开放人文

Mathematics in the Modern World

[美] M·克莱因 主编　　齐民友 等 译

Morris Kline

现代世界中的数学

上海世纪出版集团

图书在版编目(CIP)数据

现代世界中的数学 / (美)克莱因(Kline,M.)主编;齐民友等译. —上海:上海教育出版社,2007.9
(世纪人文系列丛书)
ISBN 978-7-5444-1064-9

Ⅰ.现… Ⅱ.①克…②齐… Ⅲ.数学—普及读物 Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第048372号

责任编辑 叶中豪
装帧设计 陆智昌

现代世界中的数学
[美]克莱因 主编
齐民友 等译

出 版 世纪出版集团 上海教育出版社出版、发行
(邮政编码 200031 上海永福路 123 号 www.ewen.cc)
发 行 上海世纪出版集团发行中心
印 刷 上海江杨印刷厂
开 本 635×965mm 1/16
印 张 56.25
插 页 4
版 次 2007 年 9 月第 1 版
印 次 2007 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5444-1064-9/O·0016
定 价 83.00 元

序

数学是人所创造出的最简单的系统的学科. 比如说，它远比物理学、历史学和经济学简单. 它之所以简单是因为它只限于现实的很有限的侧面. 十个人就是十个很复杂的心理和生理有机体，其结构与功能我们只是部分地了解. 与之相比，想要认识并保持其数为 10 这个数量上的事实却是微不足道的事. 一块木做的三角形是说不清有多少个复杂的分子被复杂的力联在一起. 不论是分子的结构还是把它们联结在一起的力，甚至最伟大的物理学家也未能完全懂得. 但是数学家只研究其三角形的形状，完全不管其分子结构与力. 数学所关心的概念的简单性几乎保证了，由数学所确定的关于这些概念的事实必然也是最基础的. 尽管有这种简单性，大多数人仍然抱怨数学难于掌握，尽管它在生活的几乎每一步都有惊人的效用，因此应该引起兴趣，这些人仍然躲着数学.

一个本质上简单的学科却难于学习，这件怪事很大部分容易解

释. 有些困难是表面的. 其一是词汇. 数学家用一些对普通人很生僻的词来表达从实际事物中抽象出来的概念. 如“四边形”和“平行四边形”有一些在其他领域遇不到的特定的精确含意，要研究数学就得学着用. 然而谁也不会争辩说学会用新名词就是主要障碍. 学会用新名词当然不是一种愉快的消磨时光的玩意，它是另一码事. 但其困难决不会大于学会法语词汇.

另一个看得见的，但同样是表面的困难是使用符号. 我们要解决一个问题，以某些已给的信息为基础决定一个未知数. 设此未知数是某一个长度以尺计的数字. 用 x 去代表这个长度，而在以后就只用符号 x 而不去说这么长一句话，肯定是有利的. 然而使用符号不会产生任何概念上的困难.

人们设想到的第三个困难是抽象性. 但是由于基本的抽象或概念是直接来自日常经验的，人们心中很容易保存它们的含意. 事实上，数学家不断地诉诸物理对象和物理图像，以便不忘记这些抽象概念的含意. 古希腊数学家用小石子代表各类对象，用小石子学会了自然数的基本事实. 顺便说一下，“计算”一词，广义地即表示任一个算术或代数过程，它的英文字 Calculus 的拉丁语源就是小石子. 甚至更高级的数学抽象如微积分学中所学的导数和积分，说到底离这些初等概念仅一步之隔，甚至微积分的概念也有图像的和物理的意义. 要学会这些抽象概念，比学习初等概念并不要求更高的智力.

有一个在数学圈子里相当流行的故事，体现了数学家其实是用图像来思考的. 一位教授在给班上学生讲定理的证明时突然中间停住了. 他走到黑板角上，画几个图，想一想，然后擦掉这些图继续讲他的证明. 这个故事也揭露了教学方法的某些侧面，就用不着说明白了.

