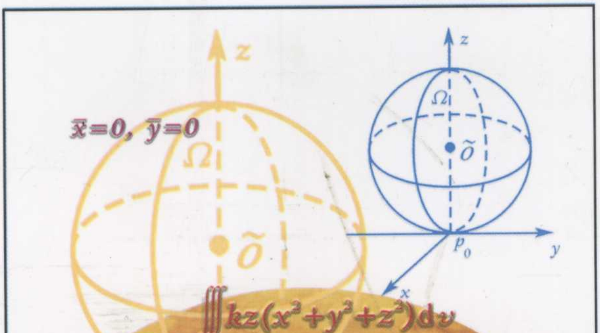
# 高等数学学习辅导

——配合同济高等数学(五版·上册)




王金金　李广民　于　力　编

西安电子科技大学出版社　http://www.xduph.com

# 高等数学学习辅导

## ——配合同济高等数学(五版·上册)

王金金　李广民　于力　编

西安电子科技大学出版社
2007

**图书在版编目(CIP)数据**

**高等数学学习辅导**/王金金，李广民，于力编.
配合同济高等数学(五版·上册)
—西安：西安电子科技大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-5606-1889-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①王…　②李…　③于…
Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O13

**中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 107654 号**

策　　划　杨宗周
责任编辑　杨宗周
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　编　710071
http://www.xduph.com　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2007 年 9 月第 1 版　2007 年 9 月第 1 次印刷
开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张 12.9375
字　　数　317 千字
印　　数　1～5000 册
定　　价　20.00 元

ISBN 978-7-5606-1889-0/O·0084

**XDUP　2181001—1**

# 内容简介

本书是编者在1999年编写的《新编高等数学学习辅导》(西安电子科技大学出版社出版)的基础上，通过近几年“高等数学”精品课程建设，深入进行教学研究和教学改革，并广泛听取了使用这一辅导教材的师生的意见后修编而成的.

本书既是深入学习工科“高等数学”的辅导教材，同时还能作为报考研究生的复习资料. 考虑到本书的双重作用，故每章内容包括了解惑答疑、典型例题、习题选解、自测练习、考研题选. 其目的是针对学生在学习过程中产生的疑难问题，采用问答的形式予以解答；通过对典型例题的分析和求解，引导学生产生联想，从中领悟预示的途径，提高学生解题的能力；对教材中有代表性的习题进行解答，以供学生在学习过程中参考；自测练习则是为学生自我测试提供的；考研题选则是选取有代表性的考研试题并给出解答，旨在让读者在大学本科学习中，首先了解考研要求，提前进入角色，提高学习兴趣，打好数学基础.

本书分上、下两册出版，内容与同济大学数学教研室编写的《高等数学》(第五版)教材上、下册(高等教育出版社出版)配套.

本书对学习工科“高等数学”的同学是一本很好的辅导教材，同时也可作为报考研究生的理想复习资料及“高等数学”任课教师的教学参考书.

# 前　言

本书是编者在 1999 年编写的《新编高等数学学习辅导》的基础上，经过近几年“高等数学”精品课程建设，不断进行教学研究和教学改革，并广泛听取了使用该辅导书的师生的意见后修编而成的. 本书既可作为工科大学生学习“高等数学”的辅导教材，也可作为报考硕士研究生同学的复习资料.

本书每章内容由五部分组成，其中“解惑答疑”收集了编者多年来在教学中发现的疑难问题，有针对性地进行剖析，以加深学生对基本概念、基本理论的理解，指出学生解题过程中容易出现的错误. “典型例题”选择若干有代表性的例题，着重对解题思路、解题方法进行了分析，启发、诱导学生举一反三，掌握解题方法和技巧，达到事半功倍的效果. “习题选解”对同济大学编写的《高等数学》(第五版)中部分习题做了较详细的解答，有的题在解答后，以注释的形式对同类题的解法做了归纳小结或给出了解该类题应特别注意之处. “自测练习”可以让学生自己检查对各章基本内容掌握的情况. “考研题选”选取了部分考研试题并给出解答，使学生在本科学习阶段就能了解考研要求，提前进入角色，激发学习兴趣，打好数学基础.

本书分上、下两册出版，与同济大学编写的《高等数学》(第五版)配套. 上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数. 下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数与微分方程. 本书由三位编者分工编写，其中第一、四、九章由于力教授执笔，第二、三、八、十

章由王金金教授执笔，第五、六、七、十一、十二章由李广民教授执笔，各章都经过反复讨论、修改后定稿.

