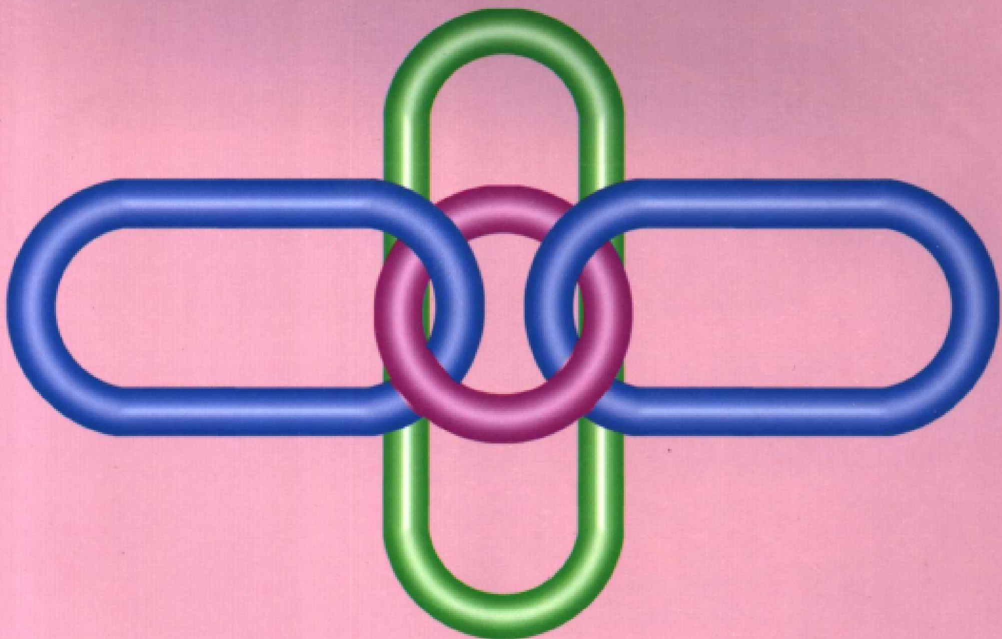
Junior Mathematical Olympiads

奥数精讲与测试

九年级

熊斌 冯志刚 主编
叶声扬 胡军 李建华 编著



学林出版社

Junior Mathematical Olympiads

熊斌

中国数学奥林匹克委员会委员，第45届IMO中国队主教练，第46届IMO中国队领队（中国队在这两次比赛中均取得团体第一），华东师范大学数学系硕士生导师。中国数学奥林匹克高级教练，《数学通讯》“数学竞赛”专栏主持人，《数学教学》、《数理天地》编委、记者。多次担任中国数学奥林匹克国家集训队教练，指导多名学生在IMO上获得金牌，参与全国初中数学竞赛、全国高中数学联赛、西部数学奥林匹克、女子数学奥林匹克、希望杯全国数学邀请赛、中国数学奥林匹克(CMO)、国际青少年城市数学邀请赛的命题工作。在国内外杂志发表文章80多篇，编著、翻译、主编著作百余本，其中与单墫共同主编的《奥数教程》发行尤广，此外还主持编写了相关的电子教材。

冯志刚

理学硕士。上海市上海中学特级教师，中国数学奥林匹克高级教练。长期从事数学竞赛的教学、研究与命题工作，参与西部数学奥林匹克的命题工作，擅长代数与数论。所教学生中累计有2人获IMO金牌，30余人进入国家集训队，40多人次在中国数学奥林匹克（CMO，即“冬令营”）上获奖，200余人获全国高中数学联赛一等奖。作为2003年中国队副领队带队参加了第44届IMO并取得优异成绩，主编或参编十余套竞赛方面的读物，著作有《奥数教程》、《数学奥林匹克一讲一练》、《赛前集训》、《高中竞赛数学教程》、《数学奥赛导引》、《数学归纳法的证明方法与技巧》、《整除、同余与不定方程》，译有《解决问题的策略》等。

