现代数学基础丛书 112

戴维-斯特瓦尔松方程

戴正德　蒋慕蓉　李栋龙　著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是关于耦合非线性偏微分方程 Davey-Stewartson (DS) 方程的一本专门著作。全书共分 5 章，主要介绍 DS 方程的物理背景；不同类型 DS 方程的初值问题；多种形式的孤立子解；同宿、异宿解；吸引子及结构探索。本书总结了 DS 方程的主要研究成果，特别是近年来我国科学工作者的成果。本书既注重理论，又侧重于方法和技巧的总结。

本书适合于数学、物理、力学等有关专业人员及高等学校有关教师、高年级学生及研究生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

戴维-斯特瓦尔松方程/戴正德，蒋慕蓉，李栋龙 著.—北京：科学出版社，2007

(现代数学基础丛书；112)

ISBN 978-7-03-019045-1

I. 戴… II. ①戴… ②蒋… ③李… III. 微分方程 IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 078926 号

责任编辑：张 扬 杨 然／责任校对：陈玉凤

责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2007 年 6 月第一次印刷 印张：14 1/4

印数：1—3 000 字数：263 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003年8月

前　言

20 世纪 70 年代中期, A. Davey 和 K. Stewartson 研究描述有限深水中波数为 k 的三维曲面波包的发展模型, 导出一类耦合方程, 称之为戴维 - 斯特瓦尔松 (Davey-Stewartson) 方程, 之后, Davey, Stewartson 和 Hocking 在研究平面 Poiseuille 流的三维扰动的非线性发展时导出了同一模型; 1977 年, 考虑到水波表面的曲面张力效应, Djordjevic 和 Redekopp 进一步改进和完善了上述模型. 与此同时, Ablowitz, Haberman, Morris 和 Cornille 在研究将非线性 Schrödinger 方程推广到二维空间的完全可积系统时独立地推导出特殊的 Davey-Stewartson 方程.

Davey-Stewartson (简称 DS) 方程是由复振幅变量和实平均速度势变量耦合的 (1+2) 维非线性偏微分方程组. 由于曲面张力效应的不同, 就空间变量的特征而言, DS 方程可分为椭圆 - 双曲型 (DSI)、双曲 - 椭圆型 (DSII)、椭圆 - 椭圆型和双曲 - 双曲型等四类. 基于此, DS 方程既具有一般二阶耦合组的共同特征, 同时又具有特殊复杂性, 因此从模型建立以来, 引起了很多数学物理学家的关注. 40 多年来, 在方程初始问题解的适定性、解的爆破、孤立子解、周期孤立子解及其共振、envelope-hole 解、dromions 解、solitoff 解、双周期解、同宿筒解、异宿筒解以及扰动 DS 方程解在无穷维空间的性态等方面展开了深入的研究, 取得了丰富的研究成果, 出现了许多求解问题的新思想、新方法和新技巧, 探寻了 DS 方程所特有的解的复杂结构, 揭示了该方程所描述的物理现象的复杂性. 其中, 一些结果是我国的科学工作者包括院士、数学物理研究人员、年轻的博士和作者的原创性成果.

本书旨在比较系统地总结 40 余年来 DS 方程的研究成果, 特别是近年来的成果, 介绍在求解孤立子、同宿、异宿筒解以及显示解中创造和发展起来的若干种新方法、新技巧, 展示近年来在近可积系统研究中国内学者在 DS 方程研究方面的最新成果, 其中, 一些结果是作者承担的两项国家自然科学基金课题的成果. 本书在撰写过程中得到国内外学者的支持和帮助, 云南大学、香港中文大学数学科学研究所以及广西工学院为作者提供了良好的研究环境, 科学出版社张扬先生付出了艰辛的劳动, 我们在此一并表示诚挚的谢意. 由于作者的能力和水平所限, 一些重要的成果可能未能述及, 书中也可能有不妥之处, 敬请读者见谅和指正.

本书得到国家自然科学基金 (项目编号: 10361007) 的资助.

作　者

2007 年 3 月

目　录

第 1 章　戴维 - 斯特瓦尔松方程的物理背景

戴维 - 斯特瓦尔松 (Davey-Stewartson) 方程 (简称 DS 方程) 是流体力学中的一类重要的偏微分方程组, 它有着丰富的物理背景和内涵, 有限深度水面上波数为 k 的三维波包的发展 (Davey A. 和 Stewartson K.　1974)、有限深度水面上二维表面张力 - 引力波包的位移 (Eagles P.M.　1971)、平面 Poiseuille 流三维扰动的非线性发展 (Davey A. 等　1974) 等都可导出 DS 方程. DS 方程于 20 世纪 70 年代由 Davey, Stewartson, Hocking 等推导. 1976 年, Djordjevic V.D. 和 Redekopp L.G.(1977) 在研究有限深度水面上二维表面张力 - 引力波包的位移时也导出了这类方程, 并且作了完善. 本章我们从上述三个不同的物理背景推导方程.

1.1　三维曲面波包

本节我们用多重尺度法得到描述有限深度水中波数为 k 的三维波包发展的 DS 方程.

