

WEIYI MOSHIXIA DE TANXING DIJI BIANJIE MONI

位移模式下的 弹性地基边界模拟

■ 严细水 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内 容 简 介

弹性地基有限元计算中的无限边界模拟是一个很重要的问题,作者在实现动静力边界模拟方法统一的基础上,阐述了各种位移模式下的简单动静力边界条件,并将差分和平衡方程引入,得出了一系列具有更高精度的静力边界及低反射的动力边界条件。本书共12章,包括绪论,有限元数值计算,边界条件数值计算结果验证方法,弹性边界,差分一弹性边界,综合弹性边界,粘性边界,粘一弹性边界,差分一粘性,差分一粘一弹性边界,综合粘性边界,综合粘一弹性边界,质量一粘性边界,质量一粘一弹性边界。

本书可供土建、水利、交通、铁道等部门从事设计、研究的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

位移模式下的弹性地基边界模拟 / 严细水著. —杭州:
浙江大学出版社, 2007. 8
ISBN 978-7-308-05536-9

I. 位… II. 严… III. 位移边界—弹性地基—研究
IV. 0343 TU471. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 139212 号

位移模式下的弹性地基边界模拟

严细水 著

责任编辑 王大根 张 真
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷 德清县第二印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 16.75
字 数 292 千
版 印 次 2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-05536-9
定 价 26.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

前 言

弹性地基有限元数值计算分析中,半无限体的模拟是一个比较重要的问题,特别是动力问题,目前已提出了很多边界模拟方法,如粘性边界、粘-弹性边界、无限元、傍轴边界、透射边界等。本书从最简单的弹性边界出发,采用位移模式的方法致力于实现动力-静力边界模拟方法的统一,以及如何更好地模拟动力无限边界。

全书共分 12 章。第 1 章详细地阐述了弹性地基中半无限体的数值模拟问题及常用的边界模拟方法。第 2 章介绍验证边界模拟结果的一些方法。第 3 章对有限元方法进行了介绍。第 4 章提出了和动力粘性边界对应的静力弹性边界。第 5 章提出了静力弹性边界的改进方法之一:差分-弹性边界。第 6 章结合平衡方程提出了弹性边界的改进方法之二:综合弹性边界。第 7 章对位移模式下的粘性边界进行了介绍和分析。第 8 章介绍了位移模式下的粘-弹性边界。第 9 章提出了粘性边界、粘-弹性边界的改进方法之一:差分-粘性边界、差分-粘-弹性边界。第 10 章结合平衡方程提出了粘性边界的改进方法之二:综合粘性边界。第 11 章结合平衡方程提出了粘-弹性边界的改进方法之二:综合粘-弹性边界。第 12 章对波速取值问题进行了分析,提出了质量-粘性、质量-粘-弹性边界,实现了粘性边界到无限元的过渡。

本书的研究,以动力问题为主,同时兼顾静力问题,实现动力-静力边界模拟方法的统一,建立了粘性边界到无限元的逐步过渡方法,同时丰富了静力边界模拟的方法。

本书面向土建、水利、交通、铁道等部门从事设计、研究的人员。

限于作者水平,书中定会存在不妥之处乃至错误之处,恳请读者批评指正。

严细水

2007. 5

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 静力问题的常用边界条件	1
1.2 动力问题的常用边界条件	4
1.3 本书研究的内容	13
1.4 本书的位移假定及符号规定	15
第 2 章 有限元数值计算	17
2.1 有限元方法	17
2.2 有限元基本原理	18
2.3 位移模式及形函数	21
2.4 单元质量矩阵和刚度矩阵的计算	28
2.5 等效节点荷载的计算	33
第 3 章 边界条件数值计算结果验证方法	34
3.1 弹性地基的静力问题经典解析解	34
3.2 弹性地基的动力问题经典解析解	37
3.3 复杂情况下数值计算结果验证方法	39
第 4 章 弹性边界	44
4.1 平面应变问题	44
4.2 轴对称问题	54
4.3 三维空间问题	64
第 5 章 差分—弹性边界	75
5.1 平面应变问题	75

