Jisuan Liuti Lixue

Jichu Lilun Yu Shiji Yingyong

计算流体力学

——基础理论与实际应用

周正贵◎编著

东 南 大 学 出 版 社

计算流体力学基础理论与实际应用

周正贵 编著

东南大学出版社
·南京·

内容提要

本书主要介绍流场数值计算基本概念，流场计算模型方程的数值计算方法，不可压缩流场数值计算方法，可压缩流场数值计算方法，结构化网格生成方法，多重网格法流场计算加速技术以及网格自适应和TVD离散格式概念，几种典型模型流场的计算实例，并在附录中列出相应的FORTRAN和C语言源代码。

本书可作为高等院校航空宇航推进理论与工程、热能与动力工程及其他相关专业本、专科教材，也可供航空航天、热能工程、天气预报、海浪及风暴潮预报等专业工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学基础理论与实际应用/周正贵编著.
南京:东南大学出版社,2008.3
ISBN 978-7-5641-1136-6

Ⅰ.计… Ⅱ.①周… Ⅲ.计算流体力学—研究 Ⅳ.035

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第020558号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号 邮编:210096)
出版人:江汉
全国各地新华书店经销 南京京新印刷厂印刷
开本:850mm×1168mm 1/32 印张:6 字数:179千字
ISBN 978-7-5641-1136-6/O·69
2008年3月第1版 2008年3月第1次印刷
印数:1—2000册 定价:16.00元
(本社图书若有印装质量问题,请直接与读者服务部联系。电话(传真):025-83792328)

前　言

计算流体力学是一门在流体力学、计算数学、计算机科学与技术基础上发展而形成的新学科。运用计算流体力学理论通过计算机编程，可实现流场计算机模拟（流场数值模拟）。随着计算流体力学理论进展、方法改进以及计算机技术迅速发展，计算流体力学在流体力学相关工业领域得到越来越广泛应用，比如航空航天、热能工程、天气预报、海浪和风暴潮预报等，因此越来越凸现出计算流体力学这门新兴学科的工程应用价值。

本书是一本计算流体力学入门教材，立足于基础和实用性，着重阐述计算流体力学基础理论和基本方法，并适当兼顾最新研究成果。通过典型模型流场的计算实例介绍，阐明理论的应用方法，加深读者对理论的理解和锻炼读者对流场计算程序编制能力。教材力图采用浅显易懂方式较全面地阐述计算流体力学基本理论和实际应用，使读者在较短时间内获得流场计算编程和商用软件应用的基本知识及技能。

本书主要参照编者多年教学过程中使用的南京航空航天大学自编讲义《计算流体力学基础》，并根据自己多年从事计算流体力学科研方面的体会，适当结合国内外相关教材和学术论文研究成果完成。限于编者水平，书中难免有不适和错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

2008 年 1 月 1 日

目　录

1 概述

1.1 计算流体力学的发展及特点简述

流体力学研究主要有三种方法，即实验研究、理论分析和流场数值模拟(CFD,Computational Fluid Dynamics)。实验研究结果真实可靠，是发现流动规律、检验理论和为流体机械设计提供数据的基本手段。但实验也有其局限性，对于大尺寸的研究对象(比如飞机)，必须制作缩尺模型。严格来说，模型流场所有无量纲参数应与真实流动相同，实际上这很难办到，通常只能满足主要而忽略次要。实验还要受测量技术的制约，而且实验周期长、费用高。理论分析方法利用简化流动模型假设，给出所研究问题的解析解，这种方法只能对一些非常简单的流动问题进行求解。不过理论工作者在研究流体运动规律的基础上建立了各种类型控制方程，奠定了计算流体力学基础。

1946 年第一台电子计算机问世以来，计算机技术迅速发展。计算流体力学作为流体力学研究的另一分支应运而生，并借助于计算机技术而快速发展。20 世纪 70 年代至 80 年代，由于受计算机内存和速度的限制，仅能对无黏流场和一些简单的二维黏性流场进行数值计算。80 年代后，随着数值模拟实用价值在工程实际中的展示以及计算机技术的进一步发展，吸引了大批研究人员投身于此项工作，构造出很多适合于各种流动情况的数值计算方法。现在工程中的大部分流动问题都可以用计算机进行数值模拟。在航空上比较复杂的流动，比如飞机全机身绕流(外流问题)、航空发动机各零部件三维黏性流场(内流问题)等都可以采用数值计算比较准确地模拟。对于复杂而实验测量较困难的流动问题，比如航空发动机压气机和涡轮转子叶尖间隙区流动，数值模拟还用来部分代替实验探索流动规律。

