



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

欧阳光中  
朱学炎  
金福临  
复旦大学数学系  
陈传璋 编

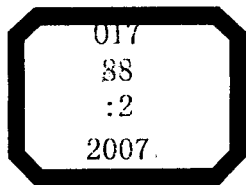
# 分析数学

第三版下册

数学分析的重要组成部分是微积分。17世纪下半叶，牛顿和莱布尼茨在前人探讨的基础上，分别在研究物理学和几何学的过程中建立了微积分，并立即被当时物理学、力学、天文学、工程学等大量应用；19世纪，柯西和魏尔斯特拉斯等建立了极限理论，使数学分析有了严格的理论基础。至今数学分析已被广泛地应用于许多领域……



高等教育出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 数 学 分 析

第 三 版

下 册

复旦大学数学系 欧阳光中 朱学炎 编  
金福临 陈传璋

高等教育出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 下册/欧阳光中等编. —3版. —北京:  
高等教育出版社, 2007. 4

ISBN 978-7-04-020743-9

I. 数… II. 欧… III. 数学分析-高等学校-  
教材 IV. O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第024633号

策划编辑 李蕊 责任编辑 蒋青 封面设计 张申申  
责任绘图 黄建英 版式设计 王艳红 责任校对 杨凤玲  
责任印制 朱学忠

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
		网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
印 刷	山东鸿杰印务有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
		版 次	1978年5月第1版
开 本	850×1168 1/32		2007年4月第3版
印 张	13.25	印 次	2007年4月第1次印刷
字 数	340 000	定 价	18.30元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 20743-00

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话：**(010) 58581897/58581896/58581879

**传 真：**(010) 82086060

**E - mail：**dd@hep.com.cn

**通信地址：**北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

**邮 编：**100011

**购书请拨打电话：**(010)58581118

## 内 容 提 要

本书在1983年出版的第二版的基础上做了全面修订。修订的重点是概念的叙述和定理的论证以及某些章节内部结构的调整,同时,所有章节在文字上都重新梳理了一遍。

本书分上下两册,上册内容为极限初论、极限续论、单变量微分学、单变量积分学;下册内容为数项级数和反常积分、函数项级数、多元函数的极限论、多变量微分学、含参变量的积分和反常积分、多变量积分学。

本书可作为一般院校数学类专业的教材,也可作为工科院校以及经济管理类院系中数学要求较高的专业的数学教材。

# 目 录

## 第三篇 级 数

### 第一部分 数项级数和反常积分

第九章 数项级数 .....	3
§ 1 预备知识:上极限和下极限 .....	3
习题 .....	6
§ 2 级数的收敛性及其基本性质 .....	7
习题 .....	14
§ 3 正项级数 .....	15
习题 .....	23
§ 4 任意项级数 .....	24
一、绝对收敛和条件收敛 .....	24
二、交错级数 .....	26
三、阿贝尔( Abel)判别法和狄利克雷判别法 .....	29
习题 .....	34
§ 5 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质 .....	35
习题 .....	43
* § 6 无穷乘积 .....	43
习题 .....	49

注 带有 \* 号的部分,可视教学需要进行取舍.

<b>第十章 反常积分</b> .....	50
§ 1 无穷限的反常积分 .....	50
一、无穷限反常积分的概念 .....	50
二、无穷限反常积分和数项级数的关系 .....	55
三、无穷限反常积分的收敛性判别法 .....	56
四、阿贝尔判别法和狄利克雷判别法 .....	58
习题 .....	64
§ 2 无界函数的反常积分 .....	65
一、无界函数反常积分的概念,柯西判别法 .....	65
二、阿贝尔判别法和狄利克雷判别法 .....	69
三、反常积分的主值 .....	70
习题 .....	70

