

从惑到识

数学教学中学生认识的发生原理

黄晓学 著

CONGHUODAOSHI

China University of Mining and Technology Press

Shuxue Jiaoxue Zhong Xuesheng Renshi De Fasheng Yuanli

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

从惑到识

——数学教学中学生认识的发生原理

黄晓学 著

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书以浩繁的文献梳理和丰富的实践研究为基础,将质和量的研究方法相结合,提出了数学教学中从感到识的认识发生原理,揭示了数学教学中学生认识的起源、发生、形成和发展的本质,构建了数学教学中尚识的方法和规律。

本书可作为师范院校相关专业本科生、硕士研究生的教材,亦可供数学教师或相关研究工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

从感到识:数学教学中学生认识的发生原理/黄晓学

著. —徐州:中国矿业大学出版社, 2007. 7

ISBN 978 - 7 - 81107 - 654 - 7

I. 从… II. 黄… III. 数学教学—教学研究 IV. O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 104822 号

书 名 从感到识——数学教学中学生认识的发生原理

著 者 黄晓学

责任编辑 何 戈

责任校对 杜锦芝

出版发行 中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市中国矿业大学内 邮编 221008)

网 址 <http://www.cumtp.com> E-mail: cumtpvip@cumtp.com

排 版 中国矿业大学出版社排版中心

印 刷 徐州中矿大印发科技有限公司

经 销 新华书店

开 本 850×1168 1/32 印张 9 字数 234 千字

版次印次 2007 年 7 月第 1 版 2007 年 7 月第 1 次印刷

定 价 28.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

序

黄晓学同志的著作《从感到识——数学教学中学生认识的发生原理》，以浩繁的文献梳理和丰富的实践研究为基础，采用质的研究方法和量的研究方法相结合，提出了数学教学中“从感到识”的认识发生原理，揭示了数学教学中学生认识的起源、发生、形成和发展的本质，构建了数学教学中尚识的方法和规律。这是一项具有创建性和前瞻性的理论研究成果，也是一项源于实践又指导实践的研究成果，具有填补国内数学教育研究空白的意义，其理论价值和实践价值均堪称道。

具体说来，其研究及研究成果具有如下特点：

(1) 研究方法的综合性。本研究除了采取质的方法与量的方法相结合外，大量使用了人种学的方法，这是目前数学教育界使用较少的方法。正是本研究采取了新的研究方法，使得本研究的成果具有许多方面的创新。本研究除考证了一些思想家、哲学家和教育家的思想外，对著名数学家如笛卡尔、希尔伯特、克莱因、波利亚、陈省身、华罗庚等进行了详细的分析和考证，这在数学教育研究中几乎没有见到；本研究通过广泛的调查所得出的“5个结论”对数学学习和数学教学也具有指导意义。

(2) 结构严谨，论证周密。本书从开始提出“从感到识：数学教育的新视界”，到“数学教师的教学认识从感到识”结束，首尾相应，一脉相承；从“数学教学中学生认识的起源、发生、形成和发展”，到“数学教育尚识观”的提出，思路清晰，论证充分，分析到位。全书结构合理，层次分明，表述精练，行文流畅。

(3) 数学特点鲜明，数学味较浓。在已有的数学教育研究中，

许多研究的确像作者所说的那样,对于解释和指导当下数学教学中学生认识的发生和发展显得不够鲜活,不能反映与时俱进的精神,不能采用本土化的话语方式,不便于记忆与应用,更为重要的是没有突出数学的发生特点.本研究克服了这一弱点,在“哲学”、“教育”与“数学”的结合上形成了“合力”.

(4)“从感到识”的学生认识的发生原理具有原创性.“数学教学中学生认识的发生”,是数学教育的本源问题,是数学教育赖以展开的前提与基础.本书提出了“从感到识”的学生认识发生原理,而且从“过程维度”与“缄默维度”两个方面进行了分析,尤其是对学生认识的逻辑起点——“惑”和终点——“识”展开了详细的研究,提出了自己独特的见解,填补了数学教育研究的空白.

