面向新世纪课程教材
Textbook Series for the New Century

大学数学

（理工类）上册

陈光曙　主　编
陈学华　夏海峰　徐新亚　副主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向新世纪课程

Textbook Series for the New Century

大学数学

（理工类） 上册

陈光曙 主 编

陈学华
夏海峰 副主编
徐新亚

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本教材根据普通高等院校理工科数学课程教学要求和当前高等院校高等数学教育教学改革的形势,由长期从事大学数学教学的一线教师执笔编写.全书全面而系统地讲解大学数学的知识,分上、下两册,共十章内容.上册包括向量代数与空间解析几何,函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,无穷级数,多元函数微分学与多元函数积分学;下册包括常微分方程、概率统计以及线性代数等内容.每章均配备了适量的例题和一定数量的习题.

本教材编写时,在保持传统数学教材的结构严谨、逻辑性强等风格的基础上,积极吸收近年来同类教材改革的成功经验,结合作者教学实践中的切身体会以及历年考研数学试题的命题要求,加强了章节内容间的联系和融合,对传统高等数学教材的内容进行了必要的精简和梳理,并力求做到语言准确、系统完整、例证适当、通俗易懂、好教易学.

本教材可作为普通高等院校理工科非数学专业大学数学的教学用书,也可供任课教师和相关专业人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.上册/陈光曙主编.—上海:同济大学出版社,2007.2

面向新世纪课程教材.理工类

ISBN 978-7-5608-3397-2

Ⅰ.大… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 158033 号

大学数学(理工类)上册

陈光曙 主编

陈学华 夏海峰 徐新亚 副主编

责任编辑 曹 建 责任校对 谢惠云 封面设计 李志云

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021—65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 25

印 数 1—5100

字 数 500000

版 次 2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-3397-2/O·294

定 价 35.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前　　言

本教材根据普通高等院校理工科数学课程的教学要求和当前高等院校高等数学教育教学改革的形势，由长期从事大学数学教学的一线教师执笔编写而成. 全书包括向量代数与空间解析几何、微积分学、常微分方程、概率论与数理统计、线性代数等内容.

在编写过程中，我们在力求保持传统高等数学教材的结构严谨、逻辑性强等风格的基础上，积极吸收了近年来同类教材改革的成功经验，结合我们自己在教学实践中的切身体会以及历年研究生入学考试数学考试的命题要求，在各章节内容的联系与融合方面下了一番功夫，力求做到语言准确、系统完整、例证适当、通俗适用. 在每一章最后都配备了适量的习题，分为 A，B 两类. 其中 A 类为基本题，通过练习，以掌握和巩固所学知识的基本概念、基本性质、基本方法，建议将 A 类习题作为作业来完成. B 类习题是提高题，来源于近几年的数学考研真题，有一定的难度和技巧，建议教师选择部分 B 类习题讲解，同时，也建议学生将 B 类习题作为复习时的练习、自测题. 我们还将答案附于书后，以帮助学生检测学习效果和巩固相关知识.

本教材可作为普通高等院校理工科非数学专业高等数学的教学用书，也可供任课教师参考.

本教材分上、下两册，共十章内容. 上册内容为向量代数与空间解析几何，函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，无穷级数，多元函数微分学，多元函数积分学；下册内容为常微分方程、概率统计、线性代数. 其中，第一章、第四章、第九章由陈光曙执笔；第二章、第三章、第八章由徐新亚执笔；第五章、第六章、第七章由夏海峰执笔；第十章由陈学华执笔. 全书最后由陈光曙统稿. 在编写过程中，得到了阎超栋、王管等老师的大力支持，在此表示感谢.

浙江大学邵剑教授、李大侃教授审阅了本书，提出了许多宝贵意见和建议，谨此表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中的疏漏、错误和不足之处难免，恳请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编　者
2007 年 1 月