## 第二部分 函数项级数

<b>第十一章 函数项级数、幂级数</b> .....	75
§ 1 函数项级数的一致收敛 .....	75
一、函数项级数的概念 .....	75
二、一致收敛的定义 .....	76
三、一致收敛级数的性质 .....	82
四、一致收敛级数的判别法 .....	85
习题 .....	88
§ 2 幂级数 .....	90
一、收敛半径 .....	90
二、幂级数的性质 .....	93
三、函数的幂级数展开 .....	95
习题 .....	102
§ 3 逼近定理 .....	104
习题 .....	105
<b>第十二章 傅里叶级数和傅里叶变换</b> .....	106
§ 1 函数的傅里叶级数展开 .....	106
一、傅里叶级数的引进 .....	106

二、三角函数系的正交性 .....	107
三、傅里叶系数 .....	108
四、收敛判别法 .....	109
五、傅里叶级数的复数形式 .....	115
六、收敛判别法的证明 .....	116
七、傅里叶级数的性质 .....	125
习题 .....	126
§ 2 傅里叶变换 .....	128
一、傅里叶变换的概念 .....	128
二、傅里叶变换的一些性质 .....	132
习题 .....	133

## 第四篇 多变量微积分学

### 第一部分 多元函数的极限论

第十三章 多元函数的极限与连续 .....	137
§ 1 平面点集 .....	137
一、邻域、点列的极限 .....	137
二、开集、闭集、区域 .....	138
三、平面点集的几个基本定理 .....	140
习题 .....	142
§ 2 多元函数的极限和连续性 .....	143
一、多元函数的概念 .....	143
二、二元函数的极限 .....	144
三、二元函数的连续性 .....	147
四、有界闭区域上连续函数的性质 .....	148
五、二重极限和二次极限 .....	150
习题 .....	152

### 第二部分 多变量微分学

第十四章 偏导数和全微分 .....	157
--------------------	-----



§1 偏导数和全微分的概念	157
一、偏导数的定义	157
二、全微分的定义	160
三、高阶偏导数与高阶全微分	163
习题	166
§2 复合函数偏导数的链式法则	168
习题	173
§3 由方程(组)所确定的函数的求导法	174
一、一个方程 $F(x, y, z) = 0$ 的情形	175
二、方程组的情形	177
习题	181
§4 空间曲线的切线与法平面	183
习题	187
§5 曲面的切平面与法线	187
习题	190
§6 方向导数和梯度	191
一、方向导数	191
二、梯度	194
习题	198
§7 泰勒公式	199
习题	201
<b>第十五章 极值和条件极值</b>	<b>202</b>
§1 极值和最小二乘法	202
一、极值	202
二、最小二乘法	208
习题	212
§2 条件极值	212
习题	219
<b>第十六章 隐函数存在定理、函数相关</b>	<b>221</b>
§1 隐函数存在定理	221
一、 $F(x, y) = 0$ 情形	221
二、多变量情形	227

三、方程组情形 .....	228
习题 .....	231
§2 函数行列式的性质、函数相关 .....	232
一、函数行列式的性质 .....	232
二、函数相关 .....	235
习题 .....	240

### 第三部分 含参变量的积分和反常积分

第十七章 含参变量的积分 .....	243
习题 .....	249
第十八章 含参变量的反常积分 .....	251
一、一致收敛的定义 .....	251
二、一致收敛积分的判别法 .....	252
三、一致收敛积分的性质 .....	253
四、阿贝尔判别法、狄利克雷判别法 .....	257
五、欧拉积分, B 函数和 $\Gamma$ 函数 .....	261
习题 .....	264

### 第四部分 多变量积分学

第十九章 积分(二重、三重积分, 第一类曲线、曲面积分) 的定义和性质 .....	269
§1 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的 概念 .....	269
§2 积分的性质 .....	274
习题 .....	276
第二十章 重积分的计算及应用 .....	277
§1 二重积分的计算 .....	277
一、化二重积分为二次积分 .....	277
二、用极坐标计算二重积分 .....	284
三、二重积分的一般变量替换 .....	288