5.2 轴对称问题.....	77
第 6 章 综合弹性边界.....	82
6.1 平面应变问题.....	82
6.2 轴对称问题.....	86
第 7 章 粘性边界	92
7.1 平面应变问题.....	92
7.2 轴对称问题	102
7.3 三维空间问题	107
7.4 粘性边界的误差分析	111
第 8 章 粘—弹性边界	113
8.1 平面应变问题	113
8.2 轴对称问题	120
8.3 三维空间问题	123
第 9 章 差分—粘性、差分—粘—弹性边界	128
9.1 平面应变问题差分—粘性边界	128
9.2 轴对称问题差分—粘性边界	132
9.3 平面应变问题差分—粘—弹性边界	134
9.4 轴对称问题差分—粘—弹性边界	140
第 10 章 综合粘性边界	145
10.1 平面应变频域综合粘性边界.....	145
10.2 轴对称频域综合粘性边界.....	149
10.3 平面应变时—频域综合粘性边界.....	154
10.4 轴对称时—频域综合粘性边界.....	160
第 11 章 综合粘—弹性边界	165
11.1 平面应变频域综合粘—弹性边界.....	165
11.2 轴对称频域综合粘—弹性边界.....	171
11.3 平面应变时—频域综合粘—弹性边界.....	178

11.4	轴对称时—频域综合粘—弹性边界·····	185
第 12 章	质量—粘性、质量—粘—弹性边界 ·····	191
12.1	平面应变问题粘性、粘—弹性、差分—粘性、差分—粘—弹性 边界波速取值分析·····	191
12.2	平面应变问题频域质量—粘性边界·····	207
12.3	平面应变问题时—频域质量—粘性边界·····	212
12.4	平面应变问题频域质量—粘—弹性边界·····	218
12.5	平面应变问题时—频域质量—粘—弹性边界·····	223
12.6	轴对称问题频域质量—粘性边界·····	231
12.7	轴对称问题时—频域质量—粘性边界·····	236
12.8	轴对称问题频域质量—粘—弹性边界·····	242
12.9	轴对称问题时—频域质量—粘—弹性边界·····	247
参考文献	·····	254

第 1 章 绪 论

工程中的有限元计算,其大部分问题的计算区域为有限面积或体积,将有限面积或体积的计算区域进行有限元离散,加上边界条件,就可以得出工程问题的数值解。而在弹性地基中,需离散的工程计算区域为半无限大,而半无限大的地基不能够进行常规的有限元离散,必须截取有限计算区域并加上合适的边界条件才能进行数值计算。

半无限体中的大部分工程问题,其边界条件是在无限远处的位移为零。在截取有限区域后,如何将无限远处位移为零的边界条件转化为有限区域的边界条件,这是一个非常重要的问题。因为有限区域的边界条件不正确,会导致计算结果的误差非常大,从而使数值计算失去意义。对于静力问题来说,不合适的有限区域边界条件导致的计算误差会小一些;而对于动力问题来说,不合适的有限区域边界条件则会导致计算结果误差很大,有时甚至会得出错误的结论。

1.1 静力问题的常用边界条件

1.1.1 截断边界

静力问题的边界处理方法最早是采用较大的有限计算区域来消除截断边界的影响,然后应用有限元方法得出较为精确的解,截断边界越远,计算精度越高。截断边界对计算结果的影响可以参考算例 1.1 和 1.2。

算例 1.1 下卧刚性层地基中平面应变问题的截断边界

为考察截断边界计算的竖向、水平位移解精度与截断边界位置的关系,算例采用单层地基受集中线荷载力作用进行分析,计算模型如图 1.1 所示(对称模型),在计算模型中,取下卧刚性层(基岩面)为深度 $y_0 = 10\text{m}$,侧向截断边界位置 x_0 为 10m、20m、40m 和 200m 四种情况,单位集中作用力作用在一点,

土的泊松比分别为 0.25、0.40 和 0.495, 剪切模量为 $1.7 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, 有限单元的尺寸为 $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ 。计算结果如图 1.2 ~ 1.7 所示。

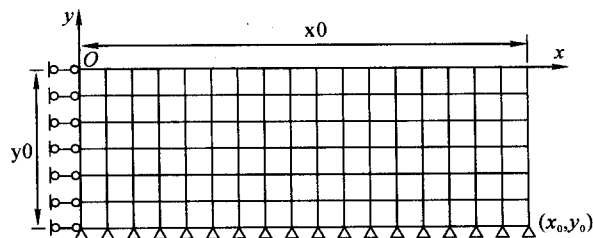


图 1.1 平面应变问题截断边界计算简图

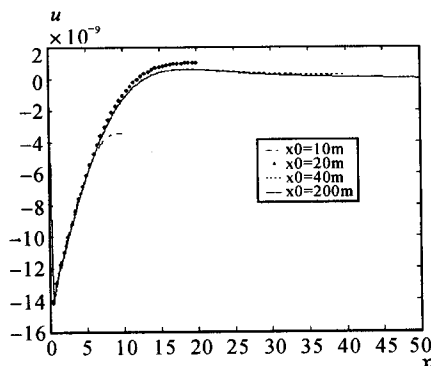


图 1.2 表面水平位移($\nu = 0.25$)