目　次

前　言
第一章　向量代数与空间解析几何……（1）
第一节　向量与坐标……（1）
第二节　向量的运算……（5）
第三节　平面与空间直线……（12）
第四节　空间曲面与空间曲线……（20）
习题一……（27）
第二章　函数、极限与连续……（31）
第一节　函　数……（31）
第二节　数列的极限……（41）
第三节　函数的极限……（46）
第四节　极限存在准则　两个重要极限……（53）
第五节　无穷小的比较……（57）
第六节　函数的连续性……（59）
习题二……（66）
第三章　一元函数微分学……（75）
第一节　导数的概念……（75）
第二节　求导法则……（79）
第三节　高阶导数……（87）
第四节　隐函数和参数方程所确定的函数的导数……（89）
第五节　微　分……（94）
第六节　中值定理……（99）
第七节　洛必达法则……（103）
第八节　泰勒公式……（106）
第九节　函数的单调性与极值……（111）
第十节　函数的凹凸性　函数作图……（117）
习题三……（124）
第四章　一元函数积分学……（135）
第一节　不定积分……（135）
第二节　定积分……（146）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第三节 广义积分…………………………………………………………(161)
第四节 定积分的应用…………………………………………………………(166)
习题四…………………………………………………………(180)
第五章 无穷级数…………………………………………………………(187)
第一节 数项级数…………………………………………………………(187)
第二节 幂级数…………………………………………………………(200)
第三节 傅里叶级数…………………………………………………………(213)
习题五…………………………………………………………(227)
第六章 多元函数微分学…………………………………………………………(233)
第一节 多元函数、极限与连续 …………………………………………………………(233)
第二节 偏导数与全微分…………………………………………………………(241)
第三节 复合函数与隐函数的微分法…………………………………………………………(249)
第四节 偏导数的几何应用…………………………………………………………(256)
第五节 多元函数的极值…………………………………………………………(263)
习题六…………………………………………………………(275)
第七章 多元函数积分学…………………………………………………………(281)
第一节 二重积分…………………………………………………………(281)
第二节 三重积分…………………………………………………………(300)
第三节 重积分的应用…………………………………………………………(310)
第四节 曲线积分…………………………………………………………(317)
第五节 曲面积分…………………………………………………………(338)
第六节 场论初步…………………………………………………………(352)
习题七…………………………………………………………(363)
参考答案…………………………………………………………(373)

第一章　向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法研究几何学. 为了把代数运算引入到几何中来,我们可以通过向量来建立坐标系,把空间的几何结构有系统地代数化、数量化,从而使得某些几何问题可以更简洁地得到解决. 另外,向量在其他一些学科也有着广泛的应用.

第一节　向量与坐标

在日常生活中,我们经常遇到许多的量,如时间、质量、长度等,这些量在规定的单位下,都可以由一个数来完全确定,这种只有大小的量叫做数量. 另外还有一些量,它们不仅有大小,而且还有方向,如位移、力、速度等,这种量叫做向量.

一、向量的定义

定义 1.1.1　我们把既有大小又有方向的量称为**向量**,或称为**矢量**.

通常,我们用有向线段来表示向量,有向线段的起点与终点分别称为向量的起点与终点,有向线段的方向表示向量的方向. 而有向线段的长度表示向量的大小. 起点为 A、终点为 B 的向量记为$\overrightarrow{AB}$. $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为向量,印刷时用黑斜体字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示,如图 1-1 所示,书写时用$\vec{a}$,$\vec{b}$ 表示.

我们称向量$\overrightarrow{AB}$的大小为向量的模或长度,记为$|\overrightarrow{AB}|$. 下面我们给出特殊的向量.

模等于 1 的向量称为单位向量,与向量 $\boldsymbol{a}$ 具有相同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,常记为 $\boldsymbol{a}^0$. 模为 0 的向量称为零向量,记为 $\boldsymbol{0}$,零向量的起点与终点重合.

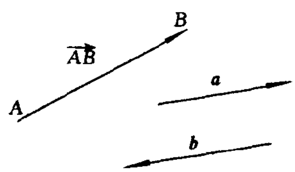

图 1-1

由于我们把向量看为有向线段,因此像对待线段一样,如果向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 所在的直线相互平行(垂直),我们称向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 相互平行(垂直),记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$). 类似地,也可称一个向量与一条直线或一个平面平行(垂直)等.