(5)“4 环节学习理论”和“4 阶段教学理论”对数学教学实践具有重大的指导价值.本书提出的学生认识的“生惑、积学、致知、增识”4 个环节,以及在此基础上建立的“诱惑、导学、启知、发识”4 阶段教学理论,有其深刻的哲学基础、心理学基础和社会学基础,从新的、更高的层面上回答了“数学课堂教学究竟该如何展开”这一难题.

(6)“数学教育尚识观”很有新意.本书在指出“多数教学没有围绕重要的教学目标,用基本的观点来提出问题和安排学习活动”的前提下,并通过大量的现实课堂教学的观察、诊断和分析,提出了“数学教育是通过数学对人进行的教育.数学教育的可贵之处在于通过数学可以培育人的知识上的鉴赏力,即所谓的‘识’”,即“数学教育尚识观”,这是一种全新的数学教育观念.

综上所述,这是一部优秀的学术论著,反映出作者具有较深厚的基础理论功底及较高的研究能力和学术水准,也展示了作者潜在的发展前景.

杨 骞

2007 年 5 月 1 日

前 言

认识的生长问题自皮亚杰发生认识论创立以来备受关注的
问题,但就数学教学中学生认识的生长问题的研究是比较贫乏的。
基于国际上相关研究的已有成果,融合多学科的视角,结合对中国
本土的教育理论及数学课堂研究实践的反思和提炼,作者提出并
研究了数学教学中“从惑到识”的理论和策略框架。

本书从“过程维度”和“缄默维度”两个方面进行分析,尤其从
过程维度,沿着数学教学中的“惑、学、知、识”的思路,提出并研究
了“生惑、积学、致知、增识”4环节学习理论,以及在此基础上建立
的“诱惑、导学、启知、发识”4阶段教学理论,分析了“从惑到识”的
哲学、心理学和社会学基础,阐释了贵在尚识的数学教育观,提出
了“让鲜活的思想在数学课堂中流淌”的命题。所提理论从新的、更
高的层面上回答了“数学课堂教学究竟该如何展开”这一难题。

本书采用定性研究为主、定量研究为辅的研究方法,首先,对
“从惑到识”原理涉及到的“惑”与“识”的已有研究进行梳理,指出
理解“从惑到识”原理的二重维度,分析“从惑到识”原理的理论基
础和实用价值;然后基于过程维度构建了数学教学中学生“从惑到
识”的认识活动过程理论,特别是对“增识”的基础与机制进行了探
索性研究;同时对识的结构与功能及识的发展现状和影响学生从
惑到识的主导因素进行了探索 and 调查;在此基础上针对数学教学
中“识”的缺失,提出数学教育贵在尚识的命题,并给出数学研课和
数学课堂中的尚识方法;最后就一些有待进一步研究的问题进行
了初步探讨,并给出了几种教学境界观。

本书的特色及主要成果:

(1) 提出数学教学中“从感到识”的认识发生原理。“从感到识”可以由两个维度来理解。一个是过程维度的“从感到识”，它包括“惑、学、知、识”，类似佛学里的“苦、集、灭、道”四谛法；一个是缄默维度的“从感到识”，它就是缄默认识的“from-to”结构，其中“惑”代表缄默认识的辅助意识，“识”代表缄默认识的集中意识。从无到有会生“惑”，从有到无须增“识”。

(2) 对数学教学中学生认识的逻辑起点和终点的分析。起点在惑，惑具有未竟性、情感性、动力性和动态性。数学教学中学生认识的发生有4个逻辑必要条件，创设惑境是促进学生认识发生的根源。终点在识，对数学而言的识是分析鉴别知识经融会贯通获致个人见解的能力，包括预见力、判断力、鉴赏力、洞察力和看问题的能力、提问题的能力。提出“数学教育贵在尚识”和“让鲜活的思想在数学课堂中流淌”的命题，遵循识力生长的3个阶段引导和培养学生的识。

