高职高专“十一五”规划教材

高等数学 下

主编　尹黄伦　侯东升

中国石油大学出版社

高职高专“十一五”规划教材

高 等 数 学

（下 册）

主 编 尹黄伦 侯东升

副主编 石国学 孔繁莲

王晓辉 王凌云

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/尹黄伦等主编. —东营:中国石油大学出版社,2006.7

ISBN 7-5636-2265-9

Ⅰ.高… Ⅱ.尹… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第084024号

书　　名:高　等　数　学(下册)

作　　者:尹黄伦　侯东升　主编

责任编辑:宋秀勇(电话　0546—8392139)

封面设计:傅荣治

出 版 者:中国石油大学出版社(山东　东营,邮编　257061)

网　　址:http://www.uppbook.com.cn.

电子信箱:yibian@mail.hdpu.edu.cn

印 刷 者:泰安农大印刷有限公司印刷

发 行 者:中国石油大学出版社(电话　0546—8392139)

开　　本:180×235　印张:11.75　字数:246千字

版　　次:2006年8月第1版第1次印刷

定　　价:12.00元(全套定价:27.00元)

目 录

第七章 微分方程

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映,利用函数关系又可以对客观事物的规律性进行研究.因此,如何寻求函数关系,在实践中具有重要意义.在许多问题中,往往不能直接找出所需要的函数关系,但是根据问题所提供的情况,有时可以列出含有要找的函数及其导数的关系式.这样的关系式即为微分方程.本章将重点讨论几种特殊类型的微分方程及其解法.

第一节 微分方程的基本概念

我们先看下面两个例子来说明微分方程的基本概念.

例 1 一条曲线通过点(1,2),且该曲线上任一点$M(x,y)$处的切线斜率为$3x^2$,求这条曲线的方程.

解 设所求的曲线方程为$y=f(x)$,由题意$y=f(x)$应满足下列关系式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2, & (1) \\ f(1) = 2. & (2) \end{cases}$$

对方程两边积分,得

$$y = \int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + C. \tag{3}$$

其中C是任意常数.

将条件(2)代入(3)式,得

$$2 = 1^3 + C,$$

即$C=1$,再把$C=1$代入(3)式得所求的曲线方程为

$$y = x^3 + 1.$$

例 2 列车在直线轨道上以 20 m/s 的速度行驶,制动时列车获得加速度-0.4 $\mathrm{m/s^2}$.问开始制动后经过多少时间才能把列车刹住?在这段时间内列车行驶了多少路程?

解 设列车的运动方程为$s=s(t)$.根据二阶导数的力学意义,函数$s=s(t)$应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4. \tag{4}$$

根据已知条件,$s=s(t)$还应满足

$$s\big|_{t=0}=0,\quad v\big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=20.$$

把(4)式的两边积分一次，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.4t+C_1, \tag{5}$$

再积分一次，得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2, \tag{6}$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数.

把条件 $v\big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=20$ 代入(5)式，得

$$20=-0.4\times 0+C_1,$$

故

$$C_1=20.$$

再把条件 $s\big|_{t=0}=0$ 代入(6)式，得

$$0=-0.2\times 0^2+C_1\times 0+C_2,$$

得

$$C_2=0.$$

把 C_1,C_2 的值代入(5)式和(6)式，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.4t+20, \tag{7}$$

$$s=-0.2t^2+20t. \tag{8}$$

在(7)式中，令 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$，得到列车从开始制动到完全刹住所需的时间为

$$t=\frac{20}{0.4}=50\ (\mathrm{s})$$

再把 $t=50$ 代入(8)式，得到列车在这段制动时间内行驶的路程为

$$s=-0.2\times 50^2+20\times 50=500\ (\mathrm{m})$$

上面两个例子中的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2\quad(\text{或 } \mathrm{d}y=3x^2\mathrm{d}x)\qquad\text{以及}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$$

都含有未知函数的导数(或微分). 对于这类方程，给出下面的定义：

定义　含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程.

未知函数为一元函数的微分方程，称为常微分方程.

方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$ 都是微分方程.

此外，方程

$y'=x^2$；$xy\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$；$y''+y'=0$；$y''=x-1$ 等也是微分方程.

微分方程中出现的各阶导数的最高阶数，称为微分方程的阶.

例如，上面的方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2$，$y'=x^2$，$xy\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$ 是一阶微分方程，$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=$

-0.4，$y''+y'=0$，$y''=x-1$ 是二阶微分方程.