本书在编写过程中得到了西安电子科技大学应用数学系领导及广大教师的热情支持，他们对本书的编写提出了许多宝贵的修改意见，编者在此致以深深的谢意. 本书的出版得到西安电子科技大学出版社领导及编辑部的大力支持，责任编辑杨宗周同志为本书的出版付出了辛勤的劳动，编者在此一并表示感谢.

由于作者水平有限，经验不足，书中存在的问题恳请读者批评指正.

编　者

2007 年 6 月

# 目　　录

第一章　函数与极限 …… 1
一、解惑答疑 …… 1
二、典型例题 …… 8
三、习题选解 …… 24
习题 1—1(24)　习题 1—2(30)　习题 1—3(32)
习题 1—4(35)　习题 1—5(36)　习题 1—6(38)
习题 1—7(40)　习题 1—8(41)　习题 1—9(43)
习题 1—10(45)　总习题一(46)
四、自测练习 …… 48
五、考研题选 …… 52

第二章　导数与微分 …… 57
一、解惑答疑 …… 57
二、典型例题 …… 62
三、习题选解 …… 75
习题 2—1(75)　习题 2—2(80)　习题 2—3(86)
习题 2—4(90)　习题 2—5(96)　总习题二(101)
四、自测练习 …… 107
五、考研题选 …… 110

第三章　中值定理与导数的应用 …… 113
一、解惑答疑 …… 113
二、典型例题 …… 122
三、习题选解 …… 133

习题 3—1(133)　习题 3—2(139)　习题 3—3(141)
习题 3—4(147)　习题 3—5(159)　习题 3—6(165)
习题 3—7(172)　总习题三(175)
四、自测练习 …… 185
五、考研题选 …… 188

**第四章　不定积分** …… 196
一、解惑答疑 …… 196
二、典型例题 …… 199
三、习题选解 …… 211
习题 4—1(211)　习题 4—2(213)　习题 4—3(218)
习题 4—4(220)　总习题四(225)
四、自测练习 …… 231
五、考研题选 …… 235

**第五章　定积分** …… 238
一、解惑答疑 …… 238
二、典型例题 …… 249
三、习题选解 …… 276
习题 5—1(276)　习题 5—2(280)　习题 5—3(284)
习题 5—4(289)　* 习题 5—5(293)　总习题五(296)
四、自测练习 …… 301
五、考研题选 …… 304

**第六章　定积分的应用** …… 311
一、解惑答疑 …… 311
二、典型例题 …… 316
三、习题选解 …… 331
习题 6—2(331)　习题 6—3(339)　总习题六(344)

四、自测练习 …… 346
五、考研题选 …… 348

第七章　空间解析几何与向量代数 …… 354
一、解惑答疑 …… 354
二、典型例题 …… 361
三、习题选解 …… 375
习题 7—1(375)　习题 7—2(377)　习题 7—3(380)
习题 7—4(382)　习题 7—5(386)　习题 7—6(387)
总习题七(391)
四、自测练习 …… 396
五、考研题选 …… 398

主要参考书目 …… 404

# 第一章

# 函 数 与 极 限

## 一、解 惑 答 疑

### 问题 1　初等函数与非初等函数有什么区别?

**答**　初等函数是由常数和基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数)经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的，并且可以用一个式子表示，否则就是非初等函数，例如

$$y=\sqrt{x^2-4},\ y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\text{ 及 }y=\ln x+\frac{e^{\sin\sqrt{x}}-1}{x^2}$$

等都是初等函数. $y=x^x$ 也是初等函数，因为它是由 $y=e^u$ 与 $u=x\ln x$ 复合而成的. $y=|x|(=\sqrt{x^2})$同样是初等函数，因为它是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合而成的. 而狄利克莱函数

$$y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

是非初等函数. 贝塞尔函数

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots$$

及椭圆函数

$$F(x,\varepsilon)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}},\quad 0<\varepsilon<1$$

也都是非初等函数．因为它们不可能由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤构成．微积分中所讨论的函数绝大多数都是初等函数，有时也讨论某些有用的非初等函数．

**问题 2　下面关于数列极限的论述是否正确？**

**(1) 当 $n$ 充分大以后，数列 $\{x_n\}$ 越来越接近于 $a$，则 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 以 $a$ 为极限．**

**(2) 如果 $\forall\varepsilon>0$，存在自然数 $N$，当 $n>N$ 时，总有无穷多个 $x_n$ 满足 $|x_n-a|<\varepsilon$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．**

