赵家奎 编著

微分变换及其在电路中的应用

华中理工大学出版社

微分变换及其在电路中的应用

赵家奎 编著

华中理工大学出版社

微分变换及其

在电路中的应用

赵家奎　编著

责任编辑　姜新祺

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：8.5　字数：186 000

1988年9月第1版　1988年9月第1次印刷

印数：1—2 000

ISBN 7-5609-0192-1/TM·15

定价：1.75 元

序　言

众所周知，目前在大多数情况下，对线性微分方程的求解是采用积分变换将微分方程变换成代数方程求解，例如，电工基础中经常使用的拉普拉斯变换、傅立叶变换等等。但是积分变换不能用于解非线性的问题，这是它的局限性。本书所论述的微分变换也是一种函数变换，它不仅能将线性微分方程变换成代数方程进行求解，而且还能将非线性的微分方程变换成代数方程求解，其应用范围比积分变换更广，因而是一种非常实用的、颇有价值的方法。

本书内容分两大部分：第一部分（第一章和第二章）论述了微分变换的数学基础，包括微分变换的定义、性质及同积分变换的关系；应用微分变换求解方程及方程组的方法，如常、变系数微分方程，线性和非线性微分方程，一阶和高阶微分方程及常用的偏微分方程等；还详细地讨论了微分方程的近似解法。在这一部分中，为了使读者充分掌握微分变换这种方法，给出了许多例题。第二部分（第三章）讨论了微分变换在电路中的应用。这一部分系统地从电路的基本元件、基本定律着手，讨论了在各种求解电路问题的方法中如何使用微分变换。本书最后以附录形式总结出了微分变换表及微分变换的基本性质等，可供读者使用参考。

本书经华中工学院周克定教授，武汉工业大学张金如教授初审。两位教授提出了许多宝贵意见，在此谨致以衷心的感谢。限于作者的水平，书中不妥和错误之处恐不在少数，希望

读者给予批评指正，意见请寄武汉工业大学电工基础教研室。

作者

一九八六年八月

目　录

第一章 微分变换及其性质

§1-1 函数的积分变换和微分变换

在数学中，“变换”就是将某一个（组）变量（函数）经过某种对应关系变成另一个（组）变量（函数）。变换的种类很多，在工程技术领域，广泛应用函数积分变换，如拉普拉斯（Laplace）变换、傅立叶(Fourier)变换等。这些变换的基本方法都是将原函数x变换为X，X称为变换式。将原函数变换成变换式的变换称为正变换；而将变换式变换成原函数的变换称为逆变换或反变换。

积分变换之所以能够得到广泛的应用，是因为采用正变换可以直接将微分方程变为较简单的代数方程。

大量的实践证明，对于动态系统，积分变换仅仅适用于由定常参数元件所构成的系统。研究非线性元件所构成的系统和时变元件构成的系统，如果采用积分变换，例如拉普拉斯变换、傅立叶变换等，则是非常困难的，在多数情况下是不适用的。虽然在有限区间内，采用傅立叶变换研究线性系统和非线性系统的周期过程是富有成效的，但是，当研究过渡过程的课题时，傅立叶变换就显得很烦琐。

本书所阐述的微分变换是另一种函数变换形式，它除了可以用来求解线性问题外，也可以很方便地求解非线性问题，因而是一种颇有价值的数学变换。为了比较，下面先介绍常用的两种积分变换，然后再介绍微分变换。

一、拉普拉斯变换

根据拉普拉斯变换定义，可直接写出原函数$x(t)$的正变换式$X(p)$：

$$X(p)=\int_0^\infty e^{-pt}x(t)dt \tag{1-1}$$

对上式求反变换，得原函数

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{s-j\infty}^{s+j\infty}e^{pt}X(p)\,dp \tag{1-2}$$

若采用拉普拉斯变换符号“$\doteqdot$”，则有

$$X(p)=\int_0^\infty e^{-pt}x(t)dt\doteqdot x(t)$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{s-j\infty}^{s+j\infty}e^{pt}X(p)dp \tag{1-3}$$