由例1 和例2 看出，在研究实际问题时，首先建立微分方程，然后设法找出满足微分方程的函数，也就是说，要找到这样的函数，把这个函数代入微分方程后，能使该方程变成恒等式. 这样的函数称为微分方程的解，求微分方程解的过程，叫做解微分方程.

在例 1 中，函数 $y=x^3+C$ 和 $y=x^3$ 的导数都等于 $3x^2$，所以它们都是微分方程 $\frac{dy}{dx}=3x^2$ 的解.

一般来说，求微分方程的解常常是比较困难的，每一种特定类型的微分方程都有其特定的解法. 现在我们先考察一类可以通过直接积分求解的微分方程. 这类微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} = f(x).$$

例 3 求微分方程 $y''=x-1$ 的解.

解 因为 y' 是 y'' 的原函数，所以可以对函数 $x-1$ 求不定积分，得

$$y' = \int (x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - x + C_1.$$

对上式再求不定积分，得

$$y = \int\left(\frac{1}{2}x^2 - x + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2.$$

要注意的是，第一次积分中的任意常数 C_1，在第二次积分中已作为被积函数的一部分；第二次积分又产生了一个新的积分常数 C_2. $y=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$ 就是方程 $y''=x-1$ 的解，其中包含了两个任意常数. 这种解也称为该方程的通解. 当这些任意常数取定一组数值时，得到的解就称为微分方程的特解. 例如，取 $C_1=1$，$C_2=2$ 得到的特解是

$$y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2.$$

一般来说，通解中任意常数的取值常常是通过附加条件来确定的. 如在例 1 中，$y=x^3+C$ 是通解. 由 $y|_{x=1}=2$，求得 $C=1$，这种附加条件在微分方程中称为初始条件.

一般地，如果微分方程的解中含有任意常数，且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，那么这样的解叫做微分方程的通解. 在通解中若使任意常数取某定值，或利用附加条件求出任意常数应取的值，所得的解叫做微分方程的特解. 确定出通解中任意常数的附加条件称为初始条件.

如果微分方程是一阶的，通常用来确定任意常数的初始条件是

$$y|_{x=x_0} = y_0,$$

其中 x_0 和 y_0 都是给定的值. 如果方程是二阶的，通常用来确定任意常数的条件是

$$y|_{x=x_0}=y_0 \quad 和 \quad y'|_{x=x_0}=y'_0,$$

其中 x_0, y_0 和 y'_0 都是给定的值.

例 4 求出例3中满足初始条件

$$y|_{x=1}=-\frac{1}{3} \quad 和 \quad y'|_{x=1}=\frac{1}{2}$$

的特解.

解 因为

$$y=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2,$$

所以

$$y'=\frac{1}{2}x^2-x+C_1.$$

分别将初始条件 $y|_{x=1}=-\frac{1}{3}$ 和 $y'|_{x=1}=\frac{1}{2}$ 代入上两式得

$$\begin{cases}\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+C_1+C_2=-\frac{1}{3},\\ \frac{1}{2}-1+C_1=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ C_1=1.\end{cases}$$

解此方程组，得 $C_1=1, C_2=-1$. 因此，微分方程的特解为

$$y=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1.$$

例 5 验证函数 $y=C_1\sin 2t+C_2\cos 2t$ 是微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$$

的通解，并求出满足初始条件 $y|_{t=0}=1$ 和 $y'|_{t=0}=-1$ 的特解.

解 因为

$$y=C_1\sin 2t+C_2\cos 2t, \tag{1}$$

所以

$$\frac{dy}{dt}=2C_1\cos 2t-2C_2\sin 2t, \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-4C_1\sin 2t-4C_2\cos 2t. \tag{3}$$

将(1)式和(3)式代入 $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=0$，有

$$-4C_1\sin 2t-4C_2\cos 2t+4(C_1\sin 2t+C_2\cos 2t)=0,$$

即函数 $y=C_1\sin 2t+C_2\cos 2t$ 满足方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=0$. 又因为这个函数含有两个任意常数，因此它是方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=0$ 的通解.

把初始条件 $y|_{t=0}=1$ 和 $y'|_{t=0}=-1$ 代入(1)式和(2)式，得

$$\begin{cases} C_1\sin 0 + C_2\cos 0 = 1, \\ 2C_1\cos 0 - 2C_2\sin 0 = -1. \end{cases}$$

解此方程组，得 $C_1=-\frac{1}{2}$，$C_2=1$. 因此方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=0$ 满足初始条件的特解为

$$y=-\frac{1}{2}\sin 2t+\cos 2t.$$

微分方程解的图形叫积分曲线，微分方程的通解在几何上可用曲线族来表示. 这族曲线可由其中一条积分曲线沿 y 轴上下平行移动生成，而且在横坐标相同的点处的切线平行，称为微分方程的积分曲线族. 特解则是满足初始条件即过某一定点的一条积分曲线.