上架建议：初中数学奥数

ISBN 978-7-80730-429-6

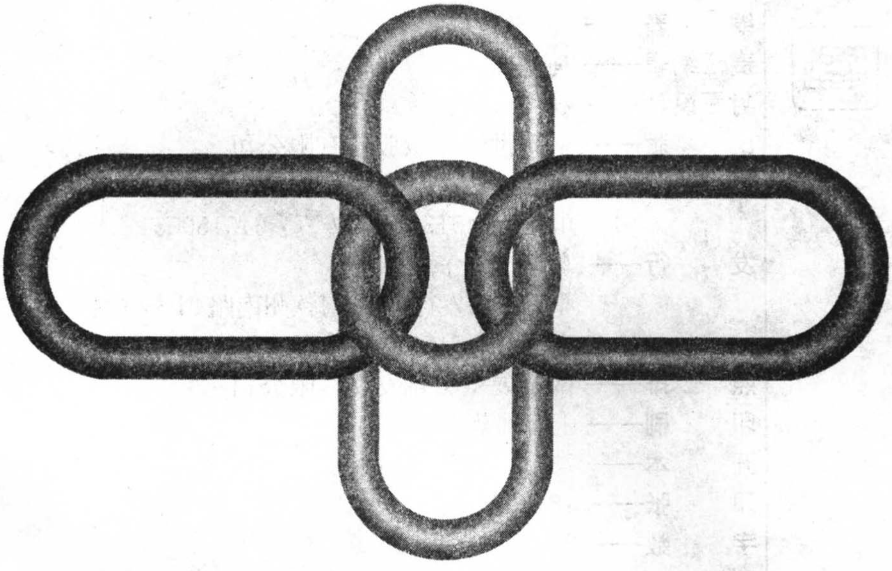
9 787807 304296 >

定价 27.00 元

奥数精讲与测试

九年级

熊斌 冯志刚 主编
叶声扬 胡军 李建华 编著



学林出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数精讲与测试. 九年级/熊斌，冯志刚主编；叶声扬，胡军，李建华编著. —上海：学林出版社，2007.10
ISBN 978-7-80730-429-6

Ⅰ. 奥… Ⅱ. ①熊…②冯…③叶…④胡…⑤李…
Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 121347 号

奥数精讲与测试·九年级

编　　著—— 叶声扬　胡　军　李建华
责任编辑—— 马健荣
封面设计—— 魏　来
出　　版—— 上海世纪出版股份有限公司
学林出版社(上海钦州南路 81 号 3 楼)
电话：64515005　传真：64515005
发　　行—— 新华书店上海发行所
学林图书发行部(上海钦州南路 81 号 1 楼)
电话：64515012　传真：64844088
照　　排—— 南京展望文化发展有限公司
印　　刷—— 上海师范大学印刷厂
开　　本—— 787×1092　1/16
印　　张—— 18.25
字　　数—— 27 万
版　　次—— 2007 年 10 月第 1 版
2007 年 10 月第 1 次印刷
印　　数—— 8000 册
书　　号—— ISBN 978-7-80730-429-6/G·124
定　　价—— 27.00 元

前言

我们都知道数学是科学之母，在科技迅速发展的今天，数学的重要性尤为明显。由于人们深刻地了解到数学的重要性，也意识到应当尽早培养青少年学生对数学的兴趣与数学思维的习惯，因此举办了许多内容丰富的数学活动，数学奥林匹克竞赛就是这些丰富多彩的活动中的一项。

数学奥林匹克竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养创新能力、开拓视野有着非常积极的作用。通过开展数学奥林匹克竞赛活动，可以更好地发现和培养优秀学生，并能提高教师的水平，促进教学改革，为我国数学事业的长期发展提供源源不断的生力军。

本套丛书从小学一年级至高中三年级共12册，将数学奥林匹克竞赛的内容以精讲和测试的形式系统地组织起来，目的是为学生提供一套强化知识、提高数学素养和能力的教材，让学生通过对这套教材的学习，具备和提高参加各种数学竞赛的知识和能力，使学生不仅能把自己课内的成绩提高，而且能在各级各类数学竞赛中取得理想的成绩。

