中等职业教育规划教材
根据教育部中等职业学校新教学大纲要求编写

数学

（第二册）

中等职业教育规划教材编写组
魏淑丽　主　编
王春霞　陶成君　副主编

中华工商联合出版社
CHINA INDUSTRY&COMMERCE ASSOCIATED PRESS

中等职业教育系列规划教材

数　　学

（第二册）

中等职业教育规划教材编写组

魏淑丽　主编

王春霞　陶成君　副主编

中华工商联合出版社

责任编辑:曹荣
封面设计:陈立明

图书在版编目(CIP)数据

数学.第2册/魏淑丽主编.—北京:中华工商联合出版社,2007.4
ISBN 978-7-80193-544-1

Ⅰ.数… Ⅱ.魏… Ⅲ.数学课—专业学校—教材 Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第038636号

中华工商联合出版社出版、发行
北京东城区东直门外新中街11号
邮编:100027 电话:64153909
网址:www.chgslcbs.cn
北京诚信伟业印刷有限公司
新华书店总经销

787×1092毫米 1/16 印张:14 295千字
2007年4月第1版 2007年4月第1次印刷
ISBN 978-7-80193-544-1/G·175
定价:18.80元

中等职业教育规划教材
出版说明

为了更好地贯彻《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》精神，全面落实《面向21世纪教育振兴行动计划》中提出的职业教育课程改革和教材建设规划，中等职业教育规划教材编写组组织相关力量对实现中等职业教育培养目标、保障重点专业建设的主干课程进行了规划和编写。

中等职业教育规划教材是面向中等职业教育的规范性教材，严格按照国家教育部最新颁发的教学大纲编写，并通过了专家的审定。本套教材深入贯彻素质教育的理念，突出中等职业教育的特点，注重对学生的创新能力和实践能力的培养，在内容编排、例题组织和图示说明等方面努力作出创新亮点，在满足不同学制、不同专业以及不同办学条件教学需求的同时，实现教学效果的最优化。

希望各地、各校在使用本套教材的过程中，认真总结经验，及时提出改善意见和建议，使之不断地得到完善和提高。

中等职业教育规划教材编写组

前　言

本书根据国家教育部2000年颁布的《中等职业学校数学教学大纲(试行)》中的必学部分的向量与复数模块、几何模块、概率与统计初步模块编写。本书可作为各类中等职业学校教材使用,也可供个人自学高中数学使用。

本书的主要任务是使学生在初中数学的基础上,学好从事社会主义现代化建设和继续学习所必需的代数、三角、几何和概率统计的基础知识,进一步培养学生的基本运算能力、基本计算工具使用能力、空间想象能力、数形结合能力、思维能力和简单实际应用能力。通过本课程的学习,提高学生分析问题和解决问题的能力,发展学生的创新意识,进一步培养学生的科学思维方法和辨证唯物主义思想。

本书共分为六章。主要内容包括向量、复数、解析几何、立体几何、排列与组合、概率统计。本书紧扣大纲,内容详尽,多引用典型例证,深入浅出地介绍知识要点。章前列示知识目标和能力目标,以便读者自学。章后含小结与复习,配以适当的阅读材料,增进读者对于全章的理解和领悟。其中大纲的选学内容以★号表示,使得整个教学内容有一定弹性。

考虑到中等职业数学教学的特点,特别是职业学校理论与实践相结合的目标,本书强调基础知识的学习与实际能力的培养,注重提高学生的综合素质。相较而言,本书以通俗易懂的语言,引导读者主动思考,激发读者学习兴趣。在逐步掌握数学知识的同时,有效提高读者的逻辑思维能力与创造力。本书的必学时数为100学时,限定选学时数为40学时。学时建议分配表如下:

学时建议分配表

内　容	学时数	内　容	学时数
第7章　向量	14	第11章　排列与组合	10
第8章　复数	16	第12章　概率统计	16
第9章　解析几何	36	机动	20
第10章　立体几何	28	总计	140