于是，拉普拉斯变换的基本性质，可以写成下面的形式：

$$x(t)\pm y(t)\doteqdot X(p)\pm Y(p) \tag{1-4}$$

$$\lambda x(t)\doteqdot\lambda X(p) \tag{1-5}$$

式中，λ为常数。

$$\frac{dx(t)}{dt}\doteqdot pX(p)-X(0) \tag{1-6}$$

$$x(t)y(t)\doteqdot\frac{1}{2\pi j}\int_{s-j\infty}^{s+j\infty}X(q)Y(p-q)dq \tag{1-7}$$

显然，由上述的性质可看出，假若原函数的乘积运算是在复数域内进行的，那么对于非线性系统运用拉普拉斯变换求解是很困难的，有时甚至是不可能的。

二、傅立叶变换

根据傅立叶变换的定义，在无限大域内，具有角频率ω的原函数$x(t)$，正变换后的傅立叶变换式为$X(j\omega)$：

$$X(j\omega)=\int_{0}^{\infty}e^{-j\omega t}x(t)dt \tag{1-8}$$

对上式求反变换，可得到原函数

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}X(j\omega)d\omega \tag{1-9}$$

采用无限域内傅立叶变换符号“$\doteqdot$”，式(1-8)和式(1-9)可合写成

$$\begin{aligned}X(j\omega)&=\int_{0}^{\infty}e^{-j\omega t}x(t)dt\doteqdot x(t)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}X(j\omega)d\omega\end{aligned} \tag{1-10}$$

对于无限域傅立叶变换，其基本性质可以表示为

$$x(t)\pm y(t)\doteqdot X(j\omega)\pm Y(j\omega) \tag{1-11}$$

$$\lambda x(t)\doteqdot\lambda X(j\omega) \tag{1-12}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}\doteqdot j\omega X(j\omega) \tag{1-13}$$

$$x(t)y(t)\doteqdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)Y(j\omega-j\Omega)d\Omega \tag{1-14}$$

由上可看出，应用傅立叶变换，在无限大区域内，可以将线性微分方程中的原函数变成相应的变换式进行代数运算。

根据定义，在有限域内的傅立叶变换的变换式

$$X_{v}=\frac{j^{2}}{T}\int_{0}^{T}e^{-jv\omega t}x(t)dt \tag{1-15}$$

其反变换后得到的原函数为：

$$x(t)=\frac{1}{j^{2}}\sum_{v=-\infty}^{\infty}e^{jv\omega t}X_{v} \tag{1-16}$$

式中　X_v——原函数$x(t)$的变换式，其值称为第v次谐波的幅

值，v为整数，位于$-\infty$到$+\infty$区间内；

$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$　　原函数$x(t)$的角频率。

下面仍然用符号"$\doteq$"表示有限域内傅立叶变换的符号，这样，式(1-15)和式(1-16)可以写成

$$X_v=\frac{j^2}{T}\int_0^T e^{-jv\omega t}x(t)dt$$

$$\doteq x(t)=\frac{1}{j^2}\sum_{v=-\infty}^{\infty}e^{jv\omega t}X_v \tag{1-17}$$

对于有限域内的傅立叶变换，其基本性质可以写成：

$$x(t)\pm y(t)\doteq X_v\pm Y_v \tag{1-18}$$

$$\lambda x(t)\doteq\lambda X_v \tag{1-19}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}\doteq jv\omega X_v+j^2\frac{x(T)e^{-jv\omega T}-x(0)}{T} \tag{1-20}$$

$$x(t)y(t)\doteq\frac{1}{j^2}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}X_\mu Y_{v-\mu} \tag{1-21}$$

傅立叶变换对解决有关周期过程的研究课题是一个有力的工具。

三、微分变换

为了求解时变系数微分方程所描述的时变参数系统和非线性微分方程所描述的非线性系统，可以采用微分变换。微分变换同积分变换一样，也可应用于求解常系数线性微分方程所描述的系统。