**(3) 若对于任意给定的正整数 $k$，总存在正数 $N$，当 $n>N$ 时，所有的 $x_n$ 均满足 $|x_n-a|<10^{-k}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．**

**答**　(1) 不正确．因为 $\{x_n\}$ 以 $a$ 为极限是指当 $n$ 充分大以后，$x_n$ 与 $a$ 的差的绝对值小于预先给定的任意小的正数 $\varepsilon$，即 $|x_n-a|$ 随着 $n$ 的增大而趋于 0；而 $x_n$ 越来越接近于 $a$，只能表明 $|x_n-a|$ 越来越小，并不能保证 $|x_n-a|$ 趋于 0．例如，$x_n=1+\frac{1}{n}$，随着 $n$ 的增大，$x_n$ 越来越接近于 0，但 $x_n\not\to 0(n\to\infty)$．正确的说法应当是，当 $n\to\infty$ 时，$x_n$ 与 $a$ 无限地接近，要多么接近就有多么接近，则 $\{x_n\}$ 以 $a$ 为极限．

(2) 不正确．由数列极限的几何解释知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 在几何上表示两点：① 在点 $a$ 的任何 $\varepsilon$ 邻域 $U(a,\varepsilon)$ 中都包含了数列 $\{x_n\}$ 的无限多个点；② 在 $U(a,\varepsilon)$ 以外，最多只有 $\{x_n\}$ 的有限多个点．而题设之条件仅满足①而不满足②，故不能说 $\{x_n\}$ 以 $a$ 为极限．

例如，取

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}, & n\text{ 为奇数}\\ 1, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

在 $U(0,\varepsilon)$ 中包含了数列 $\{x_n\}$ 的无限多个点，但显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

(3) 正确. 因为对于任意给定的正数 $\varepsilon$，总可以取适当的正整数 $k$ 使 $10^{-k}<\varepsilon$，对于上述 $k$，由题设存在正数 $N$，当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<10^{-k}<\varepsilon$，所以由极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

**问题 3　数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{|x_n|\}$ 是否同敛散?**

**答**　若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{|x_n|\}$ 一定收敛，且当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 证明如下：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，从而 $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$.

反之，若 $\{|x_n|\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 可能收敛，也可能发散. 例如，$\{|(-1)^n|\}$ 是收敛的，但 $\{(-1)^n\}$ 却发散. 如果 $\{x_n\}$ 恒正或恒负，那么 $\{x_n\}$ 与 $\{|x_n|\}$ 同敛散. 此外，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 这是一个今后经常要用到的结论.

**问题 4　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=1$，对吗?**

**答**　不对. 尽管我们可以由极限的定义知道，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$，但是在使用商的极限运算法则时有一个条件：分母的极限不能为零. 由此可知，当 $a\neq0$ 时，结论是正确的；当 $a=0$ 时，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在，也可能不存在，即使存在，也不

一定等于 1.

例如，数列$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}[2+(-1)^n]\right\}$，虽然有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，但极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\right]$$

不存在. 又如，数列$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

**问题 5　当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 不以 $A$ 为极限的分析定义是什么？**

**答**　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$ 的分析定义是：存在一个正数 $\varepsilon_1$，对任意给定的 $\delta>0$，总有点 $x_\delta$ 满足 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$，使 $|f(x_\delta)-A|\geqslant\varepsilon_1$.

例如，证明$\lim\limits_{x\to 2}x^2\neq 3$，按上面的定义，只要找出符合要求的 $\varepsilon_1$ 和 $x_\delta$ 即可. 因为在点 $x_0=2$ 附近，$f(x)=x^2$ 总可以取到大于 4 的函数值，于是可取 $\varepsilon_1\leqslant 4-A=4-3=1$，并在点 $x_0=2$ 附近找一点 $x_\delta$，使 $f(x_\delta)>4$. 由此分析，证明如下：

取 $\varepsilon_1=1$，任给 $\delta>0$，取 $x_\delta=2+\frac{\delta}{2}\in U(2,\delta)$，有

$$|f(x_\delta)-A|=|x_\delta^2-3|=\left|\left(2+\frac{\delta}{2}\right)^2-3\right|>1=\varepsilon_1$$

所以

$$\lim_{x\to 2}x^2\neq 3$$

**问题 6　无穷多个无穷小之和的极限是否为无穷小？**

**答** 我们知道，有限多个无穷小的和仍然是无穷小. 但是，把“有限多个”改为“无穷多个”，结论就不一定成立了.

例如：(1)
$$x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}$$

因为
$$x_n=\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+(n-1))=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

在这里，无穷多个无穷小之和是常数.