参加本书编写的有王春霞(第7、8、9、10章),陶成君(第11、12章)。本书由魏淑丽担任主编,王春霞、陶成君担任副主编。衷心感谢长期工作在一线的朱木兰、杨克、姜素金老师及刘培、高菲等人,他们对本书的初稿提出了宝贵的意见。本书在编写过程中参阅了大量的相关论著,并吸取了其中的最新研究成果和有益经验,在此向原著者表示衷心的感谢。

由于编者时间仓促,精力有限,书中难免会有缺点和错误,敬请读者批评指正。

编　者

目　　录

第 7 章

向　量

向量是现代数学中的重要工具之一，它在研究三角、几何以及代数等方面都有着重要的应用．特别是对于几何中图形的性质的分析，向量将抽象的平行、垂直等概念用具体的向量计算加以解决，并且在物理实际应用中，向量作为一种有效的分析工具，也得到了广泛的运用．

向量的最基本应用在于描述两地的位置关系，从而进一步拓展至各种标示性的量中，并指导于日常生活的各个方面．例如在水流速度影响的情况下，船以何种路线前进能最快地横渡长江？这其中的水流速度与船的航速就可以用向量来抽象表示，从而做进一步的数学分析求解．

知识目标

1．理解向量的概念，掌握向量的几何表示，了解共线向量的概念．

2．掌握向量的加法与减法，实数与向量的积．

3．了解平面向量的基本定理，掌握平面向量的坐标运算．

4．掌握平面向量的数量积及其几何意义，了解用平面向量的数量积可以处理有关长度、角度和垂直的问题，掌握向量垂直的条件．

5．掌握平面两点间的距离公式，掌握线段的中点坐标公式，并且能熟练运用；理解正弦定理和余弦定理．

能力目标

1．通过向量的基本计算，理解在数量计算中方向的作用．

2．学会数形结合的思想．向量的起源来自于简单的物理模型，体会将实际问题抽象为数学图像模型的方法．

3．熟练掌握向量的几何关系与计算，能够解决实际的几何问题．

7.1 向量的定义

古代的航海家们在茫茫大海之上,要想准确寻找目的地,就必须依靠准确的航海图.而仅在当时简陋的条件下,如何绘制高精度的航海图呢?他们拥有的只有指南针与测量长度的工具,此时如何去描述一个岛屿 A 与另一个岛屿 B 的位置关系呢(图 7.1.1)?

航海家们从数学家的口中知道了确切描述岛屿相对位置的准确方法,即用向量表示.具体而言,就是要用两个量去描述:岛屿 A 到岛屿 B 的角度与距离.我们把岛屿 A 到岛屿 B 的角度称为向量的方向,而岛屿 A 到岛屿 B 的距离称为向量的大小.

7.1.1 向量的定义

现实世界中,采用上述描述方法的例子是有很多的,特别是在物理模型中,如力、速度、加速度等.

我们把既有大小又有方向的量叫做向量,而只有大小没有方向的量则叫做数量.

想一想

你能举出一些类似的向量实例吗?

7.1.2 向量的几何表示

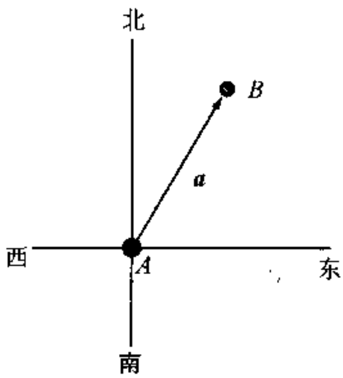

图 7.1.1

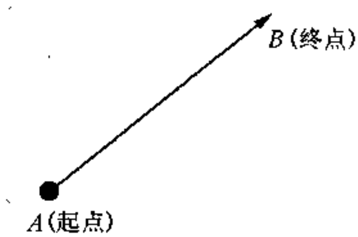

图 7.1.2

向量常用一条有向线段来表示,有向线段的长度表示向量的大小,箭头所指的方向表示向量的方向.向量也可以用字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 等表示,或用表示向量的有向线段的起点和终点字母表示,例如 $\overrightarrow{AB}$.如图 7.1.1 的向量可以记为 $\boldsymbol{a}$ 或者 $\overrightarrow{AB}$.如图 7.1.2,线段 AB 的长度也就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度(或称模),记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

长度等于 1 个单位长度的向量,叫做单位向量.长度为 0 的向量叫做零向量,记作 $\mathbf{0}$,它的方向不确定,可以用起点与终点重合的有向线段 $\overrightarrow{AA}$ 或 $\overrightarrow{BB}$ 表示.