学习数学还有一些可能比较本质的障碍. 小学、中学和高等学校都是为了使我们准备好走向生活，我们都必需准备好进入20世纪的复杂的文明，但要有充分的准备，需学的东西很多. 学科的次序安排，以及在各学科之内各个课题之先后，还有教育的进度，都是为了保证这种准备. 然而，为了走向生活而作的有效的训练，要求以牺牲理解为代价，至少在数学中是如此.

数学的完成了的形式是一系列概念、一系列程序，例如求解某种类型方程的方法. 还有一系列事实，例如定理. 当然，程序和定理都要通过证明来确认. 要想教会人这些数学的元素，最容易的方法似乎莫过于用这些概念、过程、定理与证明的最终的、确定的形式去教学生. 但是数学是一门老学科，它的某些重大的成就可以追溯到公元前3000年. 过去五千多年里数学家不仅极大地扩大了这个学科的领域，而且当他们一步步扩大其领域，当他们不断认识了新的客体和现象，当他们不断改进自己的理解，他们也就重塑了这些概念、程序与证明来把这些成就组合起来. 这些订正了的版本有许多就不再清晰易懂了.

此外，数学的分量在增加，最好把它组织起来，使关于同一主题的许多定理有合逻辑的次序. 每一门学科的基础是公理，后面就是一串定理，每一个定理都用公理和前面已证的定理来证明. 把结果按这样的合于逻辑的次序来安排，这种需要就迫使数学家找出新的、不甚自然、不甚明白的证明. 结果是许多证明都被除去了它们的直观、透明和易于理解的面貌，而被十分人为的证明代替了. 这种逻辑表述使人想起大文豪撒缪尔·约翰逊(Samul Johnson)的一件轶事. 他曾对一个人讲解了一个问题，此人仍感不满足，坚请他作进一步的解释. 约翰逊多少有些生气，尖刻地回答说："我已经给了你一个论证，我没

有义务再给你一个解释.”

表述上的有效性似乎导致忽视数学的另一个特点，而这个特点对于理解数学却是至关重要的. 数学本身是一副骨骼. 数学的血肉和生命在于用数学做什么. 有意义的数学（也存在没有意义的数学）要为一种目的服务，这种目的用笛卡儿的话来说，就是使人成为大自然的主人和占有者. 数学的意义在于数学本身之外，正如好的文学作品的意义在于纸面上文字的堆积之外. 要懂得数学就要知道为什么需要这个结果，它和其他结果关系如何，用它可以做些什么事.

学校由于它的目的和义务繁多，有时能够，有时又不能够给数学一种更有启发性的讲法. 有志于此的学生必须要走得远一些，寻求一种完全的知识. 要对数学有较彻底的理解与领会，就必须去掉那些纤巧的细节，深入到其深层的思想之中；要知道它的目的和用处，知道创造它的人们的动机，以及这些概念和结构的创生背景.

本书收入的论文实质在于有助于理解数学. 它们的目的不是给出平淡无奇的信息或学一门课程时必需掌握的技术细节以便去学下一门课，而是给出内在的洞察. 这些文章不止给出了砖石和逻辑的灰浆，而是给出宏大的庙宇；它们用广阔的视野去补足细节；它们一改日复一日与符号和过程打交道的模式，注入了崇高主题，给人以激情.

由不同作者就不同主题写的一系列论文不能代替系统的攻读和技术的掌握，它更像是一个万花筒，它的色彩缤纷的闪光给人以启发、激情和灵感——而这正是一切教育的主要目的.

1968 年 8 月

克莱因（Morris Kline）

出版说明

自中西文明发生碰撞以来，百余年的中国现代文化建设即无可避免地担负起双重使命。梳理和探究西方文明的根源及脉络，已成为我们理解并提升自身要义的借镜，整理和传承中国文明的传统，更是我们实现并弘扬自身价值的根本。此二者的交汇，乃是塑造现代中国之精神品格的必由进路。世纪出版集团倾力编辑世纪人文系列丛书之宗旨亦在于此。