习题 .....	296
§ 2 三重积分的计算 .....	298
一、化三重积分为三次积分 .....	298
二、三重积分的变量替换 .....	304
习题 .....	309
§ 3 积分在物理上的应用 .....	310
一、质心 .....	310
二、矩 .....	313
三、引力 .....	314
习题 .....	315
§ 4 反常重积分 .....	316
习题 .....	320
<b>第二十一章 曲线积分和曲面积分的计算 .....</b>	<b>322</b>
§ 1 第一类曲线积分的计算 .....	322
习题 .....	326
§ 2 第一类曲面积分的计算 .....	326
一、曲面的面积 .....	326
二、化第一类曲面积分为二重积分 .....	331
习题 .....	335
§ 3 第二类曲线积分 .....	336
一、变力作功与第二类曲线积分的定义 .....	336
二、第二类曲线积分的计算 .....	340
三、两类曲线积分的联系 .....	343
习题 .....	346
§ 4 第二类曲面积分 .....	347
一、曲面的侧 .....	347
二、第二类曲面积分的定义 .....	349
三、两类曲面积分间的联系 .....	353
四、第二类曲面积分的计算 .....	353
习题 .....	359
<b>第二十二章 各种积分间的联系和场论初步 .....</b>	<b>360</b>
§ 1 各种积分间的联系 .....	360

一、格林 (Green) 公式 .....	360
二、高斯 (Gauss) 公式 .....	364
三、斯托克斯 (Stokes) 公式 .....	368
习题 .....	372
§ 2 曲线积分和路径的无关性 .....	374
习题 .....	381
§ 3 场论初步 .....	382
一、场的概念 .....	382
二、向量场的散度与旋度 .....	384
* 三、保守场 .....	393
* 四、算子 $\nabla$ .....	394
习题 .....	396
<b>附录 向量值函数的导数 .....</b>	<b>398</b>
<b>索引 .....</b>	<b>407</b>

第三篇  
级 数

第一部分

数项级数和反常积分



# 第九章

## 数项级数

### § 1 预备知识:上极限和下极限

我们先来叙述本篇的一个预备知识,即数列的上极限和下极限.就其内容来说,是属于极限论的范围.

对于一个有界数列 $\{a_n\}$ ,去掉它的最初 $k$ 项以后,剩下的仍是一个有界数列,记这个数列的上确界为 $\beta_k$ ,下确界为 $\alpha_k$ ,亦即

$$\beta_k = \sup_{n>k} \{a_n\} = \sup \{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots\},$$

$$\alpha_k = \inf_{n>k} \{a_n\} = \inf \{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots\},$$

可见 $\alpha_k \leq \beta_k$ .令 $k=1, 2, 3, \dots$ ,于是得到一系列 $\{\beta_k\}$ 和一系列 $\{\alpha_k\}$ .显然数列 $\{\beta_k\}$ 是单调减少的, $\{\alpha_k\}$ 是单调增加的,所以这两个数列的极限都存在.我们称 $\{\beta_k\}$ 的极限是 $\{a_n\}$ 的上极限,设它是 $H$ . $\{\alpha_k\}$ 的极限是 $\{a_n\}$ 的下极限,设它是 $h$ .并分别将上极限和下极限记为 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .也就是

$$H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n>k} \{a_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k,$$

$$h = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n>k} \{a_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k,$$

由于 $\alpha_k \leq \beta_k$ ,得 $h \leq H$ .

如果数列 $\{a_n\}$ 无上界,我们就说 $H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ,如果数列

$\{a_n\}$  无下界, 就说  $h = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

下面给出上极限和下极限的重要性质.

**定理 1** 设  $H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , 则

(i) 当  $H$  为有限时, 对于  $H$  的任何  $\varepsilon$  邻域  $(H - \varepsilon, H + \varepsilon)$ , 在数列  $\{a_n\}$  中有无穷多个项属于这个邻域, 而在  $(H + \varepsilon, +\infty)$  中最多只有有限多个项 (包括一项也没有) (图 9-1);



图 9-1

(ii) 当  $H = +\infty$  时, 对任何数  $N > 0$ , 在  $\{a_n\}$  中必有无穷多个项大于  $N$ ;

(iii) 当  $H = -\infty$  时, 数列  $\{a_n\}$  以  $-\infty$  为极限.