与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等并且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量(或 $\boldsymbol{a}$ 的反向量),记作 $-\boldsymbol{a}$.

例如,向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等且方向相反,所以 $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. 零向量的反向量仍是零向量.

总结:向量 $\overrightarrow{AC}$ 与向量 $\overrightarrow{CA}$ 的关系是大小相等,方向相反.

想一想

温度也分正负,是否是向量呢?

提示

利用字母表示向量时,起点一定要写在终点的前面,而且字母上面的箭头不能缺少.

例 3　如图 7.1.3,请用向量描述三角形 ABC 中点 A 至点 B,点 B 至点 C 的位移(精确到 0.1cm).

(1)点 A 至点 B 的位移记作 $\overrightarrow{AB}$,大小是________.

(2)点 B 至点 C 的位移记作______,大小是________.

解　用直尺测量 AB 和 BC 的长度,然后填空,测量结果为:

(1)点 A 至点 B 的位移 $\overrightarrow{AB}$ 的大小是 2.8cm.

(2)点 B 至点 C 的位移记作 $\overrightarrow{BC}$,大小是 5.0cm.

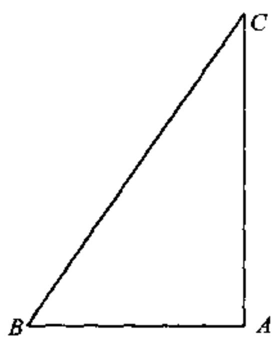

图 7.1.3

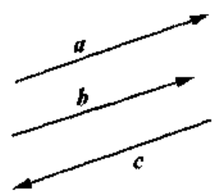

图 7.1.4

7.1.3　相等向量与共线向量

方向相同或相反的非零向量叫做平行向量. 我们规定向量 $\boldsymbol{0}$ 与任一向量平行. 如图7.1.4,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$. 任一组平行向量都可移到同一直线上,因而,平行向量也叫做共线向量.

长度相等且方向相同的向量叫做相等向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 我们规定零向量与零向量相等. 任意两个相等的非零向量,都可用同一条有向线段来表示.

提示 相等的向量并不要求它们的起点相同. 不同位置的向量也可能相等.

例2 如图7.1.5,设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心,分别写出图中与向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OB}$ 相等的向量.

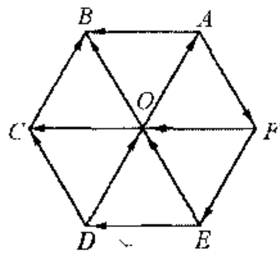

图7.1.5

解 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{DC}$

注意:区别向量的重要一点是方向.

课后练习

习题 A

1. 判断下列结论是否正确.

(1)对于任何一个向量,它的方向都是唯一的.

(2)一个向量与它的起点有关.

(3)坐标轴 x,y 都是向量.

(4)物理中作用力与反作用力是一对相反的向量.

2. 请指出图7.1.6中各向量及它们的长度.

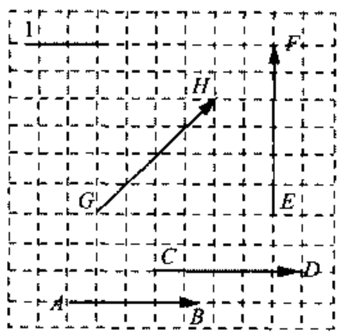

图7.1.6

3. 请指出下面哪些量是向量,哪些是数量:高度、加速度、质量、力、时间、路程、位移.

4. 对于直角$\triangle ABC$, $\angle C=90°$, $AC=BC=3$cm. 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小.

