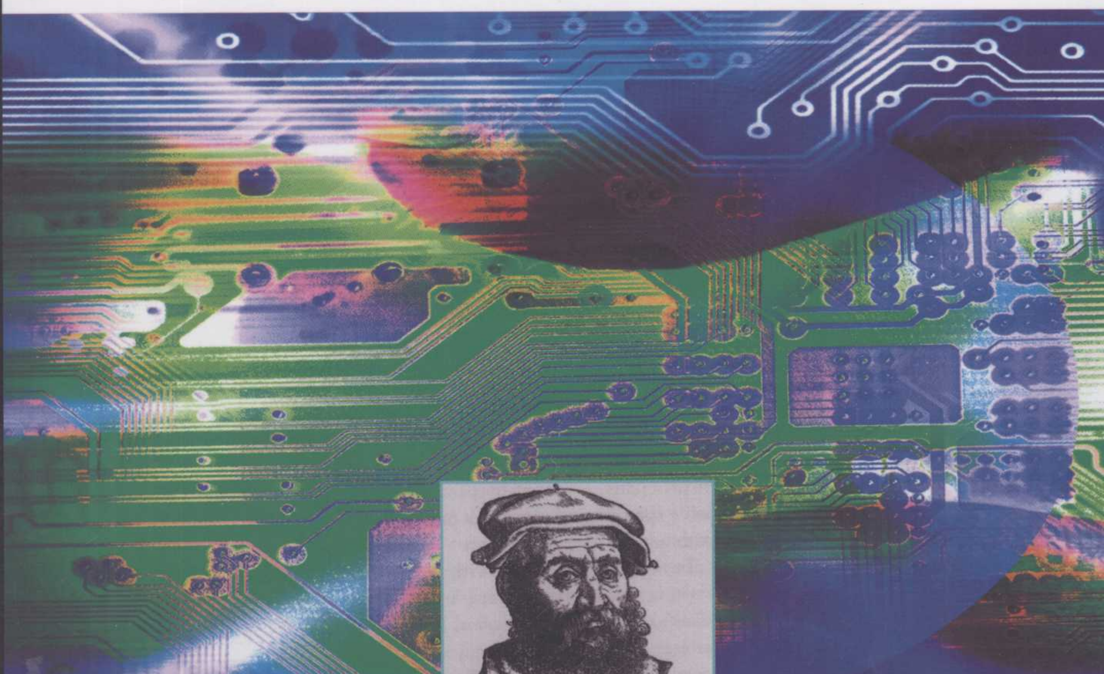
数学之旅

THE HISTORY OF MATHEMATICS

代数学

Algebra



集合、符号和思维的语言

SETS, SYMBOLS & THE LANGUAGE OF THOUGHT

〔美〕约翰·塔巴克 著

John Tabak

商务印书馆

数学之旅

代　数　学

——集合、符号和思维的语言

〔美〕约翰·塔巴克　著

邓明立　胡俊美　译

胡作玄　校

商　务　印　书　馆

2007年·北京

图书在版编目(CIP)数据

代数学/〔美〕塔巴克著;邓明立,胡俊美译．—北京:
商务印书馆,2007
(数学之旅)
ISBN 978-7-100-05386-0

Ⅰ.代… Ⅱ.①塔…②邓…③胡… Ⅲ.①代数—
数学理论 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 023497 号

数学之旅
代　数　学
——集合、符号和思维的语言
〔美〕约翰·塔巴克　著
邓明立　胡俊美　译
胡作玄　校

商　务　印　书　馆　出　版
(北京王府井大街36号　邮政编码 100710)
商　务　印　书　馆　发　行
北　京　民　族　印　刷　厂　印　刷
ISBN　978-7-100-05386-0

2007年7月第1版　　　　开本 850×1168 1/32
2007年7月北京第1次印刷　　印张 7 3/8
印数 5 000 册
定价:15.00 元

数学之旅的意义

数学有着几千年的历史。数学的历史最早开始于人类要用星星预测未来，后来有了古希腊人到埃及用几何方法测量金字塔的高度，再以后有了哥白尼、伽利略、牛顿、达·芬奇……一个又一个响亮的名字，他们大胆的设想、计算、实验，铺就了一条数学之路。这条路的近端是我们面前的计算机等各种数字化的现代科学。正是这条路，见证了人类文明发展的历程，也把由数学改变的物质生活带到了人间。