例如，$y=x^2+C$ 是 $y'=2x$ 的通解，表示一族积分曲线，而特解 $y=x^2$ 是过点 $(1,1)$ 的一条积分曲线.

习 题 7.1

1. 下列各等式中，哪几个是微分方程？哪几个不是微分方程？

(1) $y''-3y'+2y=0$； (2) $y^3-3y+2=0$；

(3) $y'=2x+1$； (4) $y=2x+1$；

(5) $dy=(4x+1)dx$； (6) $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$.

2. 指出下列微分方程的阶数：

(1) $y'=\frac{1}{2}x^2-x+2$； (2) $y''+3y'+2y=\cos x$；

(3) $\frac{d^3y}{dx^3}-y=e^{2x}$； (4) $y-x\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$.

3. 下列各题中的函数是否为所给微分方程的解？

(1) $xy'=2y$，$y=5x^2$； (2) $y''=x^2+y^2$，$y=\frac{1}{x}$；

(3) $xy'+y=\sin x$，$y=\frac{C-\sin x}{x}$ （C 为常数）；

(4) $y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$；

(5) $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$，$x=C_1\cos \omega t+C_2\sin \omega t$ （C_1，C_2 为常数）；

(6) $y''-2y'+y=0$，$y=x^2e^x$.

4. 解下列微分方程：

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$； (2) $\frac{d^2y}{dx^2}=\cos x$；

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}=2\sin \omega x$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=\frac{1}{\omega}$；

(4) $y'''=e^{2x}$，$y|_{x=0}=\frac{1}{8}$，$y'|_{x=0}=0$，$y''|_{x=0}=\frac{1}{2}$.

5. 已知曲线上任意一点 $M(x,y)$ 处切线的斜率为 $\sin x$，求该曲线的方程.

6. 给定一阶微分方程 $y'=3x$：

(1) 求它的通解；

(2) 求过点(2,5)的特解；

(3) 求出与直线 $y=2x-1$ 相切的曲线方程；

(4) 画出(2)、(3)中解的曲线.

7. 一物体作直线运动，其运动速度为 $v=2\cos t$(m/s)，当 $t=\frac{\pi}{4}$(s)时，物体与原点 O 相距10 m，求物体在时刻 t 与原点 O 的距离 $s(t)$.

第二节　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式是 $F(x,y,y')=0$，我们仅讨论已解出导数的一阶微分方程：

$$y' = f(x,y). \tag{1}$$

有时可以写成如下的对称式方程：

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0. \tag{2}$$

这时 x 与 y 处于相同的地位，形式上对称，故称为一阶对称式方程.

一、可分离变量的微分方程

形如

$$f(x)\mathrm{d}x=g(y)\mathrm{d}y \tag{3}$$

的一阶微分方程，称为变量已分离的微分方程. 将方程(3)两边同时积分可得通解

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C.$$

其中 C 为任意常数，此处为了明显起见，将 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 看作 $f(x)$ 的一个原函数，将积分常数单独写出来.

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)h(y) \quad 或 \quad M_1(x)M_2(y)\mathrm{d}x=N_1(x)N_2(y)\mathrm{d}y \tag{4}$$

的微分方程，称为可分离变量的微分方程，(4)式经简单的代数运算可化为(3)的形式而求得通解.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C \quad 或 \quad \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{N_2(y)}{M_1(y)}\mathrm{d}y + C.$$

例 1　求方程 $y'=-x\sqrt{y}$ 的通解.

解　由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x\sqrt{y}$ 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = -x\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$2\sqrt{y}=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}C,$$

即 $y=\frac{1}{16}(C-x^2)^2$ 是原方程的通解.

例 2 解微分方程$(x+xy^2)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\mathrm{d}y=0$.

解 原方程可以写成$x(1+y^2)\mathrm{d}x+y(1-x^2)\mathrm{d}y=0$是可分离变量的微分方程，分离变量后两边积分

$$\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=C_1,$$

得 $-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln C$(为化简方便)，化简得

$$\ln\frac{1+y^2}{1-x^2}=\ln C,$$

即
$$\frac{1+y^2}{1-x^2}=C \quad 或 \quad 1+y^2=C(1-x^2)$$

为原方程的通解.