总之，本书埋下了“发生教学论”思想的种子，揭开了发生教学论研究的序幕。在本书的撰写过程中，参考、引用了许多研究成果和材料，作者都尽量注明出处，在此一并表示感谢。

在本书的形成过程中，自始至终得到了单增教授、涂荣豹教授、杨启亮教授、喻平教授、杨骞教授、曹一鸣教授、王光明教授、宁连华副教授等的鼓励、支持和帮助，深以致谢。

本书的顺利完成和出版，是在徐州师范大学人事处、数学科学学院、基础教育研究中心的领导和中国矿业大学出版社的领导与编辑的大力支持、帮助下实现的，一并致以衷心的谢意。

由于作者水平有限，时间仓促，难免有疏漏和不妥之处，敬请读者指正。

作者

2007年3月

目 录

0 绪论	1
0.1 选题的缘由、问题的陈述与研究的意义	1
0.2 国内外关于本课题的相关研究的 现状与存在的问题	4
0.3 研究的设计思路、方法、内容与创新之处	15
1 从感到识:数学教育的新视界	19
1.1 关于“感”与“识”的基本认识	19
1.2 过程维度和缄默维度的“从感到识”	24
1.3 数学教学中“从感到识”原理的理论基础	37
1.4 数学教学中学生“从感到识”过程的价值分析	58
2 数学教学中学生认识的起源:生感	70
2.1 数学教学中学生认识的发生根源:感境	70
2.2 数学教学中学生认识的发生条件	78
2.3 诱惑:引发一些可以驾驭的认知冲突 引导主体初步参与	83
3 数学教学中学生认识的发生:积学	90
3.1 数学教学中学生认识发生的方式与途径: 积极学习与蓄积观念	90
3.2 数学教学中学生认识发生的活动机制:	

建构学生主体活动	102
3.3 解感求识之道:先猜后证	108
3.4 导学:开展个体探究 引导主体充分参与	112
4 数学教学中学生认识的形成:致知	118
4.1 致知观	118
4.2 致知的特征	122
4.3 致知求识之道:直觉、推断与洞察	123
4.4 启知:探知学生水平 引导主体深入参与	127
5 数学教学中学生认识的发展:增识	131
5.1 增识的基础	131
5.2 增识的机制	140
5.3 识的层次	151
5.4 发识:发表师生的见识 引导主体综合参与	157
6 尚识的数学教育	162
6.1 识的现状调查	163
6.2 影响学生识的形成的因素分析	175
6.3 数学教育贵在尚识	182
6.4 尚识的数学教学案例及其分析	204
6.5 让鲜活的思想在数学课堂中流淌	219
7 数学教师的教学认识从感到识	231
7.1 数学教师的解感艺术与教学境界	231
7.2 基于“二重原理”的数学课的研究框架	238
7.3 论知识生长点与数学说课	247
7.4 教师对数学教学的认识从感到识	255

目 录

附录.....	265
附录 1 基于“从感到识”的数学教学案例	265
附录 2 数学鉴赏力调查表	268
附录 3 “勾股定理”说课稿	270

0 绪 论

人生之惑,着实太多,它既可能促使人为解惑而奋发向上,又可能使人陷入困惑的泥潭无法自拔.一位数学家曾经说:“我的生活遭遇到太多的疑惑,解除这些疑惑,是我生命时钟的发条.疑惑越多,发条就越紧,我的生活就越有意义.”正是凭着解惑的动力,他成就了辉煌的人生.本研究的选题本身也是一个“从惑到识”的过程.

0.1 选题的缘由、问题的陈述与研究的意义

作者的困惑就是数学教学中学生的认识到底是怎么发生和发展的?数学教学中学生认识的逻辑起点和终点究竟是什么?近年来,通过经典理论的学习和研课实践以及导师的思想启迪,我逐渐形成了这样一个理念:从“惑”到“识”可以作为数学教学中学生认识的发生原理.