流场数值模拟具有耗费小、时间短、省人力等优点，并且还能对实验难以测量的流动进行模拟，因而在工业领域中得到越来越广泛的应

用，如航空航天、核工业、热能工程、天气预报、海浪和风暴潮预报等。

但数值计算所固有的不完善性确定了实验研究和理论分析的不可取代性。首先，数值计算所涉及的流体力学基本方程都是非线性偏微分方程（组），目前尚无成熟的非线性偏微分方程数值计算的数学理论，没有严格的稳定性分析、误差分析和收敛性证明方法。其次方程的离散化引进数值黏性和数值弥散等虚假物理现象，不仅改变了方程的精度而且改变了其性质。

此外，目前的数值模拟还很大程度上受计算机水平（计算机内存和速度）的限制。比如紊流运动，描述其运动的控制方程为经典的Navier-Stokes方程，可直接进行离散求解，即 DNS（Direct Navier-Stokes）方法。但由于流动是三维非定常流，且各种涡的尺度变化较大，如果要数值模拟这种流动，需要足够密的网格节点分布。限于计算机速度，目前这种方法在工程实际中还未能得到应用，但已有人采用这种方法通过对一些简单流动的数值计算，研究该方法对大分离预测精度、紊流附面层流动机理以及对紊流模型进行考核。

目前工程实际中紊流流场计算大都采用雷诺平均 Navier-Stokes 方程方法，即 RANS（Reynolds-Averaged Navier-Stokes）方法。采用 RANS 方法计算所引入的紊流模型属经验或半经验关系式，因此影响计算精度，特别是大分离流动的计算精度。为此，近几年发展出大涡模拟（Large-Eddy Simulation, LES）和分离涡模拟（Detached-Eddy Simulation, DES）方法。这两种方法可有效提高分离流计算精度，但与 RANS 方法比较，计算时间大幅度减少。

总之，在流体力学领域，数值模拟和实验研究、理论分析三者互相促进，任何一种研究方法都不可偏废。但可以肯定，数值模拟较实验研究和理论分析所占的比例将越来越大，这一趋势是确定的。

1.2 流场数值模拟概念

流场数值模拟也叫流场计算机模拟，是计算流体力学的核心内容。它是以计算机为手段，通过数值计算以数据和图像显示，再现研究对象及其内在规律。数值模拟也可以理解为用计算机来做实验。比如一个机翼绕流，通过计算可得到其升力、阻力数值，由图形显示可看到流场

的各种细节:绕流流线,激波的位置、强度,流动分离,涡的生成与传播等。实际上作为连续介质的流体运动是一个无限的信息系统,而计算机的内存以及所能表示的数位都是有限的。数值模拟是在流场中按一定规律排列有限个点(这些点叫网格节点)用这些离散点上的信息近似表示整个连续流场。

流场数值模拟可分为以下几个步骤:

(1) 首先要根据流动特点和所要达到的目的,建立适当的数学模型,即控制方程。仍以机翼绕流为例,如果只要计算机翼的升力,则可用 Euler(欧拉)方程,如果还要知道其阻力情况,则必须采用纳维尔-斯托克斯(Navier-Stokes)方程。此外,还要给出相应的定解条件(初始和边界条件)。

(2) 数学模型建立后,接下来是要寻求高效率、高精度的计算方法。所谓高效率指的是计算速度快,所耗费的计算机时间少。计算方法包括微分方程的离散方法及求解方法,同时还包括边界条件的处理方法等。计算方法的选择要依据于具体所要计算的流场特点。对于一些简单的流动问题,比如叶片通道内二维流场计算,根据目前的计算机水平,所占用计算机机时很少,精度将是首先考虑的因素;又如处于大攻角状态机翼绕流,有较大的吸力面分离,首先必须考虑计算方法对大流动分离的适用性。

(3) 在确定了计算方法后,开始编制、调试计算机程序和进行计算。这部分工作是整个工作的主体,占绝大部分时间。计算程序通常包括 3 个部分:流场计算网格生成、流场计算和计算结果后处理。一个大型计算程序编制和调试是一个非常严密的过程,要求研制人员有扎实的理论基础,同时还要有一定的经验积累和技巧。一个上万条语句(可能包括超过 10 万个字符)程序,如果其中有一个字符错误,则整个程序无法运行或运行后得不到正确结果。计算结果后处理是根据计算所得各网格节点上的流动参数数值进一步计算出所需的结果。比如对于一个翼型绕流,可根据翼型表面网格节点上的压力分布计算出翼型升力;采用图形软件将计算结果形象地显示出来,例如翼型表面压力分布图、翼型绕流流线图等。