例 3 解微分方程$\mathrm{d}P=kP(N-P)\mathrm{d}t$($N,k>0$ 为常数)，此处假设$0<P<N$.

解 分离变量，得$\frac{\mathrm{d}P}{P(N-P)}=k\mathrm{d}t$,

两边积分：因为$\int k\mathrm{d}t=kt+C$,

$$\int\frac{\mathrm{d}P}{P(N-P)}=\frac{1}{N}\int\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{N-P}\right)\mathrm{d}P=\frac{1}{N}\ln\frac{P}{N-P},$$

所以有
$$\frac{1}{N}\ln\frac{P}{N-P}=kt+C \quad 或 \quad \frac{P}{N-P}=\mathrm{e}^{N(kt+C)}=A\mathrm{e}^{at},$$

其中$A=\mathrm{e}^{NC}$，$a=Nk$，由此解得P，

$$P=\frac{NA\mathrm{e}^{at}}{A\mathrm{e}^{at}+1}=\frac{N}{1+B\mathrm{e}^{-at}} \quad (其中\ B=\frac{1}{A}\mathrm{e}^{-NC})$$

为原方程的通解.

此方程称为逻辑斯蒂曲线方程.

二、齐次方程

如果一阶微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$的右边可以写成$\frac{y}{x}$的函数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5}$$

则称此方程为齐次方程.

例如$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-(y^2-x^2)\mathrm{d}y=0$,

可以写成
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1},$$

又如
$$(xy-y^2)\mathrm{d}x-(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0,$$
可以化为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$
所以它们都是齐次方程.

对齐次方程(5)做变换,令$u=\frac{y}{x}$,则$y=xu$,

于是有
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$
代入(5)式得
$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u),$$
即
$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u,$$
分离变量
$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$
两边积分
$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\ln x-\ln C=\ln\frac{x}{C},$$
即 $x=C\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}}$,再将$u=\frac{y}{x}$代入上式得原方程的解.

例 4 求$x\mathrm{d}y-y\ln\frac{y}{x}\mathrm{d}x=0$的通解.

解 将方程化成$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$,是齐次方程,令$u=\frac{y}{x}$,则$y=xu$,

从而
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$
代入方程化为
$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(\ln u-1).$$
分离变量后积分
$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$
得
$$\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C,\Rightarrow\ln u=Cx+1,\text{即 }u=\mathrm{e}^{Cx+1},$$
将$u=\frac{y}{x}$代入上式,得$y=x\mathrm{e}^{Cx+1}$即为所求.

例 5 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ $(y>0)$的通解.

解 这是齐次方程,可以化成$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$的形式,

即
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1},$$

令$u=\dfrac{x}{y}$，则$x=yu$，$\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，

代入上式得

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u+\sqrt{u^2+1},$$

即

$$y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\sqrt{u^2+1},$$

分离变量后积分：

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}=\int\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

即

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln y-\ln C$$

或

$$u+\sqrt{1+u^2}=\frac{y}{C},$$

将$u=\dfrac{x}{y}$代入整理得

$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)\text{即为所求.}$$

这是以x轴为轴，焦点在原点的一族抛物线.

三、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)\tag{6}$$

的方程称为一阶线性微分方程，其特点是方程中未知函数及其导数都是一次的.

如果$Q(x)=0$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0.\tag{7}$$

方程(7)称为方程(6)的对应一阶线性齐次方程.若$Q(x)\neq0$，方程(6)称为方程(7)的对应一阶线性非齐次方程.这里$P(x)$和$Q(x)$都是x的已知函数.

对应于非齐次方程(6)的齐次方程(7)是可分离变量的微分方程，分离变量后，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C\quad\text{或}\quad y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

为齐次方程(7)的通解.

因为方程(7)是方程(6)的特例，所以两者既有区别也有联系.因此可以设想它们的通解也有一定的联系，所以求出方程(7)的通解，我们使用"常数变易法"，把方程(7)的通解中任意常数C看作是x的未知函数$C(x)$，即设

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\tag{8}$$

是一阶线性非齐次方程(6) 的解，然后定出$C(x)$，在上式中对x求导，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

将y和y'代入方程(6)可得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

即
$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

积分得
$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C,$$

代入(8)式得

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]. \tag{9}$$

这就是一阶线性非齐次方程(6)的通解.

(9)式可写成：

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)dx}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

由此式知，通解中的第一项是对应的线性齐次方程(7)的通解，第二项是原方程的一个特解(可在通解(9)中取$C=0$而得). 由此可见，一阶线性非齐次方程的通解是它对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和. 高阶线性非齐次微分方程也具有这种特性.