本书的每一讲都有“精讲”和“测试ABC卷”组成，分设三部分内容：

1. 竞赛热点、考点、知识点。将数学奥林匹克竞赛的知识、内容以及当前的热点问题和历届数学奥林匹克竞赛中经常出现的问题给予分析、归纳、阐述和总结。

2. 典型例题精讲。围绕数学竞赛的热点、考点，选择典型的例题，提高对典型例题的分析、讲解，使学生能够掌握基本思想和基本方法，进而提高分析问题和解决问题的能力。

3. 测试ABC卷。有针对性地选择一些名题、新题、好题给学生练习。A卷是“精讲”内容的延伸与拓展，题目难度较小；B卷进一步加强数学竞赛的基本功，突出了解题的基本技巧与方法；C卷是为准备在数学奥林匹克竞赛

中取得优异成绩的同学设计的，题目具有一定的挑战性，是学生发挥自己的创造性、一显身手的试金石。

作者希望同学们在使用本书后，视野开阔了，数学素养提高了，解题与应试的能力加强了，不仅能在课内考试脱颖而出，也能在数学奥林匹克竞赛中出类拔萃。

参加本套丛书编写的作者都是长期在数学竞赛辅导第一线的富有经验的教师，有中国数学奥林匹克国家队的领队、副领队、主教练，还有多次参与各级各类数学竞赛命题的专家，他们丰富的教学经验为本套丛书增色不少。

让我们尽情地享受数学的乐趣，积极地参与数学奥林匹克竞赛吧！

目录

第 1 讲　一元二次方程的解法

知识点、重点、难点

一元方程中，一元一次方程的解法较简单，一般的三次、四次方程的求根公式很繁，四次以上的方程在理论上又无求根公式. 因此，一元二次方程的解法占有重要的地位. 在数学竞赛中，和一元二次方程有关的问题很多，知识性、综合性、技巧性都较强. 这就要求我们不仅要熟练地掌握一元二次方程的基本解法和基本理论，而且要在此基础上能灵活地、综合地运用这些知识和理论以及其他有关的知识.

一元二次方程常用的解法有：

1. 因式分解法. 它基于这样的原理：$f_1 \cdot f_2 \cdots f_n = 0 \Leftrightarrow f_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 中至少有一个为零.

2. 配方法. 它源于开平方法：$f^2 = a(a \geqslant 0) \Leftrightarrow f = \pm\sqrt{a}$.

3. 公式法. 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$，当 $\Delta \geqslant 0$ 时由配方法可导出它的两根为

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{其中 } \Delta = b^2 - 4ac.$$

配方法是公式法的原理和依据，且又在求最大最小值、不等式证明、代数式求值等方面有广泛应用，因此应熟练掌握配方的方法和技巧.

含字母系数的一元二次方程的讨论，导致了题目的千变万化. 但是，如果能灵活运用判别式和韦达定理等知识，就能在解题中想出一些绝妙的解法.

例题精讲

例 1　解方程 $(2x-1)^2 - 3|2x-1| + 2 = 0$.

解 原方程可写成 $|2x-1|^2-3|2x-1|+2=0$，

得 $(|2x-1|-1)(|2x-1|-2)=0$.

由 $|2x-1|=1$，得 $x_1=0$，$x_2=1$.

由 $|2x-1|=2$，得 $x_3=\frac{3}{2}$，$x_4=-\frac{1}{2}$.

原方程的根为 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=\frac{3}{2}$，$x_4=-\frac{1}{2}$.

例2 解方程 $x^2-|2x-1|-4=0$.

解 令 $2x-1=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，以 $\frac{1}{2}$ 为分界点把数轴划分为两个区间，分别求解.

(1) 当 $x<\frac{1}{2}$ 时，则 $2x-1<0$，原方程可以写成 $x^2+2x-5=0$.

所以 $$x=-1-\sqrt{6} \text{ 或 } x=-1+\sqrt{6}(\text{舍去});$$

(2) 当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，则 $2x-1\geqslant 0$，原方程可以写成 $x^2-2x-3=0$.

所以 $$x=3 \text{ 或 } x=-1(\text{舍去}).$$

综上所述，原方程的根为 $x_1=-1-\sqrt{6}$，$x_2=3$.

例3 解关于 x 的方程 $(a-b+c)x^2+2ax+(a+b-c)=0$.