首先我们选择固定的笛卡儿坐标系 $OXYZ$, 其中原点在未扰动的自由曲面上, OZ 垂直向上使得水的底面由 $z=-h$ 所定义, 并且平面 OXY 与未扰动的自由曲面重合. 我们设在时间 $t=0$ 时有一确定的前进波使得自由曲面的高度提升到 $z=\zeta$, 其中

$$g\zeta|_{t=0} = \mathrm{i}\epsilon w a(\epsilon x, \epsilon y)\exp\{\mathrm{i}kx\} + \mathrm{c.c}, \tag{1.1.1}$$

式中, g 是重力加速度; k 和 w 分别表示此前进波的波数和频率; a 是 $\epsilon x, \epsilon y$ 的函数; ϵ 是小的正常数; c.c 表示复共轭. 在物理中, 这种形式对应于一波长为 $2\pi/k$ 沿 x 正方向的前进波并且随着位置的改变振幅缓慢地变化, 而且与它的高度成反比例. k 和 w 之间的色散关系是

$$w = (gk\sigma)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.2}$$

其中, $\sigma=\tanh kh$. 随后, 用 t 来度量时间, $\phi(x,y,z,t)$ 表示速度势, 使得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0, \qquad -h < z < \zeta, \tag{1.1.3}$$

对应的在 $z=-h$ 上边界条件是

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0\,, \tag{1.1.4}$$

在 $z=\zeta$ 上边界条件是

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} \tag{1.1.5a}$$

和

$$2g\zeta+2\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2=0. \tag{1.1.5b}$$

由于在前进波施加扰动, 我们可以寻找如下形式的解:

$$\phi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi_n E^n,\qquad \zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\zeta_n E^n, \tag{1.1.6}$$

其中

$$E=\exp\{\mathrm{i}(kx-\omega t)\},\qquad \phi_{-n}=\tilde{\phi_n},\qquad \zeta_{-n}=\tilde{\zeta_n}, \tag{1.1.7}$$

$\tilde{\phi}$ 表示 ϕ 复共轭, 此外, 我们将 ϕ_n,ζ_n 表示为

$$\phi_n=\sum_{j=n}^{\infty}\epsilon^j\phi_{nj},\qquad \zeta_n=\sum_{j=n}^{\infty}\epsilon^j\zeta_{nj},\qquad n\geqslant 0, \tag{1.1.8}$$

其中, ϕ_{nj} 仅是 ξ,η,z,τ 的函数, ζ_{nj} 仅是 ξ,η,τ 的函数, 并且 $\phi_{00}=\eta_{00}=0$, 这里

$$\xi=\epsilon(x-c_g t),\qquad \eta=\epsilon y,\qquad \tau=\epsilon^2 t, \tag{1.1.9}$$

c_g 是初始前进波的群速度使得

$$c_g=\omega'(k)=(g/2\omega)\{\sigma+kh(1-\sigma^2)\}, \tag{1.1.10}$$

我们将 ϕ 的展开式 (1.1.6), 式 (1.1.8) 代入式 (1.1.3), 利用多重尺度法得到函数 ϕ_{nj} 的一个常微分方程序列. 特别地, 在边界条件 (1.1.4) 满足时有

$$\begin{cases}\phi_{11}=A\dfrac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh},\qquad \phi_{22}=F\dfrac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh},\\ \phi_{12}=D\dfrac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}-\mathrm{i}\dfrac{\partial A}{\partial\xi}\left\{\dfrac{(z+h)\sinh k(z+h)-h\sigma\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\right\}.\end{cases} \tag{1.1.11}$$

其中, A,D,F 仅是 ξ,η,τ 的函数, 由于 ϕ_{0j} 方程解的性质强依赖于 ϵkh 的取值, 这里我们仅注意 $\epsilon kh\ll 1$ 的情形 (波触及底部), 推出 ϕ_{01},ϕ_{02} 与 z 无关而

$$\frac{\partial\phi_{03}}{\partial z}=-(z+h)\left\{\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\eta^2}\right\}. \tag{1.1.12}$$

下一步我们将式 (1.1.6)~ 式 (1.1.8) 代入边界条件 (1.1.5a), (1.1.5b), 利用多重尺度法, 令 $\epsilon^j E^n(j=1,2,3;\ n=0,1,2)$ 的系数都等于零, 得到

$$\epsilon E^0;\quad \zeta_{01}=0, \tag{1.1.13a}$$

$$\epsilon E^1;\quad g\zeta_{11}=\mathrm{i}\omega A, \tag{1.1.13b}$$

$$\epsilon^2 E^0;\quad g\zeta_{02}=c_g\frac{\partial\phi_{01}}{\partial\xi}-k^2(1-\sigma^2)|A|^2, \tag{1.1.13c}$$

$$\epsilon^2 E^1;\quad g\zeta_{12}=\mathrm{i}\omega D+c_g\frac{\partial A}{\partial\xi}, \tag{1.1.13d}$$

$$\epsilon^2 E^2;\quad g\zeta_{22}=k^2A^2\left(\frac{\sigma^2-3}{2\sigma^2}\right),\qquad \omega F=3\mathrm{i}k^2A^2\left(\frac{1-\sigma^4}{4\sigma^2}\right). \tag{1.1.13e}$$