定义 1.1.2　如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等而且方向相同,那么,称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

从向量相等的定义看,两个向量是否相等,与它们的起点无关,只由它们的

模和方向决定，所以，以后我们可将向量的起点任意选取，而模和方向不改变，这样的向量通常称为自由向量．即自由向量在空间可以任意平行移动．

必须注意，由于向量不仅有大小，而且还有方向，因此，模相等的两个向量不一定相等，因为它们的方向未必相同．

另外，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模相等、方向相反的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 称为互为反向量，记为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$或 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$．显然，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$互为反向量．

如果一组向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 平行于同一直线（平面），我们称向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 为共线（面）的向量组．

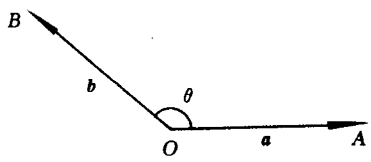

图 1-2

如果有两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，如图 1-2 所示，取 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，称 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $\theta=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$．

显然，当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线且同向；当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线且反向；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互垂直．

二、空间直角坐标系

类似于平面解析几何中的平面直角坐标系的建立，我们可以建立空间直角坐标系，从而可以建立空间的点与有序数组的对应关系，便于用代数的方法研究几何问题．

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位．这三条轴分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴．通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以$\frac{\pi}{2}$角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向．如图 1-3 所示，图中箭头的指向表示 x 轴、y 轴、z 轴的正向，这样的三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**．记为 $O\text{-}xyz$，点 O 叫做**坐标原点**．

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面．x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫做 yOz 面和 zOx 面．

在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中，设 P 为空间一定点，我们过 P 点分别作垂直于x 轴、y 轴、z 轴的三个平面，交点依次为 A,B,C（图 1-4），这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x,y,z，于是，空间的一点 P 就唯一地确定了一个有序数组(x,y,z)；反之，如果给定一有序数组(x,y,z)，我们可以在 x 轴上取坐标为

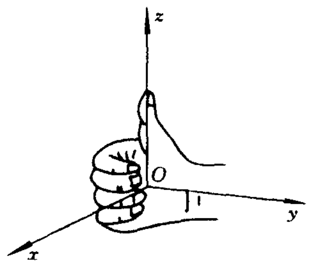

图 1-3

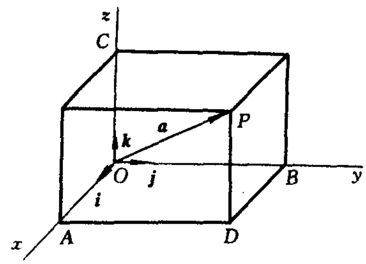

图 1-4

x 的点 A，在 y 轴上取坐标为 y 的点 B，在 z 轴上取坐标为 z 的点 C，然后过 A，B，C 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面，其三个平面的交点就是由有序数组 (x, y, z) 所确定的唯一的点 P.

这样，就建立了空间的点 P 和有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系，这组数 (x, y, z) 是点 P 的坐标. x, y, z 分别称为点 P 的横坐标、纵坐标和竖坐标，记为 $P(x, y, z)$.

三个坐标平面把空间划分成八个区域，每一个区域都叫做**卦限**，如图 1-5 中所示的八个卦限，按排列顺序Ⅰ，Ⅱ，…，Ⅷ，依次叫做第Ⅰ卦限，第Ⅱ卦限，……，第Ⅷ卦限.

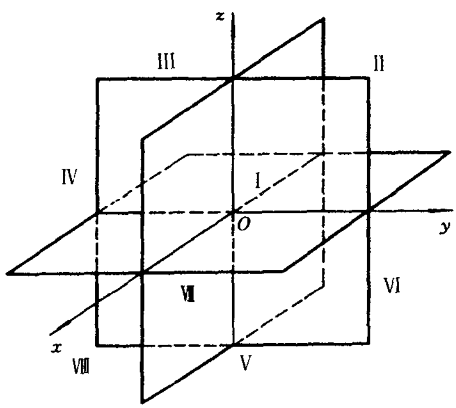

图 1-5

显然，在坐标平面上的点的坐标有一为零. 例如，xOy 面上的点的坐标中 $z=0$. 在坐标轴上的点的坐标有两个为零，例如 x 轴上的点的坐标中，$y=z=0$，原点的坐标为 $(0,0,0)$.

在同一卦限内点的坐标的符号是一致的，但不同卦限内的点的坐标符号就不一样. 各卦限内点的坐标 (x, y, z) 的符号如表 1-1 所示.