世纪人文系列丛书包涵“世纪文库”、“世纪前沿”、“袖珍经典”、“大学经典”及“开放人文”五个界面，各成系列，相得益彰。

“厘清西方思想脉络，更新中国学术传统”，为“世纪文库”之编辑指针。文库分为中西两大书系。中学书系由清末民初开始，全面整理中国近现代以来的学术著作，以期为今人反思现代中国的社会和精神处境铺建思考的进阶；西学书系旨在从西方文明的整体进程出发，系统译介自古希腊罗马以降的经典文献，借此展现西方思想传统的生发流变过程，从而为我们返回现代中国之核心问题奠定坚实的文本基础。与之呼应，“世纪前沿”着重关注二战以来全球范围内学术思想的重要论题与最新进展，展示各学科领域的新近成果和当代文化思潮演化的各种向度。“袖珍经典”则以相对简约的形式，收录名家大师们在体裁和风格上独具特色的经典作品，阐幽发微，意趣兼得。

遵循现代人文教育和公民教育的理念，秉承“通达民情，化育人心”的中国传统教育精神，“大学经典”依据中西文明传统的知识谱系及其价值内涵，将人类历史上具有人文内涵的经典作品编辑成为大学教育的基础读本，应时代所需，顺时势所趋，为塑造现代中国人的人文素养、公民意识和国家精神倾力尽心。“开放人文”旨在提供全景式的人文阅读平台，从文学、历史、艺术、科学等多个面向调动读者的阅读愉悦，寓学于乐，寓乐于心，为广大读者陶冶心性，培植情操。

“大学之道，在明明德，在新民，在止于至善”（《大学》）。温古知今，止于至善，是人类得以理解生命价值的人文情怀，亦是文明得以传承和发展的精神契机。欲实现中华民族的伟大复兴，必先培育中华民族的文化精神；由此，我们深知现代中国出版人的职责所在，以我之不懈努力，做一代又一代中国人的文化脊梁。

上海世纪出版集团

世纪人文系列丛书编辑委员会

2005 年 1 月

目录

第一部分
数学的本性

引言

欧几里得的《几何原本》，第一部现存的数学经典，激励了一百代人的数学事业，它既是人类智慧的胜利，却又是教学法上的大不幸. 整个世界从这部经典中学到了数学证明的观念和数学知识的整体的逻辑结构的概念，当然也学到了宝贵的知识. 但是太多的知识分子，也包括太多的数学家，误解了欧几里得的著作的意义，形成了关于数学的过于褊狭的概念. 他们断言，数学就是纯粹的逻辑的发展. 它从明确陈述的公理和定义开始，对定义中界定了的数学概念演绎地证明种种结果.

欧几里得在他的大约成书于公元前300年的著作中，并没有完全包括数学家在前此整整三百年间所做的一切，他也没有打算这样做. 数学家值得对于知识的整体作演绎的组织，如欧几里得对几何学所作的那样，先必须创造这些素材，而这得花上几十年甚至几百年. 和逻辑组织不一样，创造的工作不是从一个论证一步步地得出下一个论证，而且每一步都得到某个公理或已得到的结论的支持. 创造的过程所包含的是摸索、犯错、猜测和假设. 要掌握一个关键的概念，形成一个猜想并找出一个证明，需要的是想像力、直觉、预见、洞察、实验、偶然的联想、好运、艰苦的工作和巨大的耐心.

的确，放弃某一种猜想或者放弃一条路线而遵循另一条更有希望

的道路，可能需要理性思维，但整个数学创造过程却犹如著名的物理学家布里奇曼(P. W. Bridgman)所说，是要“用你的心去做最不像话的事，没有任何禁忌”．许多大数学家都攻过一个问题而失败，后人再接上来解决了它．这类事例说明了在创造过程中有多少个人心智的劳苦，远非我们从最终的证明中看到的那种系统的、有次序的论证．

创造性的活动，对学生来说则是再创造的活动，是数学的心脏．正是在这种活动中，数学家创造了最高成就，克服了最大的困难并使数学这门学科取得了最有意义的进展．创造过程不仅在解决已有问题时必不可少．没有新观点、新研究方法和新目标的创造，数学就会反反复复重新组织老的证明，使它们更加严格，在这样的过程中日趋枯竭，丧失生命力．对已经得到的知识，重新排列其步骤，安排其定理的次序来构成一个演绎的组织，这时常需要创意，但从总体上说，这更像是把书本重新排一个次序，而创造的活动，却可以比作写书．数学给人的满足——获得猎物时的兴奋，发现的激动，成就的感觉，以及成功时的欢乐——更多更强烈的是在创造性的工作之中，而不是在最后按演绎的模式来重写论证之中．