当我们考虑式 (1.1.5a) 中 ϵ^3E^0 的系数时, 除了要考虑来自 $\partial\zeta_{02}/\partial\xi, \partial\zeta/\partial t$ 的影响还要考虑在式 (1.1.12) 中非零项 $\partial\phi_{03}/\partial z$ 的影响, 利用式 (1.1.13c) 消去 ζ_{02} 后, 我们推出

$$(gh-c_g^2)\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\xi^2}+gh\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\eta^2}=-k^2\{2c_p+c_g(1-\sigma^2)\}\frac{\partial|A|^2}{\partial\xi} \tag{1.1.14}$$

和我们不需要的关于 ϕ_{03} 的方程. 在式 (1.1.14) 中 $c_p=\omega/k$, 它表示初始前进波的相速度. 在式 (1.1.5a), 式 (1.1.5b) 中 ϵ^3E^1 项的系数相等导致在 $z=0$ 上有关于 ϕ_{13},ζ_{13} 的两个代数方程, 如果从这两个方程中消去 ϕ_{13} 或 ζ_{13} 当且仅当下式成立时, 它们相容

$$\begin{aligned}&2\mathrm{i}\omega\frac{\partial A}{\partial\tau}-\{c_g^2-gh(1-\sigma^2)(1-kh\sigma)\}\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+c_pc_g\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}\\&=\frac{1}{2}k^4\{9\sigma^{-2}-12+13\sigma^2-2\sigma^4\}|A|^2A+k^2\{2c_p+c_g(1-\sigma^2)\}A\frac{\partial\phi_{01}}{\partial\xi}.\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

方程 (1.1.14) 和 (1.1.15) 一起描述了对于 ϵ 一阶项前进波的发展, 对于 A, 适当的初始条件是

$$A(\xi,\eta,0)=a(\xi,\eta). \tag{1.1.16}$$

由物理背景, 一个合理的边界条件是对于任何固定的 τ, 波在远离它的中心时会完全消失, 因此当 $\xi^2+\eta^2\to\infty$ 时

$$|A|\to 0,\qquad \mathrm{grad}\phi_{01}\to 0. \tag{1.1.17}$$

在深水中 $\lim kh\to\infty,\sigma\to 1$ (但是保持 $\epsilon kh\ll 1$), 方程 (1.1.14), (1.1.15) 简化为 $\mathrm{grad}\phi_{01}=0$ 和

$$2\mathrm{i}\omega\frac{\partial A}{\partial\tau}-\frac{g}{4k}\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+\frac{g}{2k}\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}=ak^4|A|^2A. \tag{1.1.18}$$

在浅水中, $\lim kh \to 0, c_g \to c_p$, 方程 (1.1.14), (1.1.15) 简化为

$$k^2h^2\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial\eta^2}=-\frac{3k^2}{g^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial|A|^2}{\partial\xi}, \tag{1.1.19}$$

$$\frac{2\mathrm{i}k}{g^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial A}{\partial\tau}-k^2h^2\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}=\frac{9k^2}{2gh^3}|A|^2A+\frac{3k^2}{g^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}}A\frac{\partial\phi_{01}}{\partial\xi}. \tag{1.1.20}$$

现在我们以另一种方式表示式 (1.1.14) 和式 (1.1.15). 当 $t>0$ 时, 自由曲面的高度可以由下式给出:

$$g\zeta=\mathrm{i}\epsilon\omega A\exp\{\mathrm{i}(kx-\omega t)\}+\mathrm{c.c}+O(\epsilon^2), \tag{1.1.21}$$

其中, c.c 表示复共轭, 作为前进波传递的结果, 除了具有式 (1.1.21) 特征的变化更快以外, 自由曲面的局部高度变化缓慢. 记这个长期变化是

$$\epsilon^2\left[\frac{k^2}{g}Q(\xi,\eta,\tau)-\frac{k\{\sigma+2kh(1-\sigma^2)\}}{gh-c_g^2}|A|^2\right], \tag{1.1.22}$$

附带地, 我们注意到它又等于 $\epsilon^2\zeta_{02}$, 然后我们得到式 (1.1.14) 和式 (1.1.15) 的等价形式如下:

$$\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial\tau}+\lambda\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}+\mu\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}=\nu|A|^2A+\nu_1AQ, \tag{1.1.23a}$$

$$\lambda_1\frac{\partial^2Q}{\partial\xi^2}+\mu_1\frac{\partial^2Q}{\partial\eta^2}=k_1\frac{\partial^2|A|^2}{\partial\eta^2}, \tag{1.1.23b}$$

其中,

$$\lambda=\frac{1}{2}\omega''(k)\leqslant 0,\qquad \mu=\frac{\omega'(k)}{2k}\equiv\frac{c_g}{2k}\geqslant 0,$$

$$\nu=\frac{k^4}{4\omega\sigma^2}\left\{9-10\sigma^2+9\sigma^4-\frac{2\sigma^2}{gh-c_g^2}\left[4c_p^2+4c_pc_g(1-\sigma^2)+gh(1-\sigma^2)\right]\right\},$$

$$\nu_1=\frac{k^4}{c_g}\{2c_p+c_g(1-\sigma^2)\},\quad \lambda_1=gh-c_g^2\geqslant 0,\quad \mu_1=gh,$$

$$k_1=ghc_g\left\{\frac{2c_p+c_g(1-\sigma^2)}{gh-c_g^2}\right\}.$$

式 (1.1.23a), 式 (1.1.23b) 正是 DS 方程.