一个具有较好工程实用价值、通用性和良好用户界面的流场计算

软件的编写和调试非常耗费人力，因此在流体力学研究中，一方面要根据自身研究的需要进行软件研制，同时也可采用商用软件（目前应用较广泛的商用软件有美国的 Fluent、比利时的 Numeca 等）。只有具备计算流体力学的理论基础，才能提高商用软件的应用能力。同样，一个流场采用同样一款商用软件进行流场计算，不同人的计算结果会存在差别，甚至有可得到的结果不合理或得不到计算结果。

2 流场数值模拟数学模型及定解条件

流场数值模拟数学模型包括流体力学基本方程和用于理论研究的简化模型方程,它们是数值计算的理论基础。在以前所学的流体力学课程中对流体力学基本方程已作了详细论述。其基本出发点是:质量守恒、动量守恒和能量守恒定律。现着重从数值计算角度对常用的一些基本方程作简单介绍。附面层流动在计算时势流区参数可作为已知条件,由于计算机技术的发展,目前普遍采用全流场计算进行数值模拟,很少再采用附面层方程进行计算,因而附面层方程在此不作介绍。

2.1 可压缩非定常黏性流数学模型

可压缩非定常黏性流数学模型是流体力学数值计算中具有普遍意义的数学模型,其守恒型微分形式如下。

连续方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{2.1}$$

运动方程:

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right] \tag{2.2}$$

能量方程:

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}+\nabla\cdot(\tau_{ij}\cdot\boldsymbol{V})+\nabla\cdot(k\nabla T)+\rho q \tag{2.3}$$

上述基本方程一起构成了 Navier-Stokes(以下简称 NS)方程,它可转化成守恒型式(即变量均包含在偏微分符号的里面)。在三维直角坐标系,守恒型方程组为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial z}=\frac{\partial \boldsymbol{E}_v}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_v}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}_v}{\partial z} \tag{2.4}$$

这里 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 为无黏流项,$\boldsymbol{E}_v$、$\boldsymbol{F}_v$ 和 $\boldsymbol{G}_v$ 为黏性流项。式(2.4)中的 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 等都是五维矢量,其表达式为

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (E_t+p)u\end{pmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (E_t+p)v\end{pmatrix},\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ (E_t+p)w\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}+k\dfrac{\partial T}{\partial x}\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{yx}\\ \tau_{yy}\\ \tau_{yz}\\ u\tau_{yx}+v\tau_{yy}+w\tau_{yz}+k\dfrac{\partial T}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zz}\\ u\tau_{xz}+v\tau_{yz}+w\tau_{zz}+k\dfrac{\partial T}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$E_t=\rho(e+\frac{u^2+v^2+w^2}{2})$$

e 为内能，τ_{ij} $(i,j=x、y、z)$为黏性应力张量，在直角坐标系下表达式为

$$\tau_{xx}=\frac{\mu}{3}[4\frac{\partial u}{\partial x}-2(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})],\ \tau_{yy}=\frac{\mu}{3}[4\frac{\partial v}{\partial y}-2(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x})]\ ,$$

$$\tau_{zz}=\frac{\mu}{3}[4\frac{\partial w}{\partial z}-2(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})],\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}],$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}],\ \tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}]$$

由于方程组本身不封闭（未知数个数多于方程个数），还需要补充数学关系式。

第一，状态方程：$e=e(\rho,T)$。对于完全气体 1 有：

$$e=\frac{p}{(\gamma-1)\rho}=\frac{RT}{(\gamma-1)}$$

第二，物性系数与状态参数的关系式：$\mu=\mu(\rho,T)$和 $k=k(\rho,T)$。

对于层流流动，μ 和 k 通常可采用苏士兰(Sutherland)公式确定。

2.2 不可压缩非定常黏性流数学模型

当流动马赫数小于 0.2 时，可认为流体不可压，密度为常数。这时基本方程(2.1)、(2.2)和(2.3)可作一些简化。

连续方程：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V}=0 \tag{2.5}$$

运动方程：

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\rho \boldsymbol{F}-\nabla p+\mu \Delta \boldsymbol{V} \tag{2.6}$$

能量方程：

$$\rho \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}=k \nabla^{2} T+\rho q+\phi \tag{2.7}$$

ϕ 为耗散函数，具体表达式可见气体力学参考书。

在大多数流动实例中，不可压流场中的温度变化对流动的影响微不足道。而黏性系数 μ 仅是温度和密度的函数，因而可近似认为不可压流场中 μ 为常数。对于三维流动，运动方程(2.6)包含 3 个方向分方程，加上连续方程(2.5)共 4 个方程。4 个方程所包含的未知数个数为 u、v、w 和 p，构成了封闭方程组。能量方程与运动方程和连续方程不耦合，因此采用连续方程和运动方程即可求出速度和压力分布。如果要求流场中温度分布，进一步单独求解能量方程。这样求解过程简便，且计算效率较高。