下面介绍微分变换的概念。

定义 1　假设函数$x(t)$对自变量t求k阶导数，则有

$$\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}=\varphi(t,k) \tag{1-22}$$

若将连续自变量t固定在点$t=t_i$，则函数$\varphi(t,k)$变为$\varphi(t_i,k)$，k为整数。于是上式可写成

$$X(k)=\varphi(t_i,k)=\left[\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right]_{t=t_i} \tag{1-23}$$

上式称为函数$x(t)$当$t=t_i$时的微分变换的正变换式，$X(k)$称为$x(t)$的微分变换式。例如：

对于正弦函数

$$x(t)=\sin\omega t$$

进行k次微分，可以得到自变量为k和t的函数

$$\varphi(t,k)=\omega^k\sin\left(\omega t+\frac{\pi k}{2}\right)$$

固定t值，如$t=0$时，则有

$$X(k)=\omega^k\sin\frac{\pi k}{2}\quad(k=0,1,2,\cdots,\infty)$$

$X(k)$即称为当$t=0$时$x(t)$的微分变换式。

定义 2　设函数$x(t)$能展开为台劳级数，且台劳级数收敛，则微分变换式可变换成原函数，其变换式为

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_i)^k}{k!}X(k) \tag{1-24}$$

上式称为微分变换的反变换式。

采用符号“$\doteq$”作为微分变换符号，这样，原函数和它的微分变换式的关系可以写成

$$X(k)=\left[\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right]_{t=t_i}$$

$$\doteq x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_i)^k}{k!}X(k) \tag{1-25}$$

为了方便，我们称形如式(1-23)所示的微分变换为WF-1变

换。这里WF表示“微分”的意思，1表示变换式的比例系数。

根据微分变换的定义，不难证明微分变换具有如下基本性质：

$$x(t)\pm y(t) \doteq X(k)\pm Y(k) \tag{1-26}$$

$$\lambda x(t) \doteq \lambda X(k) \quad (\lambda\text{为常数}) \tag{1-27}$$

$$\frac{dx(t)}{d(t)} \doteq X(k+1) \tag{1-28}$$

$$x(t)y(t) \doteq \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}X(l)Y(k-l) \tag{1-29}$$

式中 $\binom{k}{l}=\dfrac{k!}{l!(k-l)!}$——二项式系数。

式(1-26)、(1-27)表明，微分变换同积分变换一样仍具有线性性质；从式(1-28)可看出，函数的微分运算经过微分变换后转换成代数运算；从式(1-29)可以看出，两函数相乘经微分变换后变成变换式代数相乘，且需乘以权系数$\dfrac{k!}{l!(k-l)!}$。

初看起来，微分变换计算可能相当烦琐，但实际应用中它的方便性尤其显著，特别是研究非线性系统和时变参数系统，利用计算机应用微分变换来解题，其计算的精确性和快速收敛性非常突出。

积分变换和微分变换求导及乘积的性质比较，如表1-1所示。

根据式(1-25)，若

$$X(k)=\frac{H^k}{k!}\left[\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right]_{t=0} \qquad (k=0,1,2,\cdots,\infty)$$

式中，H为常数，则可求得原函数为

表1-1 积分变换和微分变换求导及乘积性质比较

运算	变换			
	拉普拉斯	无限域傅立叶	有限域傅立叶	微分变换 WF－1
求变换式	$X(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}x(t)dt$	$X(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}x(t)dt$	$X_v=\frac{j2}{T}\int_0^T e^{-jv\omega t}x(t)dt$	$X(k)=\left(\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right)_{t=0}$
用变换式求原函数导数 $\frac{dx(t)}{dt}$	$pX(p)-x(0)$	$j\omega X(j\omega)$	$jv\omega X_v+j2\frac{x(T)e^{-jv\omega T}-x(0)}{T}$	$X(k+1)$
用变换式求原函数之积 $x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} X(q)\times Y(p-q)dq$ $j^2=-1$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\times Y(j\omega-j\Omega)d\Omega$	$\frac{1}{j2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n Y_{v-n}$	$\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}X(l)Y(k-l)$