1.2　二维表面张力 - 引力波包

本节我们研究有限深水面上二维表面张力 - 引力波包的运动方程, 波包的发展由两个偏微分方程所描述: 一个是带有外力项的非线性 Schrödinger 方程, 另一个是线性方程, 它是椭圆型或者双曲型取决于表面张力 - 引力波包的群速度是否小于或者大于长引力波的速度. 我们考虑不变深度 h 的液体的自由曲面上运动的一前向

表面张力 - 引力波的发展, 未扰动的自由曲面对应于平面 $z=0$, 其中 z 垂直向上, 底部在 $z=-h$. 未扰动的自由曲面其余的平面坐标 x,y, 我们选择 x 指向波的传播方向. 由于液体的运动是无旋的, 速度位势 $\phi(x,y,z,t)$ 满足 Laplace 方程

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=0,\qquad -h<z<\zeta, \tag{1.2.1}$$

其中, $\zeta(x,y,t)$ 表示起伏的自由曲面的位置. 其边界条件: 在 $z=-h$ 上,

$$\phi_z=0, \tag{1.2.2a}$$

在 $z=\zeta$ 上,

$$\phi_z=\zeta_t+\phi_x\zeta_x+\phi_y\zeta_y \tag{1.2.2b}$$

和

$$g\zeta+\phi_t+\frac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2)=T\frac{\zeta_{xx}(1+\zeta_y^2)+\zeta_{yy}(1+\zeta_x^2)-2\zeta_{xy}\zeta_x\zeta_y}{(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.2.2c}$$

参数 T 是曲面张力系数与流体密度的比值, g 是重力加速度. 我们设初始曲面 (在 $t=0$) 有如下变形:

$$\zeta(x,y,t=0)=\epsilon\frac{\mathrm{i}\omega}{g(1+\tilde{T})}\{A(\epsilon x,\epsilon y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\}, \tag{1.2.3}$$

其中, $\tilde{T}=k^2T/g$, $*$ 表示复共轭; ϵ 是度量波长 $2\pi/k$ 的波动曲面斜率的非维度参数. 曲面形变的包络 $A(\epsilon x,\epsilon y)$ 容许具有一慢空间变量并且频率 ω 唯一地由 k 的值和下面色散关系式确定:

$$\omega=\{gk\sigma(1+\tilde{T})\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2.4}$$

其中 $\sigma=\tanh kh$. 现在我们推导当运动仅是弱非线性时描述 A 的时间发展的方程 $(0<\epsilon\ll 1)$, 我们设式 (1.2.1), 式 (1.2.2) 有如下形式的解:

$$\phi=\epsilon\phi^{(1)}+\epsilon^2\phi^{(2)}+\epsilon^3\phi^{(3)}+\cdots, \tag{1.2.5a}$$

$$\zeta=\epsilon\zeta^{(1)}+\epsilon^2\zeta^{(2)}+\epsilon^3\zeta^{(3)}+\cdots, \tag{1.2.5b}$$

引进多重尺度:

$$\xi=\epsilon(x-c_gt),\eta=\epsilon y,\tau=\epsilon^2t,\xi_1=\epsilon^2(x-c_gt),\cdots, \tag{1.2.6}$$

c_g 表示群速度, 由下式给出:

$$c_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}=c_p\left\{\frac{\sigma+kh(1-\sigma^2)}{2\sigma}+\frac{\tilde{T}}{1+\tilde{T}}\right\},\qquad c_p=\frac{\omega}{k}. \tag{1.2.7}$$

将这些形式带入控制方程集, 反复利用在 $x, y, z, t, \xi, \eta, \tau$ 固定时 $\epsilon \to 0$ 的极限过程, 依次解出这些方程, 并且利用记号:

$$E \equiv \exp\{\mathrm{i}(kx - \omega t)\}, \tag{1.2.8}$$

我们得到下面的结果:

$$\phi^{(1)} = \varPhi^{(1,0)}(\xi, \eta, \tau) + \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\{A(\xi, \eta, \tau)E + A^* E^{-1}\}, \tag{1.2.9a}$$

$$g\zeta^{(1)} = 0 + \frac{\mathrm{i}\omega}{1+\tilde{T}}\{AE - A^* E^{-1}\}, \tag{1.2.9b}$$