习题 B

1. 一个立方体中有几组相等的向量?(注意考虑方向)

2. 已知四边形 $ABCD$,点 E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点,求证:$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

3. 一个人从 A 地出发,向东走了5公里到 B 地,又向西北方向走了8公里到 C 地,最后向南走了4公里到 D 地. 试选择合适比例,用向量表示这个人的位移.

7.2 向量的线性运算

通过上节的学习,我们学会了用向量表示一些物理量,例如力.在实际的物理问题中,我们常常要处理多个力的情况.那么如何对这些力进行分析呢?物理中已经提到了力的作用效果可以用合力来表示,那么合力与各个分力的关系是什么呢?

我们知道,数是可以进行加减运算的.同样,向量如果可以进行加减运算,那么向量的应用就有更多的实际意义.合力与分力的类似问题自然可以迎刃而解.

7.2.1 向量的加法

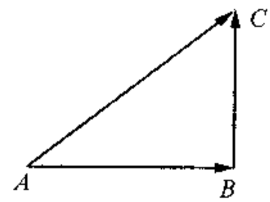

图7.2.1

下面我们先学习向量的加法.如图7.2.1,在平面内任取一点A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{AC}$叫做$a$与$b$的和,记作$a+b$.即

$$a+b=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

求两个向量和的运算,叫做向量的加法.对于零向量与任一向量$\boldsymbol{a}$,有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

例1 如图7.2.2甲,已知向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,求作向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

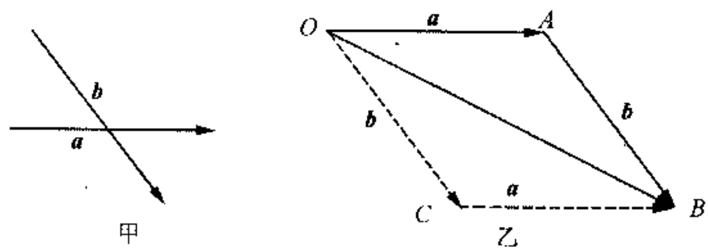

图7.2.2

解 作法:在平面内任取一点O(图7.2.2乙),作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$.则$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

上面$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的结果与$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$是否相同?经过验证,结果相同,即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.如图7.2.2乙中的虚线所示.

想一想

例1是否和物理中的合力与分力的关系相似,那么如何计算多个力的合力?对于两个向量方向相同或相反时,计算向量的加法与数的加法有什么相同之处?

由例1看到,求不共线的两个向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的和,还可以从同一起点O作有向线段$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OC}$分别表示$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,然后以$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OC}$为邻边作平行四边形$OABC$,则有向线段$\overrightarrow{OB}$就表示$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,其中$\overrightarrow{OB}$是对角线,这种求不共线的两个向量的和的方法称为向量加法的平行四边形法则.

例2 如图7.2.3,已知向量 a,b,c,求 $(a+b)+c$ 和 $a+(b+c)$ 的关系.

解 $(a+b)+c=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

所以,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

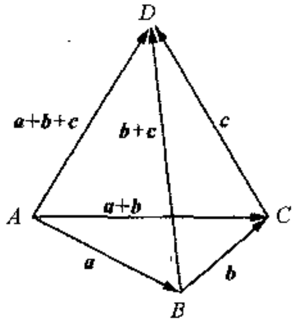

图7.2.3

由例2可知,多个向量的加法运算可以按照任意的次序、任意的组合来进行.

由例1、例2可知,向量的加法满足下列运算法则:

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

例3 如图7.2.4,在正六边形中,若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 将 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OF}$ 表示出来.

解 设正六边形中心为 P,且由六边形对称性可知:

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE})+\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

由对称性得 $\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

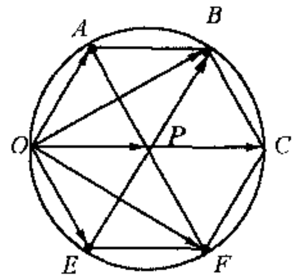

图7.2.4

7.2.2 向量的减法

任一向量与它相反向量的和是零向量,即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量,叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

求两个向量差的运算,叫做向量的减法.

例4 如图7.2.5甲,已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

解 作法:在平面内取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量. 如图7.2.5乙所示.