虽然已经搞好了的数学必须要演绎地陈述，这部分是想得到协调的结构，部分是由于要检验证明的步骤，逻辑模式的价值却远远小于人们常相信的程度．在从公元前 3000 年到公元 1900 年这么多世纪中，数学家是逐步地学到了现在包含在复数系中的各种数以及这些数的运算(第Ⅲ部分戴维的文章中总结了这个发展)．到每一类数及其运算终于被纳入数学之中时，数学家早已知道这些数是什么，知道它们一定有哪些性质了．在 19 世纪最后几十年里，数学家才决定要建立复数系的逻辑的展开，其原因不在这里说了．这样他们才去寻找公

理，使得能由之对各类数去推导出其性质，而其实他们早已知道这些性质成立了. 要寻找关于这些数的性质的新知识，或者要保证它们有这些性质，逻辑框架其实是多余的.

过分看重数学的逻辑结构还有别的原因. 数学家早就知道，直觉的坚信之超过逻辑，犹如太阳的光辉超过苍白的月光. 数学家们以各种不同的方式认识到这个真理. 柏拉图认为，数学真理独立于人类而存在于某一世界中，而且人类心灵通过冥想可以认识这些真理. 笛卡儿(Descartes)断言："只有在传达已知知识时才会用到逻辑." 数学家勒贝格(Henri Lebesgue)指出："逻辑能使我们拒绝某些论证却不能让我们相信任何一个论证." 阿达玛(Jacques Hadamard)还说过逻辑只不过是批准直觉的请求. 贝西科维奇(A. S. Besicovitch)说过一句挖苦的话：大数学家之所以有名是因为他们发表过许多错误的证明，也是指的这样的真理. 当然他用不着补充说，这些人猜想为真的定理仍然是正确的而且最终也得到了逻辑证明. 大数学家在一个定理的逻辑证明给出以前就知道这些定理必定为真，而且只要得到证明的要点就会满足了，而在费马关于数论的广泛的经典性的工作，以及牛顿关于三次曲线的工作中，甚至连证明的要点都没有给出. 推进数学最主要的是具有卓著的直觉力的人，而不是会作严格证明的人.

近年来我们越来越觉察到逻辑的局限性. 我们将在第Ⅳ部分看到，现代数学最深刻的结果之一——哥德尔定理，其蕴义就在于，数学不会接受逻辑的束缚. 正是因此，外尔(Herman Weyl)才在他为希尔伯特写的讣告中说："数学化也是人类最本原的独创性的创造活动，如同语言和音乐一样，对它的历史性的缺乏是不可能完全客观地加以理性化的."

许多人虽然也愿意承认创造性的活动是数学的更有意义的部分，

却因为他们没有足够的从事创造的经验，他所相信的仍与他的意愿不同. 事实上，他们常问：“能创造什么呢？还有哪些没有解决的问题呢?”哈尔莫斯在他的文章中不仅给出了许多关于个别的创造的例子，还给出了好些具有广泛可能性的整类的研究工作.

因为创造过程是如此重要而又搞不清楚，许多人试图了解它是如何运作的. 但是看来评估创造性在数学中产生了什么是远为容易的事，而深入探讨人的心智的运作，决定它是如何创造的，则困难得多. 尽管如此，还是有一些深刻的见解，庞加莱的文章就是其中之一，而且只有希尔伯特能与他分享近代最伟大数学家的殊荣.

欧几里得全书提供的就只是数学的整体的逻辑表述，而略去了数学的其他至关重要的成分——即数学工作的目的. 当然，提出这个问题甚至会被某些数学家视为异端，他们争辩说，数学分明是一门艺术，追问艺术的目的或目标本身就是对艺术的一种亵渎. 持这种态度的人于今更为普遍. 如此大量的新数学只是回答了个别数学家提出的问题，而辩护其价值只是依据说其作者创造了美. 这些人把任何实际应用都看成掺杂和玷污.