解 (1) 若 $a-b+c=0$，则原方程成为 $2ax+(a+b-c)=0$，

① 若 $a=0$，则 $c-b=0$，原方程为 $0x+0=0$，x 可为一切实数.

② 若 $a\neq 0$，则 $x=\frac{-a-b+c}{2a}$

(2) 若 $a-b+c\neq 0$，则原方程成为 $(x+1)[(a-b+c)x+(a+b-c)]=0$.

得 $x_1=-1$，$x_2=-\frac{a+b-c}{a-b+c}$.

例4 已知首项系数不相等的两个关于 x 的二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0,$$

及 $$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0.$$

(a，b 是正整数)有一个公共根，求 $\frac{a^a+b^b}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

解 由题意知 $a>1$，$b>1$，$a\neq b$. 利用因式分解可解得上述两个方程的根分别为

$$a,\ \frac{a+2}{a-1};\ b,\ \frac{b+2}{b-1}.$$

因为两个方程有一个公共根，则必有

$$a=\frac{b+2}{b-1}\text{ 或 }\frac{a+2}{a-1}=b.$$

上述两式都化简为

$$ab-a-b-2=0.$$

即
$$(a-1)(b-1)=3.$$

所以，由 a、b 都是大于 1 的正整数，得

$$\begin{cases}a-1=1\\b-1=3\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}a-1=3\\b-1=1.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}a=4\\b=2.\end{cases}$$

故

$$\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=a^bb^a=4^2\cdot 2^4=256.$$

例5 若二次方程 $x^2+2px+2q=0$ 有实根，其中 p、q 为奇数.

证明：此方程的根是无理数.

证明 由题设 x_1、x_2 为实根，所以 $\Delta=4(p^2-2q)\geqslant 0$. 但 p^2 是奇数，$p^2\neq 2q$，$\Delta>0$，$x_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2-2q}$. 若 x_1、x_2 是有理数，则 $\Delta=4(p^2-2q)$ 是完全平方数. 于是 p^2-2q 也是完全平方数，设 $p^2-2q=k^2$（k 为奇数）. 由于 p、k 是奇数，则 $p+k$、$p-k$ 均为偶数，不妨设 $p+k=2m$，$p-k=2n$（m、n 为整数）. 则 $2q=p^2-k^2=4mn$，$q=2mn$ 与 q 是奇数矛盾，所以 x_1、x_2 不可能是有理数. 又由 x_1、x_2 是实数，从而 x_1、x_2 是无理数根.

例6 解关于 x 的方程：$2x^3+(1-t)x^2-2tx+(t^2-t)=0$.

解 按字母 t 降幂排列，构成一个关于 t 的二次方程：$t^2-(x^2+2x+1)t+x^2(x+1)=0$，得 $(t-x^2)[t-(2x+1)]=0$，所以 $x^2=t$ 或 $2x+1=t$.

当 $t\geqslant 0$ 时，$x_1=\sqrt{t}$，$x_2=-\sqrt{t}$，$x_3=\dfrac{t-1}{2}$；当 $t<0$ 时，$x=\dfrac{t-1}{2}$.

水平测试 1

A 卷

一、填空题

1. 设方程 $(m^2-1)x^2-(m+1)x+3=0$,当 m ________ 时,是一元一次方程;当 m ________ 时,是一元二次方程.

2. 方程 $(x+1)^3-(x-1)^3=2$,用 ________ 方法较简捷,其根是 ________.

3. 用公式法解 $4x=1-\frac{3}{2}x^2$,其根是________.

4. 将方程 $2x^2+7x+3=0$ 化成 $a(x+m)(x+n)=0$ 的形式,可得 ________.

5. 若 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根,则 $a+b+c=$ ________.

6. 若方程 $(m-1)x^2+x+m^2+2m-3=0$ 有一个根为 0,则 $m=$ ________.

7. 关于 x 的方程 $c^2-4x^2+4bx-b^2=0$,则 $x=$ ________.

8. 若 a 是方程 $x^2+bx+a=0$ 的根,则 $a+b=$ ________.

9. 已知 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$,则 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值是________.