由于连续方程中不出现密度项，求解时有所不便。为此也有采用流函数涡量法进行求解。引入矢量流函数 $\boldsymbol{\psi}$，使

$$\boldsymbol{V}=\nabla \times \boldsymbol{\psi} \tag{2.8}$$

这时连续方程自动满足，运动方程可改写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+[(\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla] \boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)(\nabla \times \boldsymbol{\psi})=\nabla \times \boldsymbol{F}+\frac{\mu}{\rho} \nabla^{2} \boldsymbol{\Omega} \tag{2.9}$$

$\boldsymbol{\Omega}=\nabla \times \boldsymbol{V}=\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi})-\Delta \boldsymbol{\psi}$，为矢量涡量。在平面流动时，$\boldsymbol{\Omega}=\xi \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{k}$，$\xi$ 为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的数值大小，是标量，$\boldsymbol{k}$ 为平面法向。对于二维流动，式(2.9)可简化为

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial F_{y}}{\partial x}-\frac{\partial F_{x}}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho} \Delta \xi \tag{2.10}$$

$$\Delta\psi=-\xi \tag{2.11}$$

流函数涡量法在平面问题中经常采用，其优点是消除了压力项，使 3 个方程组成的方程组转化成 2 个方程求解；但同时 ξ 边界条件较难处理，并且不适用于向三维流计算推广。

2.3 无黏流数学模型

对于气体流动，在远离固体壁面处，流体的黏性作用很小，可以忽略不计，于是可得到无黏流基本方程。对方程(2.4)忽略掉方程右边黏性项，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial z}=0 \tag{2.12}$$

$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 表达式同方程(2.4)。当进口流场均匀，且流场中没有产生很强的激波时，流动可以视作无旋，引入速度势 φ，有

$$\boldsymbol{V}=\nabla\varphi \tag{2.13}$$

这时定常的速度势满足方程

$$\begin{aligned}(a^2-u^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(a^2-v^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+(a^2-w^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\\+2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+2uw\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}+2vw\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}=0\end{aligned} \tag{2.14}$$

这就是全位势方程。对不可压流，u、v、w 远远小于音速 a，全位势方程可简化成

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \text{ 或 } \Delta\varphi=0 \tag{2.15}$$

这是一个典型的椭圆型方程，即著名的 Laplace(拉普拉斯)方程。

2.4 常用的模型方程

流体力学基本方程大都是较复杂的非线性方程(组)，从数值计算角度对其进行分析研究比较困难，迄今为止还没有形成成熟的理论。为了认识基本方程的数学性质，常用一些简单的线性数学方程作为替代进行研究。这些方程具有基本方程的某些特征，称之为模型方程。下面介绍 3 个典型的模型方程，即对流方程、伯格斯方程和抛物型模型方程。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}+\alpha\frac{\partial \xi}{\partial x}=0 \tag{2.16}$$

$\xi(x,t)$为待求解函数,以下同。此方程是双曲型方程,形式类同于一维欧拉方程,因此称为对流方程。方程中 α 相当于对流速度,为研究简便起见,常处理为常数。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}+\xi\frac{\partial \xi}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x^2} \tag{2.17}$$

上式为伯格斯(Burgers)方程。这是一个非线性方程,具有 NS 方程类似的性态,且有一些现成的解析解可供参考,式中系数 β 相当于流体的黏性系数。但因其非线性难以对其进行理论分析,更常用来模拟 NS 方程的是对流-扩散方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}+\alpha\frac{\partial \xi}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{2.18}$$

这个方程和伯格斯方程同属双曲-抛物型方程,但它是线性的,比较简单。当 $\beta=0$ 时,退化成双曲型方程(2.16);当 $\alpha=0$ 时,则变成抛物型方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{2.19}$$

式(2.19)为抛物型方程。此外还有模型方程:

$$\nabla \xi=f \tag{2.20}$$

叫泊松方程,为椭圆型方程,其右端函数项 f 为已知,若 $f=0$,则式(2.20)就成了拉普拉斯方程(2.15)。

2.5　偏微分方程的数学性质及其与流体运动的关系

2.5.1　拟线性偏微分方程组的分类

流体力学基本方程及模型方程属偏微分方程(组),由于方程的复杂性,通常无法采用积分方法求精确解,但可将其离散进行数值求解。流体力学方程(组)的数值求解需符合流动的物理规律,同时边界条件的给定也要遵循流动的物理规律,因此首先介绍方程的数学性质。

考察流体力学控制方程,所有最高阶偏导数项都是线性的,也就是说这些项前仅有一个系数项,系数项是变量的函数,没有最高阶偏导数与偏导数项的乘积,这类方程(组)称为准线性方程(组)。基于此,以下