**证明** (i) 当  $-\infty < H < +\infty$  时, 假设存在某一正数  $\varepsilon_0$ , 使得在  $\{a_n\}$  中只有有限多个项大于  $H - \varepsilon_0$ , 那么必存在  $n_0$ , 当  $n > n_0$  时, 一切  $a_n$  皆有  $a_n \leq H - \varepsilon_0$ . 于是上确界

$$\beta_n = \sup \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \leq H - \varepsilon_0 \quad (n > n_0),$$

因此

$$H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq H - \varepsilon_0,$$

这与定理的假设矛盾, 这就证明了对任何  $\varepsilon > 0$ , 在  $\{a_n\}$  中必有无穷多个项大于  $H - \varepsilon$ .

再来证明, 在  $\{a_n\}$  中最多只有有限多个项大于  $H + \varepsilon$ . 因为, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = H$ , 故存在  $N$ , 当  $n > N$  时有  $\beta_n < H + \varepsilon$ , 而  $\beta_n$  又是  $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$  的上确界, 所以当  $n > N$  时, 对一切正整数  $k$  成立  $a_{n+k} \leq \beta_n < H + \varepsilon$ , 这样就证明了大于  $H + \varepsilon$  的  $a_n$  只可能有有限多个 (包括一个也没有).

(ii) 当  $H = +\infty$  时, 数列  $\{a_n\}$  无上界, 由此便获得所要的结论.



(iii) 当  $H = -\infty$  时, 对任何  $G > 0$ , 存在  $n_0$ , 当  $n > n_0$  时

$$a_{n+1} \leq \beta_n < -G,$$

这表明  $\{a_n\}$  的极限为  $-\infty$ .

到此定理全部证毕.

**定理 2** 设  $h = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , 则

(i) 当  $h$  为有限时, 对  $h$  的任何  $\varepsilon$  邻域  $(h - \varepsilon, h + \varepsilon)$ , 在数列  $\{a_n\}$  中有无穷多个项属于这个邻域, 而最多只有有限多个小于  $h - \varepsilon$  (包括一项也没有);

(ii) 当  $h = -\infty$  时, 对任何数  $N > 0$ , 在数列  $\{a_n\}$  中有无穷多个项小于  $-N$ ;

(iii) 当  $h = +\infty$  时, 数列  $\{a_n\}$  的极限为  $+\infty$ .

证明与定理 1 完全相仿.

**定理 3** 设  $H$  为  $\{a_n\}$  的上极限, 那么, 在  $\{a_n\}$  中必存在一个子列, 其极限为  $H$ , 并且  $H$  是  $\{a_n\}$  中所有收敛子列的极限中的最大值. 设  $h$  为  $\{a_n\}$  的下极限, 那么, 在  $\{a_n\}$  中必存在一个子列, 其极限为  $h$ , 并且  $h$  是  $\{a_n\}$  中所有收敛子列的极限中的最小值.

**证明** 仅以上极限  $H$  来证明如下. 分三种情形来考察:

(i)  $-\infty < H < +\infty$ , 由定理 1 知道, 必有一个子列  $\{a_{n_k}\}$  收敛于  $H$ . 此外, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 在  $\{a_n\}$  中只可能有有限多个项大于  $H + \varepsilon$ , 这就表明所有收敛子列的极限绝不会大于  $H + \varepsilon$ , 再由  $\varepsilon$  的任意性, 便得到所有收敛子列的极限必不大于  $H$ .

(ii) 当  $H = +\infty$  时, 按定理 1, 存在子列  $a_{n_k} \rightarrow +\infty$ , 而其他一切收敛子列的极限当然不会大于  $+\infty$ .

(iii) 当  $H = -\infty$  时, 此时  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , 故数列  $\{a_n\}$  的一切子列都以  $-\infty$  为极限.

这样便证明了定理.

这一定理告诉我们, 在一个数列  $\{a_n\}$  中, 它的所有收敛子列