10. 如果对于任意两个实数 a、b,定义 $a*b=a+2b$,解方程:$x^2*(2x)+2*1=0$,可得 $x=$ ________.

二、解答题

11. 用公式法解 $(m-1)x^2-2(m+2)x+m=0$.

12. 若方程 $x^2+bx+1=0$ 与方程 $x^2-x-b=0$ 至少有一个相同的实数根,求实数 b 的值.

B 卷

一、填空题

1. 解方程 $573x^2-11x-584=0$,则 $x=$ ________.

2. 解方程 $x^2-|x|-1=0$,则 $x=$ ________.

3. 当 m ________时,方程 $(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-m)x-2\sqrt{2}=0$ 有一个根是1.

4. 已知 $x+\frac{1}{x}=3$,则 $x^4+3x^3-16x^2+3x-17=$ ________.

5. 已知 b、c 为方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根,且 $c\neq 0$, $b\neq 0$,则 $b=$ ________, $c=$ ________.

6. 若$\sqrt{28-10\sqrt{3}}$是方程$x^2+ax+b=0$的一个根,其中a、b为有理数,则 $ab=$ ________.

7. 若1、$\frac{1}{2}$是一元二次方程$ax^2+bx+2=0$的两个根,则$a=$ ________, $b=$ ________.

8. 若 m 是方程$ax^2+bx+a=0(a\neq 0)$的一个根,则这个方程的另一个根是________.

9. 已知二次方程 $a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)+c(x+3)(x+1)=0$ 有根0与1,则 $a:b:c=$ ________.

10. 已知关于 x 的方程 $(a^2-1)x^2-2(a+1)x+1=0$ 恰有一个实根,则 a 应取值为________.

二、解答题

11. 已知方程 $x^2-19x-150=0$ 的一个正根为 a,求$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a+1\,999}+\sqrt{a+2\,000}}$的值.

12. 若 $a>b>c>0$,在一元二次方程$(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$的两个实数根中,求较大的实数根.

13. 证明:若$-\frac{n}{2m}+\sqrt{k}$是方程$mx^2+nx+c=0$的一个根,则$-\frac{n}{2m}-\sqrt{k}$也是它的一个根.

C 卷

一、填空题

1. 已知 n 是正整数,且 $4n^2+17n-15$ 表示两个相邻正整数之和,则 n 的值

有________个.

2. 方程 $x|x-1|+4|x|-2=0$ 的实根个数是________个.

3. 方程 $||2x+1|-x|=4$ 的解是________.

4. 已知 $m^2=m+1$，$n^2=n+1(m\neq n)$，则 $m^5+n^5=$ ________.

5. 已知关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 无实根，甲因看错了二次项系数解的根为 2、4；乙因看错了某项的符号解的根为 -1、4，则 $\dfrac{2b+3c}{4}$ 的值是________.

6. 设 $p=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$，$q=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则 $p-q$ 的结果是________.

7. 方程 $|x|^2-7|x|+6=0$，各根的和是________.

8. 已知 α、β 是方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根，则 $\alpha^3+8\beta+6$ 的值为________.

9. 设等腰三角形的一腰与底边的长分别是方程 $x^2-6x+a=0$ 的两根，当这样的三角形只有一个时，a 的范围是________.

10. 已知 n 是正整数，方程 $x^2+n^2x+(n-1)=0$. 当 $n=2$ 时，两根为 a_2、b_2；当 $n=3$ 时，两根为 a_3、b_3…；当 $n=100$ 时，两根为 a_{100}、b_{100}. 则代数式 $\dfrac{1}{(a_2-1)(b_2-1)}+\dfrac{1}{(a_3-1)(b_3-1)}+\cdots+\dfrac{1}{(a_{100}-1)(b_{100}-1)}$ 的值等于________.

二、解答题

11. 若三个整数 a、b、c 使得方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 a、b，求 $a+b+c$ 的值.

12. 已知 a、b、c、d 是非零实数，c、d 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根；a、b 是方程 $x^2+cx+d=0$ 的两根，求 $a+b+c+d$ 的值.

13. 已知 $ab\neq 1$，且 $5a^2+787\,643\,150a+7=0$；$7b^2+787\,643\,150b+5=0$，求 $\dfrac{a}{b}$ 的值.