一般而言,每一思想理论都至少有两个来源:一是一定时期的社会实践;二是思想理论本身的历史继承性和渊源.特殊而言,作为研究生的思想还存在第三个来源,这就是导师的思想启迪.具体来说,本选题思想的前两个来源分别是:第一来源就是两年来的数学研课实践(行动研究和案例分析),即以采集到的数学课(50节数学课)为基础,以改善数学教学、提高对数学教学的认识和改善数学教学发生的情境为目标的研课实践.可以说,现场采集的课堂数据和永久保存的教学录像及研课经历是本选题研究的思想土壤.第二来源就是皮亚杰的《发生认识论原理》、杜威的《思维与教

学》、弗利德曼的《中小学数学教学心理学原理》、波兰尼的《个人知识》以及 John D. Bransford 等编写的 *How People Learn* 等经典著作所表现的思想方法。第三来源是三位恩师思想的启迪：单增教授给我们上“解题研究”课和平时交流中经常提到“识”的重要性，我捕捉到一个“识”字；杨启亮教授给我们上“教学论”课以及在阅读其《困惑与抉择》时我捕捉到一个“惑”字；涂荣豹教授带领我们品读皮亚杰的《发生认识论原理》和数学研课时经常提到从无到有的探究教学和发展学生认识力的问题，我捕捉到学生认识的发生问题值得研究。这样，有了这些想法后，我不断寻找事实、资料和证据，经分析鉴别和融会贯通后获得了个人的见解，这就是本书的选题。

本书研究的对象是数学教学中学生认识的起源、发生、形成和发展问题，对这个问题的理念性回答就是“从感到识”，“从感到识”作为一种理念，贯穿本书的始终。

之所以用“发生原理”这个词无非是想用名词、概念、事实来说明客观存在的教学认识规律，是对教学认识规律性的一种认识。具体来说，“从感到识”可以由两个维度来理解。一个是过程维度的“从感到识”，它包括“惑、学、知、识”，类似佛学里的“苦、集、灭、道”四谛法；一个是缄默维度的“从感到识”，它就是缄默认识的“from-to”结构，其中“惑”代表缄默认识的辅助意识，“识”代表缄默认识的集中意识。

数学教学中的学生认识是学生个体认识，是学生个体在教师主导下的认识，这种认识主要通过掌握人类的数学经验认识世界和发展自身。在数学教学中，学生对某一数学新内容的认识（或数学内容的新认识）本质上是一个从无到有，然后从有到无的过程。从无到有会生“惑”，从有到无须增“识”。

那么，究竟什么是“惑”？什么是“识”？这两个概念在不同的语境中有不同的含义。从教学论的视角，作者认为，惑是认识主体

在其生长过程中,因与自然界和他人的相互作用,所表现出来的认识结构中的已有阐释系统紊乱而新的阐释系统尚未建立的一种过渡状态的心理活动现象或心理状态.这里的阐释系统的本质是源于个体的认知内化机制.简单地说,“惑”就是在环境中学生可以观察到,但是并不了解或不明晰的一种状态,就像是我们走到了十字路口或进入了山洞,为了辨明方向或鉴别有价值的石头,面临诸多抉择而产生疑惑、困惑或迷惑,解惑的欲望促使我们要作出明智的选择,抉择的结果依赖于我们的识力.关于“识”的含义,也是见仁见智.从发生学角度,作者认为,识是分析鉴别知识经融会贯通而获得个人见解的能力,表现为预见力、判断力、鉴赏力、洞察力、看问题的能力和提问题的能力.如果获得的个人见解称为识,那么这种获得个人见解的能力就是识力.本书后面有时将二者交叉使用,而不严格将“识”与“识力”加以区分.