例 6　求方程$xy'+y=\sin x$的通解.

解　将方程化为
$$y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x},$$

求解对应的齐次方程
$$y'+\frac{y}{x}=0,$$

分离变量，两边积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\ln y=-\ln x+\ln C,\text{即}\quad y=\frac{C}{x}.$$

再用常数变易法，设$y=\dfrac{C(x)}{x}$为原方程的解，则

$$y'=\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}\text{ 代入原方程}$$

$$x\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x}=\sin x,$$

所以
$$C'(x)=\sin x,$$

两边积分，得
$$C(x)=-\cos x+C,$$

于是原方程的通解为
$$y=\frac{1}{x}(C-\cos x).$$

例 7 解微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-y^3)\mathrm{d}y=0$，设 $y>0$.

解 将原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{x-y^3}{y}=0$，

即
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}x=y^2,$$

这是 $P(y)=\dfrac{1}{y}$，$Q(y)=y^2$ 的关于 x 的一阶线性微分方程，所以由通解公式得：

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[y^2\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=\mathrm{e}^{-\ln y}\left[\int y^2\mathrm{e}^{\ln y}\mathrm{d}y+C\right]$$
$$=\frac{1}{y}\left[\int y^3\mathrm{d}y+C\right]=\frac{1}{4}y^3+\frac{C}{y},$$

即 $4xy=y^4+C_1$ 为原方程的通解.

*四、贝努利方程

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n\quad(n\neq 0,1)\tag{10}$$
的方程称为贝努利(Bernulli)方程，贝努利方程通过变量代换，可化为线性方程. 方程(10)两边同除以 y^n，得
$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x).\tag{11}$$

易看出，上式左端第一项与 $\dfrac{\mathrm{d}(y^{1-n})}{\mathrm{d}x}$ 只差一个常数因子 $1-n$，因此我们引入一个新的未知函数.

令 $z=y^{1-n}$，那么 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入(11)式且用 $(1-n)$ 乘以等式两端，得
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$
求出这个方程的通解后，以 y^{1-n} 代 z，便得贝努利方程的通解.

例 8 求解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{4y}{x}=x\sqrt{y}$.

解 这是一个贝努利方程
$$P(x)=-\frac{4}{x},\quad Q(x)=x,n=\frac{1}{2}.$$
令 $z=y^{1-\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}$，则 $y=z^2$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

代入原方程化为
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=\frac{1}{2}x,$$
由线性方程的通解公式，得
$$z=\mathrm{e}^{-\int\frac{-2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{2\ln x}\left[\int\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\ln x}\mathrm{d}x+C\right]=x^2\left(\frac{1}{2}\ln x+C\right).$$

用$z=y^{\frac{1}{2}}$代回，得方程的解为　$y=x^4\left(\frac{1}{2}\ln x+C\right)^2$.

例 9　求解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$的通解.

解　方程两边除以y^2，得

$$y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x,$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}(y^{-1})}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x,$$

令$z=y^{-1}$代入上式，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-a\ln x,$$

这是一个一阶线性微分方程，由通解公式，得

$$z=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right],$$

以$z=y^{-1}$代回，得原方程的通解为　$yx\left(C-\frac{a}{2}\ln^2 x\right)=1$.

把上述一阶微分方程的类型和解法列成下表供参考.

微分方程	解法和通解
可分离变量的方程：$M(x)P(y)\mathrm{d}x+N(y)Q(x)\mathrm{d}y=0$	分离变量，两边积分 $\int\frac{M(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=-\int\frac{N(y)}{P(y)}\mathrm{d}y+C$
齐次方程：$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$	令$\frac{y}{x}=u$，可化为可分离变量的方程
线性方程：$y'+P(x)y=Q(x)$	$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$
贝努利方程：$y'+P(x)y=Q(x)y^n\quad(n\neq 0,1)$	令$z=y^{1-n}$化为线性方程

习　题　7.2

1. 求下列微分方程的通解或特解：

(1) $(1+y)\mathrm{d}x+(x-1)\mathrm{d}y=0$;　(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$;

(3) $(1+x^2)y'-y\ln y=0$;　(4) $y'+\mathrm{e}^x y=0$;

(5) $\sin y\cos x\mathrm{d}y=\cos y\sin x\mathrm{d}x, y(0)=\frac{\pi}{4}$;　(6) $xy'-y=0, y|_{x=1}=2$.

2. 求下列微分方程的通解或特解：

(1) $y'=\frac{y}{x}+\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$;　(2) $xy'+x\tan\frac{y}{x}-y=0$;