(2) 若
$$x_n=\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\cdots+\frac{n-1}{n^3}$$

则
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^3}=0$$

在这里，无穷多个无穷小之和仍是无穷小.

(3) 若
$$x_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{n-1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

则
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^{\frac{3}{2}}}=+\infty$$

这个例子说明，无穷多个无穷小之和还可能是无穷大.

### 问题 7 函数极限与数列极限之间有什么关系？

**答** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或$\infty$)的充分必要条件是：对任何收敛于$x_0$的数列$\{x_n\}$($x_n\neq x_0$)，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$(或$\infty$)(证明略).

由此，我们可以得到数列极限在讨论函数极限时的一些应用.

(1) 为了证明函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，常用的方法是找出

一个收敛于 $x_0$ 的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，使对应的函数值数列$\{f(x_n)\}$为无穷大；或者找出两个收敛于 $x_0$ 的数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$ $(x_n\neq x_0, y_n\neq x_0)$，使$\{f(x_n)\}$与$\{f(y_n)\}$有不同的极限.

**例** 证明极限$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

**证** 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n}=1$；取 $y_n=\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{y_n}=0$. 所以，极限$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

(2) 为了证明 $f(x)$在 $D$ 上无界，常用的方法是找出数列$\{x_n\}\subset D$，而$\{f(x_n)\}$为无穷大数列.

(3) 为了证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$，常用的方法是找出一个数列$x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，而$\{f(x_n)\}$收敛.

**例** 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在点 $x=0$ 的邻域内无界，但当 $x\to 0$ 时 $f(x)$却不是无穷大.

**证** 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，有 $f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$，

所以 $f(x)$在 $x=0$ 的邻域内无界.

另一方面，取 $y_n=\dfrac{1}{n\pi}$，当 $n\to\infty$ 时，$y_n\to 0$，而$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\pi\sin n\pi=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq\infty$.

(4) 为了求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，可以先找一个收敛于 $x_0$ 的数列$\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$，求出$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，然后再证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例如，先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，再用夹逼准则证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

根据函数极限与数列极限的这一关系，反过来有时也可以利用函数极限的结果去求相应的数列极限.

例如，已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，则由于 $x_n=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$$

事实上，求函数极限的方法比求数列极限的方法多，所以大量的求函数极限的方法能给数列极限的计算带来一些方便.

### 问题 8　无穷大量与无界函数有什么区别和联系？

**答**　无穷大量是指在自变量的某一变化过程中，对应的函数值的一种变化趋势，即绝对值无限制地增大. 其定义中的不等式 $|f(x)|>G$，要求当自变量变化到某一阶段后的一切 $x$ 都要满足. 而无界函数是以否定有界函数来定义的，它是反映自变量在某一范围时，对应的函数值的一种性态. 其定义中的 $|f(x)|>M$，只要求自变量在此范围内有一个 $x$ 满足即可(尽管 $M$ 与 $G$ 一样，都是任意大的正数).

无穷大量与无界函数的联系是：如果 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近一定无界；反之不一定成立. 例如，$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界，但当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)$

不是无穷大量.

**问题 9　若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，是否存在 $x_0$ 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 使 $f(x)$ 在该邻域内连续?**

**答**　不一定. 例如，令

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，而在点 $x=0$ 的任何一个邻域内都有间断点. 事实上，$f(x)$ 除了在点 $x=0$ 连续外，在 $(-\infty, +\infty)$ 内的其它任何点都不连续.

**问题 10　为什么不说初等函数在其定义域内连续，而说在定义区间内连续?**

**答**　我们知道，基本初等函数在其定义域内都是连续的. 但是，初等函数在其定义域内却不一定连续. 例如 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$ 是初等函数，定义域是 $x$ 轴上的一列孤立点：$x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$，函数在这些孤立点的邻近没有定义，因此，也就没有连续性可言.

但是，如果初等函数的定义域内包含有区间，那么函数在该区间内一定是连续的. 即所谓一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

## 二、典 型 例 题

**例 1**　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$