 O' 在国家坐标系中的坐标

$$100\ 000\ \text{m} = 1\ 000\ \text{m} \times \cos 20° - 2\ 000\ \text{m} \times \sin 20° + X_0$$

$$80\ 000\ \text{m} = 1\ 000\ \text{m} \times \sin 20° + 2\ 000\ \text{m} \times \cos 20° + Y_0$$

得:X_0 = 99 744.348 m,Y_0 = 77 778.595 m。

将 B 点在两坐标系中的坐标 X_B、Y_B、x'_B、y'_B 以及 $\Delta\alpha$ 之值代入式 1.13,计算工程独立坐标

系原点 O' 在国家坐标系中的坐标

$$100\ 100\ \text{m} = 1\ 128.171\ \text{m} \times \cos 20° - 2\ 059.767\ \text{m} \times \sin 20° + X_0$$

$$80\ 100\ \text{m} = 1\ 128.171\ \text{m} \times \sin 20° + 2\ 059.767\ \text{m} \times \cos 20° + Y_0$$

得：$X_0 = 99\ 744.348$ m，$Y_0 = 77\ 778.595$ m

取由 A、B 两点算得的 X_0、Y_0 值相等。

设 x、y 为某点在工程独立坐标系中的坐标，X、Y 为该点在国家坐标系中的坐标，将 X_0、Y_0 及 $\Delta\alpha$ 3 个值代入式 1.12，得实用公式：

$$X = 0.939\ 692\ 620\ 8x - 0.342\ 020\ 143\ 3y + 99\ 744.348\ \text{m}$$

$$Y = 0.342\ 020\ 143\ 3x + 0.939\ 692\ 620\ 8y + 77\ 778.595\ \text{m}$$

(2)国家坐标系中的坐标换算到工程独立坐标中的坐标的实用公式

$$\Delta\alpha = \alpha_{AB} - A_{AB} = 25° - 45° = -20°$$

将式 1.13 中的 X、Y 与 x、y 互换，可得

$$\left.\begin{aligned} x'_P &= X_P \cos \Delta\alpha - Y_P \sin \Delta\alpha + x_0 \\ y'_P &= X_P \sin \Delta\alpha + Y_P \cos \Delta\alpha + y_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

计算国家坐标系原点 O 在工程独立坐标系中的坐标

$$1\ 000\ \text{m} = 100\ 000\ \text{m} \cos(-20°) - 80\ 000\ \text{m} \sin(-20°) + x_0$$

$$2\ 000\ \text{m} = 100\ 000\ \text{m} \sin(-20°) + 80\ 000\ \text{m} \cos(-20°) + y_0$$

得：$x_0 = 120\ 330.874$ m，$y_0 = 38\ 973.395$ m

将 x_0、y_0 及 $\Delta\alpha$ 3 个值带入式 1.13 即得实用公式：

$$x = 0.939\ 692\ 620\ 8X + 0.342\ 020\ 143\ 3Y - 120\ 330.874$$

$$y = -0.342\ 020\ 143\ 3X + 0.939\ 692\ 620\ 8Y - 38\ 973.395$$

式中：x、y，X、Y 的含义同上。

·1.3.2　坐标换带计算·

高斯投影为保角映射，即投影后角度不产生变形，但其长度会变形，而且离开中央子午线越远，长度变形会越大。为了限制高斯投影的长度变形，就采用了分带投影的方法。分带投影的结果使得各带独自建立了平面直角坐标系，从而产生了各相邻之间控制点坐标互相联系的问题。欲解决这一问题，就要把一个带的平面直角坐标换算到相邻的另一个带上，称为坐标换带。

在生产实践中通常有以下 2 种情况需要换带计算：

①当控制网中的已知点位于相邻的 2 个投影带中，在坐标平差计算时，就必须将它们的坐标系统一起来，将位于西带的已知点的坐标值换算至东带，或是将位于东带的已知点的坐标值换算至西带。

②国家控制点的坐标通常是 6°带的坐标，而在工程测量往往需要采用 3°带或 1.5°带，这就产生了 6°带与 3°带或 1.5°带之间的坐标换算问题。

坐标换算带可采用间接换带计算法。

如要将第一带（东带或西带）的平面直角坐标换算为第二带（西带或东带）的平面直角坐标，可先根据第一带的坐标 x、y 和中央子午线的经度 L_0，按高斯投影坐标反算公式求得大地坐标 B、L。然后根据 B、L 和第二带的中央子午线经度 L'_0，按高斯投影坐标正算公式求得第二带

中的坐标 x'、y'。由于在换带计算中，把椭球面上的大地坐标 B、L 作为过渡坐标，因而称为间接换带法。这种方法理论上是严密的，精度高，而且通用性强，它适用于 6°带与 6°带、3°带与 3°带、6°带与 3°带之间的坐标换带。虽然这种方法计算工作量较大，但可用计算机计算来克服，故已成为坐标换带中最基本的方法。

1）高斯投影坐标正算公式

已知一点的大地坐标 L、B 和高斯投影带的中央子午线经度 L_0，计算该点的高斯平面坐标 x、y，称为高斯投影坐标正算。其计算公式为：

$$\left.\begin{aligned} x &= X + Nt\left[\frac{m^2}{2} + \frac{(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^2)m^4}{24} + \frac{(61 - 58t^2 + t^4)m^6}{720}\right] \\ y &= N\left[m + \frac{(1 - t^2 + \eta^2)m^3}{6} + \frac{(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2t^2)m^5}{720}\right] \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