“识”在人的学习发展与创新过程中的作用是极其重要的.一个人在青少年时代获得的“识”对日后的工作和研究将产生决定性的影响.一个人的“识”的生成主要发生于一个人刚接触到某个学科的时候,他所接触的方向及其思考的方法,与他自己过去的训练和他的个性结合在一起,会造成对这门学科的“识”.比如,代数使人“严格”、几何给人以“洞察”,就是对代数与几何这两门学科的“识”.如果说得再具体点,就是说,学一个东西不只是一要学到一些知识、学到一些技术上面特别的方法,而是要对它的意义有一些了解,有一些欣赏.比如,代数的优点在于它具有机械化运算的力量,缺点在于它阻碍了自由思想和创造,几何的优点在于几何的直观与推理,缺点在于它过于抽象,过分依赖图形.如果能把这两门学科的优点集于一身该是多好的事情.事实上,近代西方哲学之父笛卡尔正是因为同时看到了代数与几何各自的优点和缺点而将它们各自的长处融合在一起而创立了解析几何.除了上述学科方面的“识”以外,在具体数学概念、公式或命题学习时都存在“识”的

问题. 比如, 在讲授“指数、对数函数之间的关系”这节课时, 教师借助函数的解析式、列表、图像这 3 种表示法和学生一起讨论 $y=2^x$ 和 $y=\log_2 x$ 之间的关系并引出反函数概念后, 紧接着追问学生“你们说说看, 反函数到底‘反’在何处?”我觉得能提出这样一个鉴赏性问题就说明教师是富有见识的参与者. 以上所举的例子都是初等数学教学中的识的例子. 在高等数学的教学中更存在“识”的问题. 比如, 学习了欧拉公式 $e^{i\pi}+1=0$ 后, 千万不要放弃欣赏美景的机会, 对该公式进行多视角鉴赏. 该公式虽然不可思议, 确是千真万确的真理. 她的神秘、她的美不仅体现在该公式令人迷惑的发明源泉, 而且体现在它把数学中代表不同时代特点具有不同出身背景的 5 个最重要的常数 $1, 0, i, \pi, e$ 统一在一个公式里.

本研究认为, 数学教学中, 应把“识”放在重要位置, 激发学生的求识欲, 努力使学生做到见而获识, 学而获识, 知而获识. 在数学教学中为什么要“从惑走向识”及如何才能使学生对数学的认识从惑出发达到识的境界是本选题的研究宗旨.

0.2 国内外关于本课题的相关研究的现状与存在的问题

本课题涉及到教学过程环节、阶段问题, 认识发生的哲学解释和教学发生的条件问题, “惑”与“识”的已有研究问题.

0.2.1 关于教学过程环节、阶段问题

关于教学过程环节、阶段问题, 采用古今中外法综述, 然后在此基础上就中外教学过程环节、阶段的特点进行简单比较分析.

0.2.1.1 古代、近代的教学过程、阶段

(1) 中国

① 孔子从学习的角度将教学过程划分为学—思—习—行四

个环节。他认为,学是教学的基础,行是教学的目的,思与习是教学的深入化和熟练化,围绕上述环节,他提出多闻多见、切问近思、时习温故、听言观行等原则。孔子的教学过程观对中国教学过程理论的发展产生了深远的影响。

② 墨子、荀子也提出四环节教学过程观。墨子:亲—闻—说—行;荀子:闻—见—说—行。这两种说法都是把知识分为直接知识(亲、见)和间接知识(闻),都是把行作为教学过程的终结环节。两种说法大同小异,墨子把亲知即获取直接经验作为教学过程的起点,辅之以间接知识学习;荀子则把接受间接知识作为教学过程的逻辑起点,以直接经验的获取辅助。相比之下,荀子的过程论更符合教学活动的特点。

③ 《中庸》五环节教学过程观:学—问—思—辨—行。《中庸》把学的过程概括为一个完整的公式:“博学之,审问之,慎思之,明辨之,笃行之。”并把“弗措(不停止)”作为维持学习活动达到学习目的的重要心理条件。