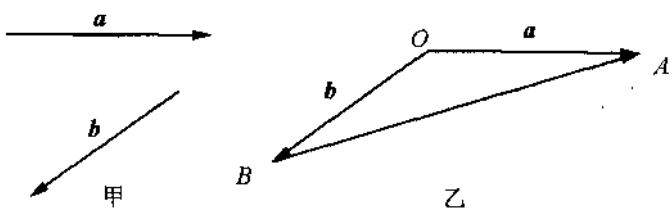

图7.2.5

提示 **注意差向量的“箭头”指向被减向量.**

例 5　试用向量方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

如图 7.2.6，已知点 O 等分 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明　由已知 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$，

又已知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$，

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$，

所以，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，即 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 平行且相等.

因此，四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

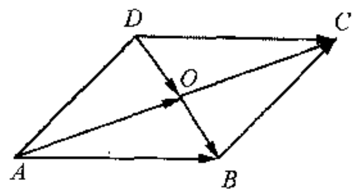

图 7.2.6

7.2.3　实数与向量的乘积

向量是一种数学量，它既然有与数量类似的加减运算，是否又有与之类似的数乘运算呢？已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，如图 7.2.7，试作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 和 $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$.

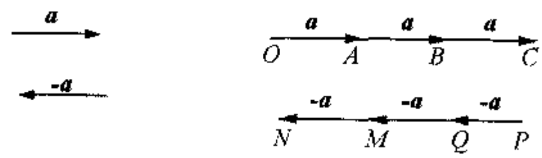

图 7.2.7

把 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 记作 $3\boldsymbol{a}$，即 $\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{a}$. 显然 $3\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，$3\boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 3 倍，即 $|3\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}|$. 同样我们可以分析 $\overrightarrow{PN}=-3\boldsymbol{a}$.

一般地，我们定义：实数 k 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，记作：$k\boldsymbol{a}$，且长度与方向满足：

(1) $|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|$；

(2) $k>0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；$k<0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；$k=0$ 时，$k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

结合数与数的运算法则以及上面的定义，对于数 k，c，以及向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，它们满足如下规律：

结合律：　$k(c\boldsymbol{a})=(kc)\boldsymbol{a}$；

第一分配律：　$(k+c)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{a}$；

第二分配律：　$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

结合向量的减法运算，可以进一步得到：

$$(-k)\boldsymbol{a}=-(k\boldsymbol{a});$$

$$k(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}.$$

想一想

数的运算法则还包括除法、乘方，你能找到对应的数与向量的运算规律吗？

提示　线性运算是指两个向量之间的加减运算以及向量与数之间的数乘运算，但不包括向量与向量之间的乘积运算.

例6　计算：

(1)$(-4)\times 2\boldsymbol{a}$；

(2)$3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}$；

(3)$(4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})-(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

解　(1)原式$=(-4\times 2)\boldsymbol{a}=-8\boldsymbol{a}$；

(2)原式$=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{b}$；

(3)原式$=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

$=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$.

若有向量$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{b}$，实数$k$，使$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$，则由实数向量积的定义知，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为共线向量. 若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线($\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$)且$|\boldsymbol{b}|:|\boldsymbol{a}|=k$，则当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向时，$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向时，$\boldsymbol{b}=-k\boldsymbol{a}$. 从而得到向量$\boldsymbol{b}$与非零向量$\boldsymbol{a}$共线的充要条件是：有且只有一个非零实数$k$，使$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

想一想

什么时候k取正值，什么时候k取负值？

*7.2.4　平面向量基本定理

根据我们已经掌握的向量运算知识，是不是每一个向量都可以分解成两个不共线的向量？且分解是唯一？

平面向量基本定理如下：　如果$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量，有且只有一对实数λ_1，λ_2，使得

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$$

这是向量分解的一个基本定理，就如同平面上点对应于唯一的坐标(x,y).

如果$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$刚好取为x，y轴的单位向量，则实数λ_1，λ_2就恰好等于向量顶点的坐标.

想一想

为什么要求两个向量不共线才能满足唯一分解？