我们出版这套“数学之旅”不仅为了让大家了解数学的形成和发展，还想告诉大家，数学在形成和发展的过程中经历了什么——不仅在于如何发现问题，更在于怎样提出问题；不仅在于怎样解释问题，更在于怎样解决问题。就这样，数学发展了。由于数学的精确性，所有的自然科学学科几乎都与数学有关联。数学成了各个自然科学研究学科的主要工具之一。之所以这样说，是因为数学不仅可以作为计算的准则，而且它更能体现定性和定量的转化，也就更加便于传授和继续研究。很多自然科学的问题就在科学家的数学计算中解决了。

“数学之旅”不是教科书，也不是教辅，它只是为在新时代中对数学和自然科学历史感兴趣的人提供一些阅读生活。不过，从中学到一些如何观察现象和提出问题的方法，了解教科书中那些定

理的形成，从而把自己投入到人类文明的进程中去，或许可以成为阅读者意想不到的收获吧。

商务印书馆编辑部

序

胡作玄

数学，也许还有古典音乐，是人类精神的最高创造。它完全从头脑中产生，就像雅典娜从宙斯的前额中跳出来一样。作为人类思想的最高境界，数学往往带有它那种特有的灵性和神秘，远离芸芸众生，可是对于少数人，数学却能像音乐一样，给他们以巨大的心灵震撼。请看一下《罗素自传》的第一卷："11 岁时，我开始学习欧几里得几何学，哥哥做我的老师。这是我生活中的一件大事，就像初恋一样令人陶醉。我从来没有想象到世界上还有如此美妙的东西。"无独有偶，爱因斯坦在他的"自述"中也谈到："12 岁时，我经历了另一种性质完全不同的惊奇：这是在一个学年开始时，当我得到一本关于欧几里得平面几何的小书时所经历的。这本书里有许多断言，比如，三角形的三条高线交于一点，它们本身虽然并不是显而易见的，却可以很可靠地加以证明，以致任何怀疑似乎都不可能。这种明晰性和可靠性给我造成了一种难以形容的印象。"当然，他们两位所说的还是 2300 年前的欧几里得，而到 21 世纪我们所有的数学瑰宝就更加光彩夺目，远远超出人们的想象。

虽说数学大厦高耸入云，它却不是建在天上，只是少数神仙的游乐场。它植根于地下，也朦胧地出现在每个人的心中。这是因

为数学不仅有精神天父的基因,也有物质地母的基因。这决定数学从一开始就不可避免地是一种实用知识,它们实在太俗了,以至于某些自以为有高贵血统的人拼命要掩盖其卑贱的出身,就像概率论学者不爱提它来自赌场的问题。计量、商贸、会计、人口普查是最早的应用数学,现在依然如此。尽管它们早已被排除在数学之外,可是正是这些活动把数学与日常生活联系在一起,也正因为如此,基础数学教育应运而生,至今仍是兴旺发达的事业。说到这里,我们不能不为中国古代的数学和数学教育而自豪,早在孔夫子之前,中国(至少在齐国),九九表已经相当普及,可是两千年后,意大利的商人子弟在家乡只能学会加法,而要学乘法就得进城请教专家、大师了。西方的基础教育有 3R(Reading, Writing, Arithmetic)的说法,简言之就是读、写、算,这说明在把文盲教育成识字的人的同时,还要使他们不致维持"数盲"的状态。其实,对于绝大多数人来说,这已经足够了,哪怕是现在的"信息时代"、"数字化时代"。

奇怪的是,虽然人们并不太需要太多的数学,数学教育家却结结实实地灌输给学生大量的数学。如果你小学毕业,6 年数学都是主课。如果你完成义务教育,那就得念 9 年数学。高中 3 年的数学更是难得要命,这还没有算上微积分。即便中学不学微积分,上大学许多人还是逃不掉,不仅学理工的要念微积分,学经济、金融、管理的也要念。学文的虽然可逃此一劫,可老托尔斯泰的《战争与和平》的最后,就有微积分的论述,而且颇为深刻。马克思、恩格斯、列宁也懂微积分。这么说,难道一个人非得念十好几年的数学吗? 更糟的是,正课之余许多学生还得为"奥数"拼搏。这些题之偏之难连国际著名的数学大师陈省身都不一定做得出来。费了半天劲,除了文凭和分数之外,究竟有什么收获呢?