在一百年前，没有一个数学家会怀疑他自己的工作的主要目的是理解和控制自然现象. 例如高斯就把下面这段话作为自己的座右铭：“大自然，你是我的女神，我愿意在你的法律之前俯首听命.”(莎士比亚，李尔王，第一幕第二场，见人民文学出版社《莎士比亚全集》，卷九，160 页)然而，对数学的目的的不同的观点出现了，而且在雅可比(C. Jacobi)1830 年写给勒让德(A-M. Legendre)的信中公开地燃起了争论. 傅立叶(J. Fourier)在他的经典著作《热的解析理论》一书中说：“对自然的深入研究是数学发现最丰富的源泉. 这一研究不仅有利于提供一个确定的研究目的，还有利于排除模糊的问题和盲目的

计算. 它是形成分析本身的手段，是发现那些最为重要而科学必须时时抓住的思想的手段. 这些基本的思想正表现了自然发生的事情."就此，雅可比回答说："的确，傅立叶有这样一种观念，认为数学的最终目的是公众利益和描述自然现象；但是，一个像他那样的数学家应当知道，科学的唯一目的就是追求人类精神的崇高，因此一个数论问题并不比一个星系问题的价值来得低."

数学中有许多美的篇章. 无疑，数学家从事数学活动也能获得其他创造活动提供的满足感. 但是伟大的数学家情愿把数学的美作为一种额外报偿，激励他们奋斗的最深层的动力则是以数学为媒介在人类的探索活动中理解宇宙，也理解人类自身在其中的角色，并且探求如何利用自然现象和自然的力量为人类服务. 那些作出巨大贡献的数学家们，像阿基米德（Archimedes）、牛顿（Newton）、拉格朗日（Lagrange）、拉普拉斯（Laplace）、高斯、哈密尔顿（Hamilton）、庞加莱，甚至雅可比本人，或者是一流的物理学家，或者在科学史中占据显要地位. 这决不是偶然的. 几乎所有数学的意义和目的并不在于对于一堆符号作一系列的逻辑阐述，而在于这些符号必定告诉我们关于外部世界的一些知识.

不仅数学创造源于理解自然掌握自然的强烈愿望，数学概念和数学问题的产生也来自这种愿望的驱动. 科学已经为数学创造提供了土壤，提供了血液和养分. 塔里兰德(Talleyrand)曾说过，一个观念论者的立场不可能坚持多久，除非他还是一个实在论者；一个实在论者也不可能坚持多久，除非他还是一个观念论者. 把这句话用在数学上确实是指出了，必须对实际问题作出数学的理想化并抽象地去研究它们；但同时它还指出，那些无视数学实在性的观念论者不可能持久. 我们这个时代最伟大的数学家之一的冯·诺依曼(John Von Neumann)

在题为“数学家”的那篇论文*中给出了同样的忠告：“当数学这一门学科越来越远离其经验的源泉，甚至只是作为第二代或第三代而只是间接地受到来自‘现实’的观念的启发，它就有了巨大的危险，它变成越来越纯粹的赏美活动，越来越纯粹是为艺术而艺术．如果这个领域还处于一些与经验有更密切联系的相关学科之中，或者这一学科是处于一些品位特高的人们的影响之下，这不一定是坏事．但是确有巨大的危险，即这个学科将沿着阻力最小的道路发展，分化为许许多多没有意义的分支，变成一大堆毫无关联的繁烦细节．换句话说，在远离其经验源泉之后，或者在极为抽象的近亲繁殖之后，数学科学有沦于退化的危险．”

正因为如此，柯朗(Courant)尽管指出了，在现代数学中抽象化和推广起着至关重要的作用，在他的论文中还强调了“数学必须从具体特定的材料中获取启发，也必须再次瞄准‘实在性’的某种层次．飞向抽象化不应成为一种逃避的手段，从地面起飞和回到地面都是必不可少的，尽管飞行航线的各段可能不是由同一个驾驶员操纵的”．

* 原注：载于 Heywood, Robert B., *The Works of the Mind*. University of Chicago Press, 1947.