式中：$m = \frac{1 \times \pi}{180°}\cos B$；子午弧长 X 对于克拉索夫斯基（简称克氏）椭球按下式计算：

$$X = 111\ 134.861\ 1B - (32\ 005.779\ 9 \sin B + 133.923\ 8 \sin^3 B + 0.697\ 3 \sin^5 B + 0.003\ 9 \sin^7 B)\cos B \tag{1.16}$$

我国解放以来采用了克氏椭球，并把由原苏联的坐标原点传算过来的北京地区一大地点的坐标，作为我国的大地测量起算数据。克氏椭球与我国实际有较大的差距，也与现今公布的椭球有较大偏差。因此，我国已另建了 1980 年国家大地坐标系，采用“IAG-75”国际椭球，大地原点设在西安（陕西省阳县永乐镇）。

对于“IAG-75”国际椭球：

$$X = 111\ 134.004\ 7B - (32\ 009.857\ 5 \sin B + 133.960\ 2 \sin^3 B + 0.697\ 6 \sin^5 B + 0.003\ 9 \sin^7 B)\cos B \tag{1.17}$$

其余符号为：

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{l \times \pi}{180°}\cos B \ (\text{式中 } l = L - L_0) \\ t &= \tan B \\ \eta^2 &= e'^2\cos^2 B \\ N &= C/\sqrt{1 + \eta^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

C 为极曲率半径，e' 称为第二偏心率。

对于克氏椭球：

$$\left.\begin{aligned} C &= 6\ 399\ 698.901\ 782\ 71\ \text{m} \\ e'^2 &= 0.006\ 738\ 525\ 414\ 7 \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

对于“IAG-75”国际椭球：

$$\left.\begin{aligned} C &= 6\ 399\ 696.651\ 988\ 01\ \text{m} \\ e'^2 &= 0.006\ 739\ 501\ 819\ 5 \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

2）高斯投影坐标反算公式

已知一点的高斯平面直角坐标 x、y 和所处投影带中央子午线经度 L_0，计算该点的大地坐标 L、B，称为高斯投影坐标反算。其计算公式为：

$$\left.\begin{aligned}
&B=B_f-\frac{1+\eta_f^2}{\pi}t_f[90n^2-7.5(5+3t_f^2+\eta_f^2-9\eta_f^2t_f^2)+\\
&\quad 0.25(61+90t_f^2+45t_f^4)n^6]\\
&l=\frac{1}{\pi\cos B_f}[180n-30(1+2t_f^2+\eta_f^2)n^3+1.5(5+28t_f^2+24t_f^4)n^5]\\
&L=L_0+l
\end{aligned}\right\}\tag{1.21}$$

式中底点纬度 B_f 之值以 $X=x$ 代入下式计算：

对于克氏椭球：

$$\begin{aligned}
B_f=&27.111\,153\,725\,95+9.024\,682\,570\,83(X-3)-0.005\,797\,404\,42(X-3)^2-\\
&0.000\,435\,325\,72(X-3)^3+0.000\,048\,572\,85(X-3)^4+\\
&0.000\,000\,215\,727(X-3)^5-0.000\,000\,193\,99(X-3)^6
\end{aligned}\tag{1.22}$$

对于“IAG-75”国际椭球：

$$\begin{aligned}
B_f=&27.111\,622\,894\,65+9.024\,365\,772\,9(X-3)-0.005\,798\,506\,56(X-3)^2-\\
&0.000\,435\,400\,29(X-3)^3+0.000\,048\,583\,57(X-3)^4+0.000\,000\,215\,769(X-3)^5-\\
&0.000\,000\,194\,04(X-3)^6
\end{aligned}\tag{1.23}$$

式中 X 均以 10^3 km 为单位，B_f 的单位为度。

以克氏椭球为例，以 $X=x$ 代入

$$B_f^{(1)}=X/111\,134.861\,1\tag{1.24}$$

称为一次迭代，以后各次迭代为

$$B_f^{(i+1)}=[X-F(B_f^{(1)})]/111\,134.861\,1\tag{1.25}$$

式中：

$$\begin{aligned}
F(B_f^{(i+1)})=&-(32\,005.779\,9\sin B_f^{(i)}+133.923\,8\sin^3 B_f^{(i)}+\\
&0.679\,3\sin^5 B_f^{(i)}+0.003\,9\sin^7 B_f^{(i)})\cos B_f^{(i)}
\end{aligned}\tag{1.26}$$

直至 $(B_f^{(i+1)}-B_f^{(i)})<1\times10^{-8}$ 为止。一般迭代 6 次即可。

其余符号为：

$$\left.\begin{aligned}
n&=\frac{y\sqrt{1+\eta_f^2}}{c}\\
t_f&=\tan B_f\\
\eta_f^2&=e'^2\cos^2 B_f
\end{aligned}\right\}\tag{1.27}$$

3）间接换带法计算步骤

（1）设 P 点在第一带的平面坐标为 x_p、y_p，中央子午线的经度为 L_0。取 $X=x_p$ 代入式 1.22、式 1.23 计算底点纬度 B_f 之值。亦可按式 1.24、式 1.25 及式 1.26 迭代计算。

（2）根据 P 点横坐标 y_p 和底点纬度 B_f 按坐标反算公式 1.21 计算 P 点的大地坐标 B、L 值。

（3）根据 P 点的大地纬度 B 按式 1.16、式 1.17 计算赤道至纬度 B 的子午线弧长 X 之值。

（4）根据 P 点的大地纬度 B 和其经度 L 第二带中央子午线经度 L_0' 之差 $l'=L-L_0'$ 以及子午弧长 X，按坐标正算公式 1.15 计算 P 点在第二带的平面坐标 x_p'、y_p'。

（5）为了检核，由计算出的 P 点在第二带的平面坐标 x_p'、y_p' 及第二带中央子午线的经度