$$\begin{aligned}\phi^{(2)} = {} & \varPhi^{(2,0)}(\xi, \eta, \tau) + \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\{D(\xi, \eta, \tau)E + D^* E^{-1}\} \\ & -\mathrm{i}\frac{(z+h)\sinh k(z+h) - h\sigma \cosh k(z+h)}{\cosh kh}\{A_\xi E - A_\xi^* E^{-1}\} \\ & + \frac{3\mathrm{i}k^2 \cosh 2k(z+h)}{4\cosh 2kh}\left[\frac{(1+\sigma^2)\{1-\sigma^2+\tilde{T}(3-\sigma^2)\}}{\sigma^2 - \tilde{T}(3-\sigma^2)}\right]\{A^2E^2 - A^{*2}E^{-2}\},\end{aligned} \tag{1.2.10a}$$

$$\begin{aligned}g\zeta^{(2)} = {} & c_g \varPhi_\xi^{(1,0)} - k^2(1-\sigma^2)|A|^2 + \frac{\mathrm{i}\omega}{1+\tilde{T}}\{DE - D^*E^{-1}\} \\ & + \frac{c_p}{1+\tilde{T}}\left[\frac{c_g}{c_p} - \frac{2\tilde{T}}{1+\tilde{T}}\{A_\xi E + A_\xi^* E^{-1}\} - \frac{k^2}{2}\frac{3-\sigma^2}{\sigma^2 - \tilde{T}(3-\sigma^2)}\right]\{A^2E^2 + A^{*2}E^{-2}\}.\end{aligned} \tag{1.2.10b}$$

在式 (1.2.10) 中第二谐波项当 $\tilde{T} = \sigma^2/(3-\sigma^2)$ (对于深水: $\sigma = 1$ 推出 $\tilde{T} = \frac{1}{2}$) 时有奇性. 满足此条件的波数具有通常称为 “第二谐共振” 的现象, 在这个波数, 解析性被破坏而需要一个新的尺度. 假设波数 k 不太接近于 $\tilde{T} = \sigma^2/(3-\sigma^2)$, 我们可以继续做下去, 得到

$$\begin{aligned}\phi^{(3)} = {} & -\frac{1}{2}(z+h)^2\{\varPhi_{\xi\xi}^{(1,0)} + \varPhi_{\eta\eta}^{(1,0)}\} + \varPhi^{(3,0)}(\xi, \eta, \tau) \\ & + \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\{G(\xi, \eta, \tau)E + G^* E^{-1}\} \\ & + \frac{(z+h)\sinh k(z+h) - h\sigma \cosh k(z+h)}{2k\cosh kh} \\ & \times \{(2kh\sigma A_{\xi\xi} - A_{\eta\eta} - 2\mathrm{i}kD_\xi - 2\mathrm{i}kA_\xi)E + \mathrm{c.c}\} \\ & - \frac{[(z+h)^2 - h^2]\cosh k(z+h)}{2\cosh kh}\{A_{\xi\xi}E + A_{\xi\xi}^* E^{-1}\} + \text{高阶谐波项}.\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

然后利用边界条件 (1.2.2b), 我们得到首阶平均流或长波分量由如下方程所确定:

$$(gh-c_g^2)\Phi_{\xi\xi}^{(1,0)}+gh\Phi_{\eta\eta}^{(1,0)}=-k^2c_p\left[\frac{c_g}{c_p}(1-\sigma^2)+\frac{2\tilde{T}}{1+\tilde{T}}\right](|A|^2)_\xi. \tag{1.2.12}$$

这个方程表明由短波自相互作用产生了长波, 又与上面在式 (1.2.2b), 式 (1.2.2c) 中的第一谐波分量比较, 我们发现仅当 $A(\xi.\eta,\tau)$ 满足下面的发展方程时这两个方程才是相容的:

$$\begin{aligned}&2\mathrm{i}\omega A_\tau+\omega\omega''A_{\xi\xi}+c_pc_gA_{\eta\eta}\\&=2k^2c_p\left\{1+\frac{c_g}{2c_p}(1-\sigma^2)(1+\tilde{T})\right\}A\Phi_\xi^{(1,0)}\\&\quad+\frac{k^4}{2}\left\{\frac{(1-\sigma^2)(9-\sigma^2)+\tilde{T}(3-\sigma^2)(7-\sigma^2)}{\sigma^2-\tilde{T}(3-\sigma^2)}+8\sigma^2-2(1-\sigma^2)^2(1+\tilde{T})\right\}|A|^2A\\&\quad-\frac{3\sigma^2k^4\tilde{T}}{2(1+\tilde{T})}|A|^2A.\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

假如我们引进变量 Q:

$$Q=\frac{c_g}{k^2}\Phi_\xi^{(1,0)}+\frac{c_g}{gh-c_g^2}\left\{\frac{2c_p}{1+\tilde{T}}+c_g(1-\sigma^2)\right\}|A|^2, \tag{1.2.14}$$

则方程 (1.2.12), (1.2.13) 可以简化为 DS 方程:

$$\mathrm{i}A_\tau+\lambda A_{\xi\xi}+\mu A_{\eta\eta}=\nu|A|^2A+\nu_1AQ, \tag{1.2.15}$$

$$(gh-c_g^2)Q_{\xi\xi}+ghQ_{\eta\eta}=k(|A|^2)_{\eta\eta}. \tag{1.2.16}$$

系数定义如下:

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda=\frac{1}{2}\omega''(k),\quad \mu=\omega'(k)/2k=c_g/2k,\\&\nu=\frac{k^4}{4\omega}\left\{\frac{(1-\sigma^2)(9-\sigma^2)+\tilde{T}(3-\sigma^2)(7-\sigma^2)}{\sigma^2-\tilde{T}(3-\sigma^2)}+8\sigma^2-\frac{3\sigma^2\tilde{T}}{1+\tilde{T}}\right.\\&\qquad\left.-\frac{8c_g^2}{(gh-c_g^2)(1+\tilde{T})}\left[\left(\frac{c_p}{c_g}\right)^2+\frac{c_p}{c_g}(1-\sigma^2)(1+\tilde{T})+\frac{gh}{c_g^2}(1-\sigma^2)^2(1+\tilde{T})^2\right]\right\},\\&\nu_1=\frac{k^4}{\omega}\left[\frac{c_p}{c_g}+\frac{1}{2}(1-\sigma^2)(1+\tilde{T})\right],\\&k=ghc_g\frac{2c_p+c_g(1-\sigma^2)(1+\tilde{T})}{(gh-c_g^2)(1+\tilde{T})}.\end{aligned}\right. \tag{1.2.17}$$

当曲面张力为零时 ($\tilde{T}=0$) 其系数与前一节推出的 DS 方程的系数一致. 这里我们注意到关于 Q 的方程 (或等价地 $\Phi^{(1,0)}$ 的方程) 是椭圆或双曲型取决于 $c_g^2 \lessgtr gh$ (马赫数 $\alpha = 1 - \left(\dfrac{c_g^2}{gh}\right) \gtrless 0$). 对于有限波长引力波, c_g 总是小于 $(gh)^{\frac{1}{2}}$, 因此, Q 满足 Poisson 方程. 曲面张力的影响会增大群速度以至于达到 c_g 可能超过长引力波的速度, 于是 Q 的方程是以

$$\eta = \pm\{(c_g^2/gh) - 1\}^{\frac{1}{2}} + \text{const} \tag{1.2.18}$$

为特征的双曲型方程, 我们注意到 μ, ν_1 总是正的, 从而如果我们将戴维 - 斯特瓦尔松方程统一写为

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}A_t + \sigma A_{xx} + A_{yy} = |A|^2 A + A\phi, \\ &\phi_{xx} + m\phi_{yy} = -2(|A|^2)_{xx}, \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

其中, $\sigma = \pm 1, m = \pm 1$. 则方程按照 (δ, m) 的符号, 包含了以下四种情形:

(1) $(+,+)$: 椭圆 - 椭圆型;

(2) $(+,-)$: 椭圆 - 双曲型, 通常称为 DSI 方程;

(3) $(-,+)$: 双曲 - 椭圆型, 通常称为 DSII 方程;

(4) $(-,-)$: 双曲 - 双曲型.

1.3 平面 Poiseuille 流三维扰动的非线性发展

本节, 我们介绍 Davey, Hocking 和 Stewartson 的工作 (Davey A. 等 1974), 从平面 Poiseuille 流三维扰动的非线性发展推导 DS 方程. 设两个平面相距 $2h$, O 是距离中间的任意一点, $OXYZ$ 为笛卡儿坐标系, 其中 OZ 垂直于平面, OX 是非扰动流方向, hx, hy, hz 是平行于坐标轴的距离, U_0V 是流体速度, 其中 U_0 是非扰动流的最大速度, $V=(u,v,w)$, 于是不可压缩流动的控制方程可表示为

$$\nabla \cdot V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\nabla P + R^{-1}\nabla^2 V, \tag{1.3.1}$$

其中, $R = U_0 h/v$ 是 Reynolds 数, v 是运动速度; P 是非维度压力, 对应的边界条件是: 在 $z = \pm 1$ 时

$$u = v = w = 0. \tag{1.3.2}$$

在非扰动流动情形, 有

$$u = 1 - z^2, \qquad v = w = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -2/R, \tag{1.3.3}$$

它是由一致压力梯度引起的全展开流. 我们假设, 即使流被扰动, 当 $x^2+y^2\to\infty$ 时式 (1.3.3) 也成立. 设 u,v,w 和 P 都由其稳态值施加小扰动, 由线性稳定性理论, 用 $f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x-ct)+\mathrm{i}\beta y}$, 其中 α,β 是实数, 代入式 (1.3.1) 的线性化方程, 仅当 α,β,R 和 c 相关, 才有非平凡解. 对任何固定的 α,β,R, 虽然 c 有无穷多个值, 我们集中注意其虚部极大的 $c=c_r+\mathrm{i}c_i$, 它很可能导致不稳定性, 对这个 c, 存在 R 的临界值 R_c, 使得在 α,β 空间的点 $(\alpha_c,0)$, 对所有的 α,β, 如果 $R<R_c$, 有 $c_i<0$, 和如果 $R=R_c$, 则 $c_i=0$. 如果 $R>R_c$, 存在 α,β 空间的区域, 在此区域中有 $c_i\geqslant 0$. 设在临界点 $R=R_c,\alpha=\alpha_c,\beta=0$, 有 $c=c_{cr}$, 我们定义:

$$\epsilon=(R-R_c)d_{1r},\quad E=\exp\{\mathrm{i}\alpha_c(x-c_{cr}t)\},\quad \tau=\epsilon t,$$

$$\xi=\epsilon^{\frac{1}{2}}(x+\alpha_{1r}t),\qquad \eta=\epsilon^{\frac{1}{2}}y,\tag{1.3.4}$$