14. 已知 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，求 $\dfrac{2a^5-5a^4+2a^3-8a^2}{a^2+1}$ 的值.

第 2 讲　一元二次方程根的判别式

知识点、重点、难点

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 通过配方可以转化为 $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，即 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$.

根据平方根的意义，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，方程才有实数解；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数解. 我们称 b^2-4ac 为一元二次方程的判别式，记作为 Δ.

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根，分别为 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$；

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根（简称等根，又称重根）$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$；

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根.

反之，亦成立. 即如要方程有两个不相等的实数根，则 $\Delta>0$；如果方程有重根，则 $\Delta=0$；如果方程无实数根，则 $\Delta<0$.

根据方程的判别式 Δ 除了判别方程根的情况外，还可确定某些方程中参数的值或参数的取值范围；证明某些恒等式或条件等式；解某些方程或方程组以及求有关函数的最值问题. 其中只要辅之以韦达定理和不等式（组）的有关知识.

下面我们通过几个例题作一些具体的分析和说明.

例题精讲

例1 如 a、b 为实数，证明：方程 $(x-a)(x-b)=1$ 有两相异实数根.

证明 由 $(x-a)(x-b)=1$，得 $x^2-(a+b)x+ab-1=0$，$\Delta=(a+b)^2-4(ab-1)=(a-b)^2+4>0$，故该方程有两相异实数根.

例2 如果 x 的一元二次方程 $(ac-bc)x^2+(bc-ab)x+(ab-ac)=0$ 有两个相等的实数根，证明：$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$.

证明 因为方程有两个相等的实数根，所以判别式 $\Delta=0$，即 $(bc-ab)^2-4(ac-bc)(ab-ac)=0$. 展开并整理，得 $(ab+bc-2ac)^2=0$，所以 $ab+bc=2ac$，等式两边同时除以 abc，即得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$.

例3 设 a、b、c 为正数，证明：方程 $ax^2+bx+c=0$ 和 $\frac{1}{a}x^2+\frac{1}{b}x+\frac{1}{c}=0$ 中，至多有一个方程有实根.

证明 设两个方程的判别式分别为 Δ_1 和 Δ_2，$\Delta_1=b^2-4ac$；$\Delta_2=\frac{1}{b^2}-\frac{4}{ac}=\frac{ac-4b^2}{ab^2c}$. 如果第一个方程有实根，则 $\Delta_1\geqslant 0$，此时有 $b^2\geqslant 4ac$，于是 $\Delta_2=\frac{ac-4b^2}{ab^2c}\leqslant\frac{ac-16ac}{ab^2c}=-\frac{15}{b^2}<0$，即第二个方程无实数根；反之，如果第二个方程有实根，则 $\Delta_2\geqslant 0$，此时有 $ac\geqslant 4b^2$，于是 $\Delta_1=b^2-4ac\leqslant b^2-16b^2=-15b^2<0$，即第一个方程无实数根.

综合上述两种情况可知，两个方程中至多有一个方程有实根.

例4 已知二次方程 $ax^2+bx+c=0(ac\neq 0)$ 有两个异号的实数根 m 和 n，且 $m<|m|$，试判断二次方程 $cx^2+(m-n)ax-a=0$ 根的情况.

解 因为 m 和 n 异号，且 $m<|m|$，所以 $m<0$，$n>0$.

对方程 $cx^2+(m-n)ax-a=0$ 而言，$\Delta=(m-n)^2a^2+4ac=[(m+n)^2-4mn]a^2+4ac$. 由于 $m+n=-\frac{b}{a}$，$mn=\frac{c}{a}$，所以 $\Delta=a^2(m+n)^2-4mna^2+4ac=a^2(m+n)^2-4ac+4ac=a^2(m+n)^2\geqslant 0$，所以方程必有两个实数根.