把大量数学教给青少年也许并不是那么不合理。相反,从古到今,数学一直受到重视。柏拉图的学园禁止不懂几何学的人入内。按照他的说法,不会几何学就不会正确的思考,而不会正确思考问题的人不过是行尸走肉。这就形成后来学习没用的数学的辩护词,你学的数学可能不直接有用,但它是训练头脑的体操。不过这个体操对许多学生还是太难了。那时教材也就是欧几里得的《几何原本》。许多学生学到第五个命题"等腰三角形两底角相等"就过不去了,于是这个命题被称为"驴桥",也就是笨人难过的桥。不过,就算勉强过了,是否能变聪明也真的很难说。如果说,以前多学数学还无所谓,那么,17 世纪末近代科学的产生的确充分证明数学的威力。牛顿无愧是有史以来最伟大的科学家,他一手建立牛顿力学,另一手建立微积分,正是他在三百多年前把科学奉献给文明社会。18 世纪美国大诗人蒲柏这样赞美:

自然及其规律浸没在黑暗中,
上帝说,让牛顿诞生,
于是,世界大放光明。

正是牛顿使科学和基于科学的技术推动了历史,使它变成须臾不可离的东西。同时,他也给后人带来不少麻烦。虽然你可以"师夷人之长技以制夷",可是,那永远走不远,因为许多技术建立在科学基础之上,不学科学难对技术有重大改进,而学科学又不能不学一整套数学,其中微积分只不过是基础的基础。而学数学又与学自然科学不同,总要从基础学起。要想学微积分,首先要把算术、代数、几何、三角、解析几何学好,学计算机又要学离散数学,学经济和金融又要学概率、统计等等。其实这些说到底都是二三百年前的数学了,不过,让这些功课都进入中学的数学课,对于多数人来

说，还真有些吃不消。

这就是为什么数学成为现在压在学生头上的两座大山之一（另一座是英语）。多学数学没有坏处，问题是花了这么大的力气，究竟收获几何？真是可怜得很。多数人根本用不上他们所学的知识，也没有掌握数学的思想方法，在理解新的数学时仍然感到十分困难。而更糟的是，许多学生失去学习数学的兴趣。如果一个人觉得数学很重要，只是被动地硬着头皮去学，肯定是事倍功半；可是，如果主动地、津津有味地学，也许会事半功倍。有没有既能培养数学兴趣，同时又能提高对数学理解力的道路呢？有！那就是学点数学史。

数学史所能告诉读者的信息，大部分是其他数学书一般根本没有的，甚至根本不具备的。一般数学书一上来就是定义、定理、证明，它们论述得非常严格，但是读者一般感觉就是丈二和尚摸不着头脑。数学讨论的许多抽象概念，最难掌握的是研究的动机，也就是引入这些概念究竟干什么，而这只能通过历史才能看到它的来龙去脉。许多数学理论都是通过解决一个理论问题或一个实际问题在历史长河中慢慢形成的。古希腊的三大几何问题经过两千多年才在 19 世纪得到完满解决，并且形成伽罗瓦理论。历史的流变总是帮助读者认识到问题的难点以及数学上的伟大突破，可是教科书则很少告诉你，什么是重要的，什么是不重要的。只有懂得这些，才能说是懂得数学。一句话，数学史绝对有助于理解抽象难懂的数学。

其次，数学史不是拘泥于狭窄的学科领域，而是在更大的文化背景之下看数学的发展。这反映出数学与社会是紧密联系在一起的，正因为如此，数学在各个领域中的应用也就是顺理成章的事。

文艺复兴的巨匠们的绘画之所以栩栩如生,正是由于他们掌握了透视的基本方法,这导致射影几何学的诞生。大航海时代推动了地图(海图)绘制技术的发展,它反过来也推动了人们了解曲面的几何学。同样,工程画也成为工程技术人员的通用语言。随着客观世界的不确定性的大量出现,概率和统计也应运而生。尽管概率论有着并不光彩的出身,但赌徒的问题毕竟使数学家建立起系统的理论,而且有越来越多的应用。说到底,物理科学是产生数学与应用数学最重要的领域,这从历史上也可以体会到。我们现在司空见惯的事物,例如无线电波,都是解微分方程的产物,这些结果是如此深刻,超出一般人的理解,其原因就是它们是巨人的劳作,而这些巨人又是站在巨人的肩膀上。

数学的实质在于有一套提出问题和解决问题的普遍理论及方法。数学家人数现在不能说少,但做出巨大贡献的天才也不算太多。数学史与通史一样,首先推崇英雄,他们少说有二三十位,多说有四五十位,学数学史就是要从他们的身上学点东西。

塔巴克的一套五本数学史,最为适合有一般数学知识的读者,它内容丰富、行文流畅、通俗易懂、生动有趣,如果能够好好看看,对数学的理解必定会大有提高,而这种收益是读多少教材、教辅,做多少题也达不到的。