④ 朱熹的六环节教学过程观:学—问—思—辨—习—行。朱熹把《中庸》五环节论与孔子“时习温故”观相结合,提出六环节观点,他不仅认为学、问、思、辨、行是教学的必然程序,而且强调学习需要多次反复练习,不断复习,才能加深理解,达到熟练巩固。同时时习温故的目的是为学习新知识打下牢固基础。一方面,“温故方能知新”;另一方面,“温故又要知新”。朱熹的教学过程模式代表着中国传统教学过程的经典模式。

(2) 西方

① 苏格拉底:普遍概念—启发问答—定义,教学过程是由普遍概念开始,经过问答启发,达到构成特殊事实的基本概念的更恰当的定义的过程。

② 昆体良:摹仿—讲述—练习,认为教学过程是以摹仿为前提,以讲述为重点,以练习为根本,教学情形是:教师朗读,学生复

诵;教师讲评,学生记诵;学生评论比较、复述、理解。

③ 捷克教育家夸美纽斯认为教学过程是由感觉—记忆—理解—判断四个环节构成的。教学从感觉开始,经过记忆、思考达到理解,最后培养学生的判断能力。

④ 赫尔巴特派:感觉—记忆—理解—判断;准备—呈现—联想—概括—应用。赫尔巴特根据他的“统觉”原理,把教学过程看做一个新旧观念联系和系统化的过程,并提出教学的形式阶段理论,感觉—记忆—理解—判断,其后继者莱因将之发展为五阶段教学过程理论。五段教学法对 19 世纪末到 20 世纪初欧美的学校教学产生极大的影响,成为教学过程的基本模式。

⑤ 杜威的“思维教学五步法”:感到困难—提出问题—作出假设—推论评判—验证结论。

0.2.1.2 当代教学过程理论

(1) 中国

① 四段论:感知—理解—巩固—应用(李秉德,1991)或备课/预习—讲课/听课—辅导/复习—作业/运用(关更霞,1992)。

② 五段论:感知—理解—巩固—应用—检查(王策三,1985)或动机—复习旧课—讲授新课—巩固运用—检查(唐中文,1990)。

③ 六段论:动机—感知—理解—巩固—运用—评价(刘克兰,1988)。

④ 七段论:动机—感知—理解—记忆—迁移—应用—评价(曾欣然,1992)或使动/需要—精选/吸摄—提供/储备—设场/模仿—外向/移用—点拨/创设—评价/报偿(胡克,1987)。

⑤ 八段论,传授/摄取—批改/排除—分析/改造—示范/适应—启发/联想—复习/储备—讲解/理解—作业/运用(田龙翔,1988)。

六段论在我国教学过程理论中占主导地位,对教学实践影响也最大。

(2) 西方

① 信息加工理论:信息的输入—编码—加工—储存—译码—输出;动机—了解—掌握—保持—回忆—概括—作业—反馈。

② 情意交往理论:创设情景—提出问题—发现意义—计划决策—总结统整。

③ 结构发现理论:提出问题—创设情景—提出假设—形成概念—评价验证。

0.2.1.3 中外教学过程环节理论比较综述

(1) 我国教学过程环节理论的特点

① 将教学过程看做是一个知行统一的过程;

② 比较侧重于从学生学的角度谈论教学;

③ 侧重于学生的心理活动过程,特别是认知活动过程的研究。

(2) 国外教学过程环节理论的特点

① 侧重于对人思维活动过程的研究;

② 重视人的认知的发展,对认知过程的内在运行机制(元认知监控)进行了深入研究。

但数学研课实践表明,这些环节理论对于解释和指导当下数学教学中学生认识的发生和发展显得不够鲜活,不能反映与时俱进的精神,不能采用本土化的话语方式,不便于记忆与应用,更为重要的是没有突出数学的发生特点。

0.2.2 关于认识起源及教学认识的发生问题

认识的起源具有不同的哲学解释,关于教学的发生条件及教学中学生认识的发生条件的相关研究较少。

0.2.2.1 关于认识起源的哲学解释

关于认识的起源的解释,哲学史上曾出现过经验论(“存在就是被感知”)和唯理论(“我思故我在”),心理学史上曾出现行为主