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} X(k)\left(\frac{t}{H}\right)^k$$

这个结论可以用下面简单的推导得到证明：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H^k}{k!}\left[\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right]_{t=0}\left(\frac{t}{H}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left[\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right]_{t=0}=x(t)$$

类似地，若所求的微分变换式

$$X(k)=M(k)\left[\frac{\partial^k q(t)x(t)}{\partial t^k}\right]_{t=t_0}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,\infty) \tag{1-30}$$

同样可求得其原函数

$$x(t)=\frac{1}{q(t)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^k}{k!}\frac{X(k)}{M(k)} \tag{1-31}$$

其中，$M(k)\neq 0$，表示自变量k为整数的已知函数按比例的 变换情况；$q(t)\neq 0$，表示已知函数变换的核。

我们把形如式(1-30)的微分变换称为WF-$M(k)$变换。若$M(k)=1$，$q(t)=1$，则式(1-30)即变为式(1-23)。由此可知，WF-1变换是WF-$M(k)$变换的特例。在已知的题设条件 下，若核$q(t)=1$，则比例函数$M(k)=H^k$或$M(k)=\frac{H^k}{k!}$，其中 数值H称为比例常数，它的量纲同连续自变量 t 的量纲一致。这时，当$M(k)=H^k$时，微分变换称为WF-H^k变 换；当$M(k)=\frac{H^k}{k!}$时，微分变换称为WF-$\frac{H^k}{k!}$变换。

由上所述，微分变换可以分为下列类型：

WF-H^k变换

$$X(k) = H^k\left(\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right) \doteq x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k \frac{X(k)}{k!} \qquad (1\text{-}32)$$

WF-$\frac{H^k}{k!}$变换

$$X(k) = \frac{H^k}{k!}\left(\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right)_{t=0} \doteq x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k) \qquad (1\text{-}33)$$

微分变换的一般形式可写成

$$X(k) = M(k)\left(\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right)_{t=0} \doteq x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X(k)}{k!M(k)} \qquad (1\text{-}34)$$

式中，$M(k) \neq 0$，$k = 0, 1, 2, \cdots, \infty$。

不同类型的微分变换变换式的求导及乘积的运算比较，如表1-2所示，表中“Λ”表示求导的运算；“$*$”表示变换式乘积的运算。

由表1-2可看出，微分变换WF-1和WF-H^k的求导运算很方便，只要分别用$X(k+1)$和$\frac{X(k+1)}{H}$代替$X(k)$即可；求微分变换WF-$\frac{H^k}{k!}$的变换式的乘积也比较简单，因为这时权系数$\binom{k}{l}$已经消去。

顺便指出，由数学理论可知，台劳级数的系数不仅可以用微分法计算，也可以用柯西积分法计算，但后者较前者复杂。

表1-2　各类微分变换几种运算的比较

运算	变换		
	WF-1	WF-H^k	WF-$\frac{H^k}{k!}$
求变换式 $X(k)$	$X(k)=\left(\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right)_{t=0}$	$X(k)=H^k\left(\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right)_{t=0}$	$X(k)=\frac{H^k}{k!}\left(\frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}\right)_{t=0}$
求原函数 $x(t)$	$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}X(k)$	$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k\frac{X(k)}{k!}$	$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k)$
求变换式的导数	$\varLambda X(k)=X(k+1)$	$\varLambda X(k)=\frac{1}{H}X(k+1)$	$\varLambda X(k)=\frac{k+1}{H}X(k+1)$
求变换式的乘积	$X(k)*Y(k)=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}X(l)Y(k-l)$	$X(k)*Y(k)=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}X(l)Y(k-l)$	$X(k)*Y(k)=\sum_{l=0}^{k}X(l)Y(k-l)$