普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学分析

第三版 下册

复旦大学数学系
欧阳光中 朱学炎 金福临 陈传璋 编

数学分析的重要组成部分是微积分。17世纪下半叶，牛顿和莱布尼茨在前人探讨的基础上，分别在研究物理学和几何学的过程中建立了微积分，并立即被当时物理学、力学、天文学、工程学等大量应用；19世纪，柯西和魏尔斯特拉斯等建立了极限理论，使数学分析有了严格的理论基础。至今数学分析已被广泛地应用于许多领域……

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

数学分析

第三版

下册

复旦大学数学系 欧阳光中 朱学炎 金福临 陈传璋 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析.下册/欧阳光中等编.—3版.—北京：
高等教育出版社,2007.4
ISBN 978-7-04-020743-9

Ⅰ.数… Ⅱ.欧… Ⅲ.数学分析-高等学校-
教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第024633号

策划编辑 李蕊 **责任编辑** 蒋青 **封面设计** 张申申
责任绘图 黄建英 **版式设计** 王艳红 **责任校对** 杨凤玲
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	山东鸿杰印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	1978年5月第1版
开　　本	850×1168 1/32		2007年4月第3版
印　　张	13.25	**印　　次**	2007年4月第1次印刷
字　　数	340 000	**定　　价**	18.30元

物料号 20743-00

郑 重 声 明

内 容 提 要

本书在 1983 年出版的第二版的基础上做了全面修订。修订的重点是概念的叙述和定理的论证以及某些章节内部结构的调整，同时，所有章节在文字上都重新梳理了一遍。

本书分上下两册，上册内容为极限初论、极限续论、单变量微分学、单变量积分学；下册内容为数项级数和反常积分、函数项级数、多元函数的极限论、多变量微分学、含参变量的积分和反常积分、多变量积分学。

本书可作为一般院校数学类专业的教材，也可作为工科院校以及经济管理类院系中数学要求较高的专业的数学教材。

目　　录

第三篇　级　　数

第一部分　数项级数和反常积分

注　带有 * 号的部分,可视教学需要进行取舍.

第二部分　函数项级数

第四篇 多变量微积分学

第一部分 多元函数的极限论

第二部分 多变量微分学

第三部分 含参变量的积分和反常积分

第四部分 多变量积分学

第三篇

级　　数

第一部分

数项级数和反常积分

第九章

数项级数

§1 预备知识:上极限和下极限

我们先来叙述本篇的一个预备知识,即数列的上极限和下极限. 就其内容来说,是属于极限论的范围.

对于一个有界数列$\{a_n\}$,去掉它的最初k项以后,剩下来的仍旧是一个有界数列,记这个数列的上确界为β_k,下确界为α_k,亦即

$$\beta_k = \sup_{n>k}\{a_n\} = \sup\{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \cdots\},$$

$$\alpha_k = \inf_{n>k}\{a_n\} = \inf\{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \cdots\},$$

可见$\alpha_k \leqslant \beta_k$. 令$k=1,2,3,\cdots$,于是得到一列$\{\beta_k\}$和一列$\{\alpha_k\}$. 显然数列$\{\beta_k\}$是单调减少的,$\{\alpha_k\}$是单调增加的,所以这两个数列的极限都存在. 我们称$\{\beta_k\}$的极限是$\{a_n\}$的上极限,设它是H. $\{\alpha_k\}$的极限是$\{a_n\}$的下极限,设它是h. 并分别将上极限和下极限记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. 也就是

$$H = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n>k}\{a_n\} = \lim_{k\to\infty} \beta_k,$$

$$h = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n>k}\{a_n\} = \lim_{k\to\infty} \alpha_k,$$

由于$\alpha_k \leqslant \beta_k$,得:$h \leqslant H$.

如果数列$\{a_n\}$无上界,我们就说$H = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = +\infty$,如果数列

$\{a_n\}$无下界，就说 $h=\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

下面给出上极限和下极限的重要性质.