表 1-1　　各卦限内点的坐标符号

坐标＼卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

类似于平面上两点之间的距离公式以及定比分点坐标公式，我们给出**空间两点之间的距离公式和定比分点坐标公式.**

空间两点距离公式　设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$为空间的两点，则 P_1，P_2 之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1.1}$$

定比分点坐标公式　设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$为空间的两点，那么，分有向线段 P_1P_2 成定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$的分点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{1.1.2}$$

推论　设空间两点 $P_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2)$，那么，线段 P_1P_2 的中点坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{1.1.3}$$

三、向量的坐标

设 $O\text{-}xyz$ 是空间直角坐标系，O 为坐标原点，$P_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2)$为 $O\text{-}xyz$ 下的两点，

定义 1.1.3　称向量$\overrightarrow{OP_1}$为点 P_1 的径向量，$\{x_1,y_1,z_1\}$为径向量$\overrightarrow{OP_1}$的坐标，通常记为

$$\overrightarrow{OP_1}=\{x_1,y_1,z_1\}. \tag{1.1.4}$$

显然，径向量是起点为坐标原点的向量.

定义 1.1.4　称$\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$为向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标，记为

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}. \tag{1.1.5}$$

易知，向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标是由向量终点 P_2 与向量起点 P_1 所对应点的坐标之差所构成. 由式(1.1.1)知$\overrightarrow{P_1P_2}$的模为

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1.6}$$

例 1　已知 $P_1(1,2,3)$，$P_2(3,7,2)$为空间两点，求向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标以

及$\overrightarrow{P_1P_2}$的模.

解 由定义知$\overrightarrow{OP_1}=\{1,2,3\}$,$\overrightarrow{P_1P_2}=\{3-1,7-2,2-3\}=\{2,5,-1\}$,向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{2^2+5^2+(-1)^2}=\sqrt{30}$.

第二节 向量的运算

本节我们学习向量的各种运算.向量的运算可分为两类,即线性运算(如向量的加法、减法、数乘)和非线性运算(如向量的数量积、向量积等),我们同时给出向量在坐标下的各种运算公式,这些运算在判别向量的几何特性时起着重要作用.

一、向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 1.2.1 设已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,以空间任意一点 O 为起点接连作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,得向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$,则称 $\boldsymbol{c}$ 为两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和;记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求它们的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算叫做向量的加法.

由定义可知,我们有$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$(图 1-6),这种求两个向量和的方法叫做**三角形法则**.

如果把两个向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$为邻边组成一个平行四边形 $OACB$,那么,对角线向量$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$(图 1-7),这种求两个向量和的方法叫做**平行四边形法则**.

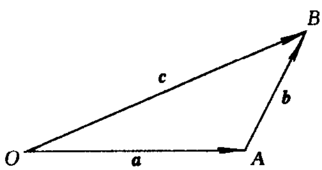

图 1-6

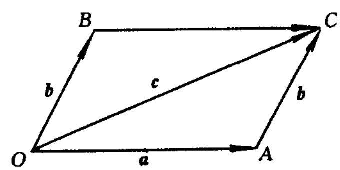

图 1-7

向量的加法满足下面的运算法则:

(ⅰ) **交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(ⅱ) **结合律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法满足交换律、结合律,所以,三个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 相加,不论它们的先后顺序与结合顺序如何,它们的和总是相同的,因而可记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

我们可以推广 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和,记为 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$.推广如下:空间任取一点 O,依次引$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$,$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$,$\cdots$,$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$,则$\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$.

这种求和的方法叫做**多边形法则**.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

2. 向量的减法

定义 1.2.2 当向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的和等于向量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 时，我们把向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求它们的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的运算叫做**向量减法**.

根据向量加法的三角形法则，总有

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA},$$

所以由定义 1.2.2 得，自空间任意点 O 引向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，那么，向量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 1-8). 如果以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为一对邻边构成平行四边形 $OACB$，那么，显然它的一条对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，而另一条对角线向量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 1-9).

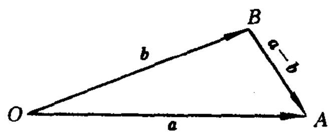

图 1-8

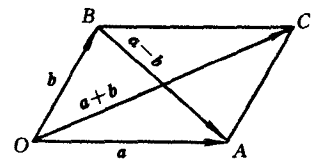

图 1-9

利用反向量，可以把向量的减法运算变为加法运算. 因为如果 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，在等式两边各加 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$，利用 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，因此

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

这表示求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差可以变为求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$ 之和，又因为 $-\boldsymbol{b}$ 的反向量就是 $\boldsymbol{b}$，因此又可得

$$\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

从向量减法的这个性质，可以得出向量等式的移项法则：在向量等式中，将某一向量从等号的一端移到另一端，只需要改变它的符号.