然后, 将 u 表示为

$$u=u_0(\xi,\eta,\tau,z;\epsilon)+Eu_1(\xi,\eta,\tau,z;\epsilon)+E^{-1}u_1^*+E^2u_2+E^{-2}u_2^*+\cdots,\tag{1.3.5}$$

其中, $*$ 表示复共轭. 对 v,w,P 作类似的展开, 再将 u_0,u_1,u_2,u_3 表示为

$$\begin{aligned}u_0&=1-z^2+\epsilon u_{02}(\xi,\eta,\tau,z)+\epsilon^{\frac{3}{2}}u_{03}+\cdots,\\u_1&=\epsilon^{\frac{1}{2}}u_{11}(\xi,\eta,\tau,z)+\epsilon u_{12}(\xi,\eta,\tau,z)+\epsilon^{\frac{3}{2}}u_{13}+\cdots,\\u_2&=\epsilon u_{22}(\xi,\eta,\tau,z)+\epsilon^{\frac{3}{2}}u_{23}+\cdots,\\u_3&=\epsilon^{\frac{3}{2}}u_{33}+\cdots\end{aligned}\tag{1.3.6}$$

等, 除了 v_0,w_0 不含有 $1-z^2$, 对 v,w,P 做类似的展开, 而

$$P_0=-2R^{-1}x+c+\epsilon^{\frac{1}{2}}P_{01}+\epsilon P_{02}+\cdots,\tag{1.3.7}$$

将上述展式代入控制方程 (1.3.1), 并令 $\epsilon^{\frac{1}{2}n}E^m(n,m=0,1,2\cdots)$ 各项前的系数为零. 由 $\epsilon^{\frac{1}{2}}E$ 的系数为零, 有

$$u_{11}=A(\xi,\eta,\tau)D\psi_1(z),\qquad v_{11}=0,\qquad w_{11}=-\mathrm{i}\alpha_cA\psi_1(z),\tag{1.3.8}$$

其中, $D=\partial/\partial z$; 而 ψ_1 是归一化使得 $\psi(0)=1$ 的 Orr-Sommerfeld 方程的特征函数

$$\mathcal{L}\psi_1\equiv[(\mathrm{i}/\alpha_cR_c)(D^2-\alpha_c^2)^2+(1-z^2-c_{cr})(D^2-\alpha_c^2)+2]\psi_1=0,\tag{1.3.9}$$

现在, 由非线性稳定性定理我们需要确定振幅函数 A. 由 ϵE 的系数, 我们得到

$$u_{12}=-\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial\xi}D\psi_{10}+A_2D\psi_1,\qquad w_{12}=-\frac{\partial A}{\partial\xi}(\alpha_c\psi_{10}+\psi_1)-\mathrm{i}\alpha_cA_2\psi_1,\tag{1.3.10}$$

其中 $\psi_{10}(z)$ 满足

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\psi_{10} &= -\alpha_c^{-1}[(1-z^2+a_{1r}-4\mathrm{i}\alpha_c R_c^{-1})(D^2-\alpha_c^2)-2\alpha_c^2(1-z^2-c_{cr})+2]\psi_1\\&\equiv -\alpha_c^{-1}\mu\psi_1.\end{aligned}\tag{1.3.11}$$

A_2 是 ξ,η,τ 的另一个函数, 而 a_{1r} 是线性化扰动的复增长率 $-\mathrm{i}\alpha c$ 在临界点附近的展式

$$-\mathrm{i}\alpha c = -\mathrm{i}\alpha_c c_{cr} + \mathrm{i}a_{1r}(\alpha-\alpha_c) - a_2(\alpha-\alpha_c)^2 - b_2\beta^2 + (R-R_c)d_1 + \cdots \tag{1.3.12}$$

式 (1.3.11) 的满足边界条件 $\psi_{10}(\pm 1) = D\psi_{10}(\pm 1) = 0$ 解的存在性由 a_{1r} 的选择所保证, 由于延拓到三维扰动, 也存在速度的 y 分量, 由下式给出:

$$v_{12} = (\partial A/\partial\eta)\chi_1(z), \tag{1.3.13}$$

其中

$$\{D^2-\alpha_c^2-\mathrm{i}\alpha_c R_c(1-z^2-c_{cr})\}(\mathrm{i}\alpha_c\chi_1 - D\psi_1) + 2\mathrm{i}\alpha_c R_c z\psi_1 = 0, \tag{1.3.14}$$

而 $\chi_1(\pm 1) = 0$, 为确定 A 没有必要去计算 χ_1 的显式. 由 ϵE^2 的系数我们得到

$$u_{22} = A^2 D\psi_2, \qquad v_{22} = 0, \qquad w_{22} = -2\mathrm{i}\alpha_c A^2\psi_2, \tag{1.3.15}$$

其中 $\psi_2(z)$ 是 z 的函数.