定理1 设 $H=\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$，则

(i) 当 H 为有限时，对于 H 的任何 ε 邻域 $(H-\varepsilon,H+\varepsilon)$，在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项属于这个邻域，而在 $(H+\varepsilon,+\infty)$ 中最多只有有限多个项（包括一项也没有）（图9-1）；

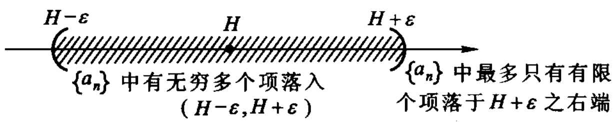

图 9-1

(ii) 当 $H=+\infty$ 时，对任何数 $N>0$，在 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项大于 N；

(iii) 当 $H=-\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 以 $-\infty$ 为极限.

证明 (i) 当 $-\infty<H<+\infty$ 时，假设存在某一正数 ε_0，使得在 $\{a_n\}$ 中只有有限多个项大于 $H-\varepsilon_0$，那么必存在 n_0，当 $n>n_0$ 时，一切 a_n 皆有 $a_n\leqslant H-\varepsilon_0$. 于是上确界

$$\beta_n=\sup\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}\leqslant H-\varepsilon_0\quad(n>n_0),$$

因此
$$H=\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n\leqslant H-\varepsilon_0,$$

这与定理的假设矛盾，这就证明了对任何 $\varepsilon>0$，在 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项大于$H-\varepsilon$.

再来证明，在 $\{a_n\}$ 中最多只有有限多个项大于 $H+\varepsilon$. 因为，由于 $\lim_{n\to\infty}\beta_n=H$，故存在 N，当 $n>N$ 时有 $\beta_n<H+\varepsilon$，而 β_n 又是 $\{a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3},\cdots\}$ 的上确界，所以当 $n>N$ 时，对一切正整数 k 成立 $a_{n+k}\leqslant\beta_n<H+\varepsilon$，这样就证明了大于 $H+\varepsilon$ 的 a_n 只可能有有限多个（包括一个也没有）.

(ii) 当 $H=+\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 无上界，由此便获得所要的结论.

(iii) 当 $H=-\infty$ 时,对任何 $G>0$,存在 n_0,当 $n>n_0$ 时

$$a_{n+1}\leqslant\beta_n<-G,$$

这表明 $\{a_n\}$ 的极限为 $-\infty$.

到此定理全部证毕.

定理 2 设 $h=\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n$,则

(i) 当 h 为有限时,对 h 的任何 ε 邻域 $(h-\varepsilon,h+\varepsilon)$,在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项属于这个邻域,而最多只有有限多个小于 $h-\varepsilon$(包括一项也没有);

(ii) 当 $h=-\infty$ 时,对任何数 $N>0$,在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项小于 $-N$;

(iii) 当 $h=+\infty$ 时,数列 $\{a_n\}$ 的极限为 $+\infty$.

证明与定理 1 完全相仿.

定理 3 设 H 为 $\{a_n\}$ 的上极限,那么,在 $\{a_n\}$ 中必存在一个子列,其极限为 H,并且 H 是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最大值. 设 h 为 $\{a_n\}$ 的下极限,那么,在 $\{a_n\}$ 中必存在一个子列,其极限为 h,并且 h 是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最小值.

证明 仅以上极限 H 来证明如下. 分三种情形来考察:

(i) $-\infty<H<+\infty$,由定理 1 知道,必有一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 H. 此外,对任意 $\varepsilon>0$,在 $\{a_n\}$ 中只可能有有限多个项大于 $H+\varepsilon$,这就表明所有收敛子列的极限绝不会大于 $H+\varepsilon$,再由 ε 的任意性,便得到所有收敛子列的极限必不大于 H.

(ii) 当 $H=+\infty$ 时,按定理 1,存在子列 $a_{n_k}\to+\infty$,而其他一切收敛子列的极限当然不会大于 $+\infty$.

(iii) 当 $H=-\infty$ 时,此时 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$,故数列 $\{a_n\}$ 的一切子列都以 $-\infty$ 为极限.

这样便证明了定理.

这一定理告诉我们,在一个数列 $\{a_n\}$ 中,它的所有收敛子列