例5 解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy-3x+3=0 & ① \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-5z+6=0 & ② \end{cases}$$

解 将方程①变形为 $x^2-(y+3)x+y^2+3=0$，看作为关于 x 的一元二次方程. 由 $\Delta \geqslant 0$ 得 $y^2+6y+9-4y^2-12 \geqslant 0$，于是有 $y^2-2y+1 \leqslant 0$，即 $(y-1)^2 \leqslant 0$，所以 $y=1$. 将 $y=1$ 代入 ① 得 $x^2-4x+4=0$，所以 $x=2$. 由 ②－① 得 $z^2+3x-yz-5z+3=0$，将 $x=2$, $y=1$ 代入得 $z^2-6z+9=0$，所以 $z=3$.

所以原方程组的解为

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3. \end{cases}$$

例6 如图 1，$\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AD 为角平分线，AD 的垂直平分线交 BC 延长线于 E，设 $CE=a$, $DE=b$, $BE=c$.

求证：二次方程 $ax^2-2bx+c=0$ 有两个相等的实数根.

分析 要证明方程有两个相等的实数根，只要 $\Delta=0$ 即可，就是设法证明 $4b^2-4ac=0$. 即 $b^2=ac$，至此我们很自然想到 b 是 a、c 的比例中项，于是可设法通过相似形来达到目的.

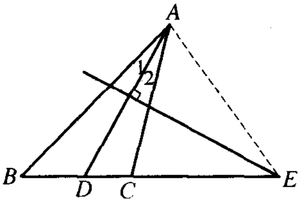


图 1

证明 连结 AE. 因为 E 在 AD 的垂直平分线上，所以 $EA=ED$，$\angle EAD=\angle EDA$. 因为 $\angle 1=\angle 2$，所以 $\angle B=\angle ADE-\angle 1=\angle EAD-\angle 2=\angle EAC$. 又因为 $\angle AEC=\angle BEA$. 所以 $\triangle BAE \backsim \triangle ACE$. 由此得 $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{EC}{EA}$，即 $AE^2=BE \cdot EC$，所以 $DE^2=BE \cdot EC$. 而 $DE=b$, $BE=c$, $EC=a$，所以 $b^2=ac$，即 $b^2-ac=0$. 而对方程 $ax^2-2bx+c=0$ 而言，$\Delta=4b^2-4ac$，所以 $\Delta=4(b^2-ac)=0$. 所以原方程有两个相等的实数根.

说明 本题是几何和代数结合的一道证明题，通过几何的相似形有关判定和性质，再结合一元二次方程根的判别式 Δ，比较顺利地达到了所要证明的结论.

水平测试 2

A 卷

一、填空题

1. 方程 $4x^2-2(a-b)x-ab=0$ 的判别式是________.

2. 关于 x 的方程 $mx^2-2(3m-1)x+9m-1=0$ 有两个实数根，那么 m 的取值范围是________.

3. 当 k 不小于 $-\frac{1}{4}$ 时，方程 $(k-2)x^2-(2k-1)x+k=0$ 的根的情况是________.

4. 方程 $2x^2+3(k-1)x+k^2-4k-7=0$ 一定________实数根.

5. 已知 $\sqrt{a+4}+|b-1|=0$，当 k________时，方程 $kx^2+ax+b=0$ 有两个不相等的实数根.

6. 方程 $(m-1)x^2+2(m-7)x+2m+2=0$ 有两个相等的实数根，则 $m=$________.

7. 关于 x 的方程 $4x^2+6x+m=0$ 没有实数根，则 m 的最小整数值为________.

8. 关于 x 的方程 $(a-b)x^2-2cx+(a+b)=0$ 有两个不相等的实数根且 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三条边，则 $\triangle ABC$ 是________三角形.

9. 方程 $2x^2-(m-1)x=3-m$ 的根的判别式的值是 4，则这个方程的根是________.

10. 已知 a 为实数且使关于 x 的二次方程 $x^2-a^2x+a=0$ 有实根，则该方程根所能取得的最小值是________.

二、解答题

11. 证明：当 m 取任何实数时，一元二次方程 $x^2+2mx+m-4=0$ 有两个不相等的实数根.

12. 已知 a、b 为整数，$x^2-ax+3-b=0$ 有两个不相等的实数根；$x^2+(6-a)x+7-b=0$ 有两个相等的实数根；$x^2+(4-a)x+5-b=0$ 没有实数根，求 a、b 的值.