目　　录

第三篇　英文导游词的评析

引言:代数学——一门语言

代数学[名词]

1.代数学是对算术的推广,它根据算术法则把一些表示数的字母结合起来。

2.代数学是有关数学或逻辑学的任一体系或分支,它研究的是抽象实体(如复数、矩阵、集合、向量、群、环或域)以符号形式进行运算——通常类似于算术运算——之后的性质和关系。

(By permission. From *Merriam-Webster's Collegiate Dictionary*, 10th ed. © Springfield, Mass: Merriam-Webster, 2002)

代数学是最古老的数学分支之一,它几乎和人类的文明史一样悠久,甚至更为久远。著名的数学史家范·德·瓦尔登(B. L. van der Waerden)认为,在美索不达米亚(Mesopotamia)、埃及、中国以及印度的古代文明之前,就存在着一种文明,这种文明是大部分早期数学的源泉。他的观点基于两个事实:第一,遍布在不同地区的文明都存在几类共同的、得到正确解决的问题;第二,它们还有着一个共同的、尚未正确解决的重要问题。虽然目前我们还没有足够的证据证实他的观点,然而可以确信:早在大约四千年以前,美索

不达米亚人就使用代数学了。在埃及的草纸书、中国的纸书和美索不达米亚的泥板文书中,我们都能找到一些非常类似的问题以及它们的代数解法。无疑,代数学是随着这些早期文明的产生而产生的,它是最早的、有组织的智力活动之一。代数学和美术、音乐以及宗教一样,也是一项基本的、"自然的"人类活动。

任何数学分支都不像代数学变化得那样大。例如,与代数学几乎一样古老的几何学,尽管几千年来已经发生很大变化,但是我们仍能感觉到它的几何学气息,因为许多几何学仍与曲线、曲面以及形状有关。大量关于几何学的现代著作和论文中仍然包含着图形,而且与古代文明中的一样,现代几何学中对图形的研究仍然离不开直觉和经验。要说古希腊几何学家——当时最优秀的数学家——能够理解现代几何学家的思想与方法,那几乎不可能,毕竟几何学历经几千年已经发生了很大变化。然而,那些古希腊人至少还是会认出现代几何学仍是一种几何学。

对代数学而言,我们就不能这么说,因为它的内容已经完全改变了。例如,四千年以前,美索不达米亚的数学家们就试图解决这样的问题:

已知一块矩形土地的面积和周长,求它的边长。

这类问题看起来很实用,其实不然。它们虽然只涉及一块土地,却相当抽象,几乎没有任何实用价值,如果事先不知道土地的边长,那么人们到底有没有可能知道面积和周长呢?我们由此可以看出:在早期阶段代数学就有了抽象的趋势,但是那种抽象与现代代数学中的并不相同。现在,数学家们想知道代数学是如何"发挥作

用”的,其目标是要弄明白代数学体系的逻辑结构。在上个世纪对代数学的研究过程中,他们花费了大量时间去寻找这些逻辑结构。今天,从事代数学研究的数学家们往往把注意力放在集合的数学结构上,他们为这些集合定义了一种或多种有些类似于加法和乘法的抽象运算。

为了更好地说明现代代数学与古代代数学之间的差别,我们简要地考察一下现代代数学的一个非常重要的分支——群论,它研究的对象是数学中的群。粗略地讲,“群”就是赋予了一种运算的对象的集合,该运算与通常的乘法有点儿类似。关于一种特殊的群或一类群的数学性质的研究,与前面求解矩形土地的面积相比有很大差别。其中最明显的是:群论学家能够在不借助任何非数学对象——比如,一块土地或者一个数集——的情况下研究群。群论研究的仅仅是(数学上的)群,可以说是一门只考虑内在问题的学科。作为与土地问题的对比,我们在这里要谈及一个关于有限群的著名命题(有限群是只含有限多个元素的群):

> 令字母 G 表示一个有限群,N 表示 G 中元素的个数,p 表示一个素数。若 p 整除 N,则 G 中存在一个阶为 p 的元素。

可以看到,这个命题比矩形土地的问题要抽象得多,法国数学家柯西(Augustin-Louis Cauchy,1789—1857 年)首先给出了它的证明。比起许多受过良好教育的外行来,数学家们也说不清楚该命题的含义,或者根本就不知道它是否具有含义。

群论已经成为现代数学研究中最重要的一个分支。像现在的大多数人一样,假设古代数学家要想弄明白群论与他们那时的代