$\epsilon^{\frac{1}{2}}E^0$ 的系数是

$$\partial P_{10}/\partial z = 0. \tag{1.3.16}$$

而由 ϵE^0 的系数我们得到

$$D^2 u_{02} - R_c\partial P_{01}/\partial\xi = \mathrm{i}\alpha_c R_c|A|^2 D\{\psi_1^* D\psi_1 - \psi_1 D\psi_1^*\}, \tag{1.3.17}$$

$$D^2 v_{02} - R_c\partial P_{01}/\partial\eta = 0. \tag{1.3.18}$$

由连续性方程, 有

$$Dw_{02} = 0, \tag{1.3.19}$$

又, 连续性方程中, $\epsilon^{\frac{3}{2}}E^0$ 的系数是

$$\partial u_{02}/\partial\xi + \partial v_{02}/\partial\eta + Dw_{03} = 0, \tag{1.3.20}$$

应用在 $z=\pm 1$ 上边界条件: $w=0$, 我们得到

$$w_{02} = 0, \qquad \int_{-1}^{1}(\partial u_{02}/\partial\xi + \partial v_{02}/\partial\eta)\mathrm{d}z = 0, \tag{1.3.21}$$

由上述这些方程我们得到

$$u_{02}=-\frac{1}{2}(1-z^2)R_c\partial P_{01}/\partial\xi+|A|^2S(z),\tag{1.3.22}$$

$$v_{02}=-\frac{1}{2}(1-z^2)R_c\partial P_{01}/\partial\eta,\tag{1.3.23}$$

其中

$$S(z)=\mathrm{i}\alpha_cR_c\int_1^z(\psi_1^*D\psi_1-\psi_1D\psi_1^*)\mathrm{d}z\tag{1.3.24}$$

$$\frac{\partial^2P_{01}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2P_{01}}{\partial\eta^2}=\frac{3}{R_c}\frac{\partial|A|^2}{\partial\xi}\int_0^1S(z)\mathrm{d}z.\tag{1.3.25}$$

现在, 可以看出在二维和三维理论之间的差别, 当 A 和 P_{01} 都与 η 无关时, 压力梯度 $\partial P_{01}/\partial\xi$ 和速度分量 u_{02} 都平行于 $|A|^2$, 但是在三维理论中这种简化是不可能的. 为便于在二维和三维理论间比较, 我们记:

$$B(\xi,\eta,\tau)=|A|^2-\frac{1}{3}R_c\left(\int_0^1S(z)\mathrm{d}z\right)^{-1}\frac{\partial P_{01}}{\partial\xi},\tag{1.3.26}$$

从而

$$u_{02}=|A|^2DF(z)+\left(\frac{3}{2}\int_0^1S(z)\mathrm{d}z\right)(1-z^2)B,\tag{1.3.27}$$

其中

$$DF(z)=S(z)-\frac{3}{2}(1-z^2)\int_0^1S(z)\mathrm{d}z,\tag{1.3.28}$$

经过计算得到

$$\frac{\partial^2B}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2B}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}|A|^2,\tag{1.3.29}$$

现在我们可以着手计算 $\epsilon^{\frac{3}{2}}E$ 的系数, 利用式 (1.3.13), 通过消去压力和函数 χ_1, 动量方程和连续性方程中的 x,z 分量可以被简化为 w_{13} 的单个方程

$$\begin{aligned}\mathcal{L}w_{13}=&\frac{\partial A}{\partial\tau}(D^2-\alpha_c^2)\psi_1+\frac{\mathrm{i}\alpha_cA}{d_{1r}R_c}[(1-z^2-c_{cr})(D^2-\alpha_c^2)+2]\psi_1+\frac{\partial A_2}{\partial\xi}\mu\psi_1\\&-\mathrm{i}\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}\left(\mu\psi_{10}+\frac{1}{\alpha_c}\mu\psi_1\right)-\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}[2R_c^{-1}(D^2-3\alpha_c^2)-\mathrm{i}\alpha_c(3-3z^2+2a_{12}-c_{cr})]\psi_1\\&-\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}[2R_c^{-1}(D^2-\alpha_c^2)-\mathrm{i}\alpha_c(1-z^2-c_{cr})]\psi_1-\mathrm{i}\alpha_cA|A|^2[D\psi_2(D^2-\alpha_c^2)\psi_1^*\\&+2\psi_2(D^2-\alpha_c^2)D\psi_1^*-2D\psi_1^*(D^2-4\alpha_c^2)\psi_2\\&-\psi_1^*(D^2-4\alpha_c^2)D\psi_2-DF(D^2-\alpha_c^2)\psi_1+\psi_1D^3F]\end{aligned}$$