我们还要指出，对于任何的两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，有下列不等式：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

这个不等式还可以推广到任意有限多个向量的情况：

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|.$$

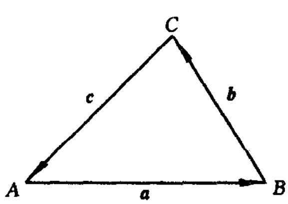

图 1-10

例 1 设互不共线的三向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，试证明顺次将它们的始点与终点相连而成一个三角形的充分必要条件是它们的和是零向量.

证明 必要性. 设三向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 可以构成三角形 ABC，即有 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$(图 1-10)，那么

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0},$$

即　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

充分性. 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，那么，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以，$\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{c}$ 是 $\overrightarrow{AC}$ 的反矢量，因此，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$，所以，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 可构成一个三角形 ABC.

3. 向量的数乘

在向量的加法中，我们也已看到，n 个向量相加仍是向量，特别是 n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的情形，显然，这时的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. n 个 $\boldsymbol{a}$ 相加的和常记作 $n\boldsymbol{a}$.

定义 1.2.3　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向为：当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 我们把这种运算叫做**数量与向量的乘法**，简称为**数乘**.

从这个定义易知，当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=0$，所以 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，这时就不必讨论它的方向了. 当 $\lambda=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的反向量，因此，我们常常把 $(-1)\boldsymbol{a}$ 简写作 $-\boldsymbol{a}$.

已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和它的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，下面的等式显然成立：

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0,\quad 或\ \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

由此可知，一个非零向量乘以它的模的倒数，结果是一个与它同方向的单位向量.

由向量数乘的定义知，如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其中 λ 为一个定的实数.

数量与向量的乘法满足下面的运算规律：

(ⅰ) $1\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(ⅱ) **结合律**　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(ⅲ) **第一分配律**　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(ⅳ) **第二分配律**　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

这里，λ，μ 都是实数.

例 2　设 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证明　如图 1-11 所示，有

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$，

所以　$2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM})$，

但　$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{0}$，

因而　$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

即　$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

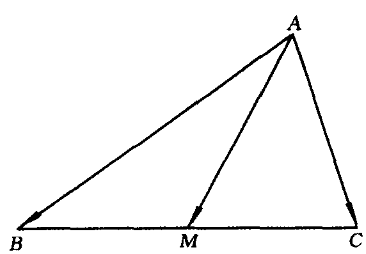

图 1-11

4. 在坐标下向量的线性运算

设 $O\text{-}xyz$ 为空间直角坐标系，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴上同向的单位向量，$P(x,y,z)$为空间一点，则由图 1-4 可知，$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，即$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}$，由径向量的定义1.1.3知

$$\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{1.2.1}$$

又设 $P_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2)$为空间任意两点，由向量的减法知

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2}&=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

从而，由定义 1.1.4 知

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}. \tag{1.2.2}$$

这样，对于空间直角坐标系下的任一向量 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$，称$\{x,y,z\}$为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**，而 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 则为$\boldsymbol{a}$ 的**坐标分解式**.

根据向量加法、减法、数乘的定义以及运算规律，我们可以利用坐标作向量的线性运算.

设两个向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\lambda$ 为实数，则有

(ⅰ) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}$；

(ⅱ) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\}$；

(ⅲ) $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$.

(证明从略.)

由此可见，对向量进行加、减以及数乘运算，只需对向量的各个坐标分别进行相应的运算.

另外，我们给出以下重要的结论：

定理 1.2.1 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Longleftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$. (1.2.3)

推论 设三点 $P_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$，则 P_1,P_2,P_3 共线的充分必要条件是

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}. \tag{1.2.4}$$

例 3 在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中，已知三角形三顶点为 $P_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2,3$，求$\triangle P_1P_2P_3$ 的重心的坐标.

解 如图 1-12 所示，设$\triangle P_1P_2P_3$的三中线为$P_iM_i(i=1,2,3)$，其中顶点P_i的对边上的中点为$M_i(i=1,2,3)$，三中线的公共点为$G(x,y,z)$，因此有$\overrightarrow{P_1G}=2\overrightarrow{GM_1}$，即重心$G$把中线分成定比$\lambda=2$.

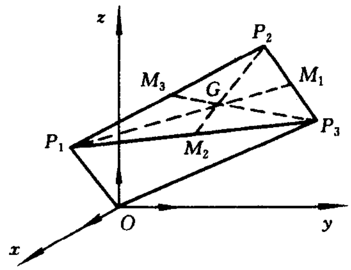

图 1-12

因为M_1为P_2P_3的中点，所以中点坐标公式为

$$M_1\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2},\frac{z_2+z_3}{2}\right),$$

再根据定比分点坐标公式可得

$$x=\frac{x_1+2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)}{1+2}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3),$$

$$z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3),$$

所以$\triangle P_1P_2P_3$的重心为

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

二、向量的非线性运算

1. 两个向量的数量积

定义 1.2.4 两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的模和它们夹角的余弦的乘积称为向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的**数量积**(也称内积)，记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{ab}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}). \tag{1.2.5}$$

注意 两个向量的数量积是一个数量而不是向量. 如果$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，所以有$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$（这里，$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$).

向量的数量乘积具有下面的运算规律：

（ⅰ）**交换律** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

（ⅱ）**关于数因子的结合律** $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$;

（ⅲ）**分配律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. （证明从略.）

根据向量的数量积的定义以及运算规律，易知有下面的公式：

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2;$$

$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2.$$

下面我们给出一个非常重要的定理.

定理 1.2.2 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

例 4 证明平行四边形对角线的平方和等于它各边的平方和.

证明 如图 1-13 所示,在平行四边形 $OACB$ 中,设两边为$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,对角线$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{m}$,$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{n}$,那么,$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,于是

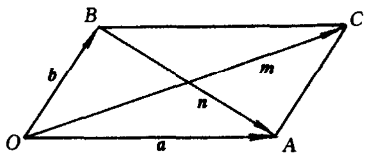

图 1-13

$$\boldsymbol{m}^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$

$$\boldsymbol{n}^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$

所以 $\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$,

即 $|\boldsymbol{m}|^2+|\boldsymbol{n}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$.

这就是所要证明的结论.

2. 两个向量的向量积

定义 1.2.5 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量,记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,它的模是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}). \tag{1.2.6}$$

它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直,并且按 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的顺序构成右手法则(图 1-14),两个向量的向量积是一个向量,向量积有时也称为外积.

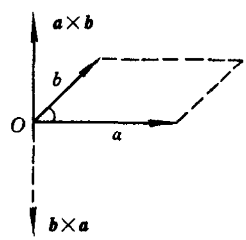

图 1-14

向量积满足下面的运算规律:

(ⅰ) **反交换律** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(ⅱ) **分配律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(ⅲ) **关于数因子的结合律** $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,$\lambda$ 为实数. (证明从略.)

从定义 1.2.5,我们不难得到如下定理:

定理 1.2.3 两个不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模等于以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

这是两个向量的向量积的几何意义.

定理 1.2.4 两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

例 5 证明$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,并说明它的几何意义.

证明

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{0}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\&=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

它的几何意义是:平行四边形面积的两倍等于以它的对角线为边的平行四边形的面积.

例 6 证明$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

证明 因为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

所以 $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2[\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})]=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

3. *在坐标下向量的非线性运算*

在空间直角坐标 $O\text{-}xyz$ 下，设两个向量分别为 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，即 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$. 由于 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$. 我们可以推导出两个向量的数量性、向量性的坐标表达式：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{1.2.7}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\{y_1z_2-y_2z_1,x_2z_1-x_1z_2,x_1y_2-x_2y_1\}. \tag{1.2.8}$$

利用数量积，我们可以求出两个向量的夹角. 事实上，设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$是两个非零向量，则

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{1.2.9}$$

从而利用上面的公式可以求出两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. 特别地，有

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \tag{1.2.10}$$

例 7 设 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,1,-1\}$，求：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2+(-2)\times1+3\times(-1)=-3$；

(2) $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&3\\2&1&-1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}=\{-1,7,5\}.$$

例 8 已知三点 $A(1,0,0)$，$B(3,1,1)$，$C(2,0,1)$，且$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC}=\{-1,1,0\},|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2};$$

$$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CA}=\{-1,0,-1\},|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2};$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times(-1)+(-1)\times0+0\times(-1)=1.$$

所以 $$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}.$$

故 $$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{3}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com