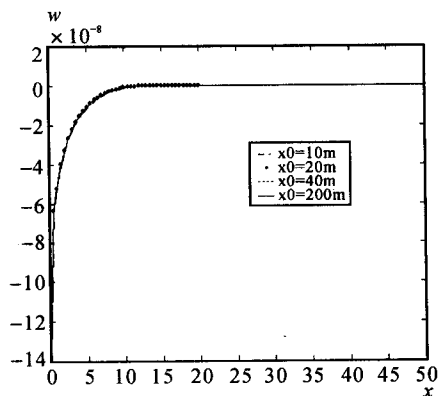


图 1.3 表面竖向位移($\nu = 0.25$)

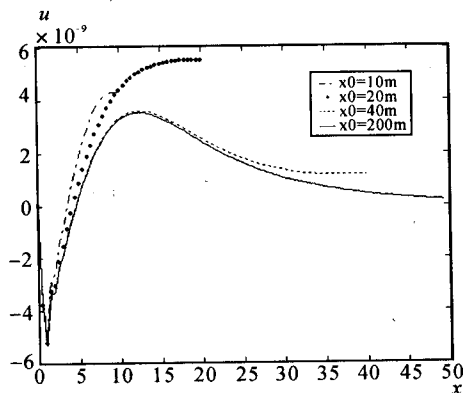


图 1.4 表面水平位移($\nu = 0.40$)

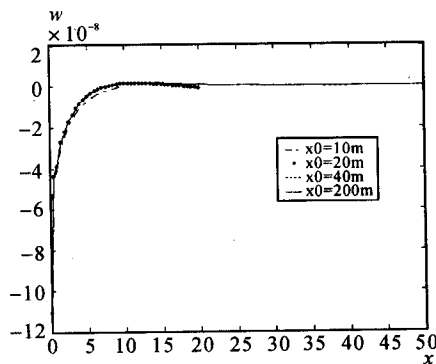
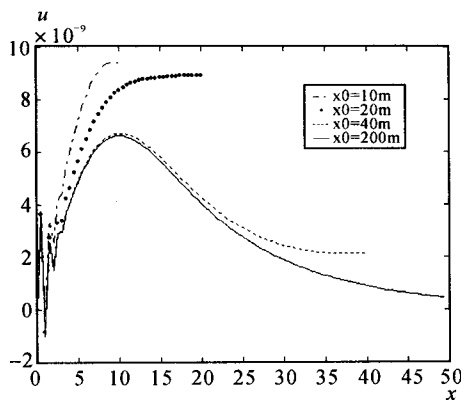
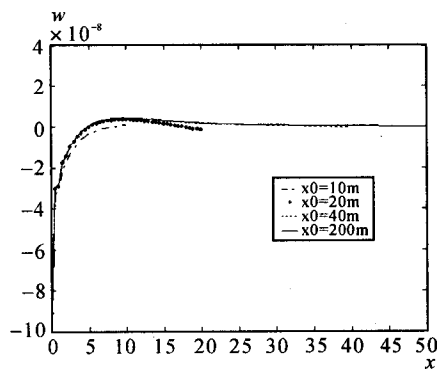


图 1.5 表面竖向位移($\nu = 0.40$)

图 1.6 表面水平位移($\nu = 0.495$)图 1.7 表面竖向位移($\nu = 0.495$)

从计算结果看,有以下几点规律:

(1) 在竖向力作用下,当截断边界的位置大于某一数值时,竖向位移与精确解(大尺寸截断边界)比较接近,而水平位移则与精确解偏差较大。

(2) 在竖向力作用下,高泊松比介质比低泊松比介质的水平位移更偏离精确解。

算例 1.2 均匀地基三维空间问题的截断边界

单位集中力作用于均匀地基中,计算模型如图 1.8 所示(取 1/4 对称模型),集中作用力作用在坐标原点,底部截断边界 $z_0 = 6\text{m}$ (固定边界),侧向截断边界位置 x_0, y_0 为 $3\text{m}, 6\text{m}$ 两种情况(自由边界),土的泊松比为 0.25 ,剪切模量为 $1.7 \times 10^7 \text{N/m}^2$,有限单元的尺寸为 $0.5\text{m} \times 0.5\text{m} \times 0.5\text{m}$ 。计算结果如图 1.9 ~ 1.10 所示。

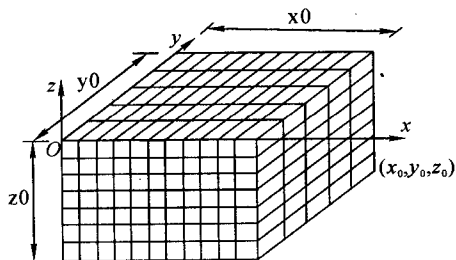


图 1.8 三维空间问题截断边界计算简图

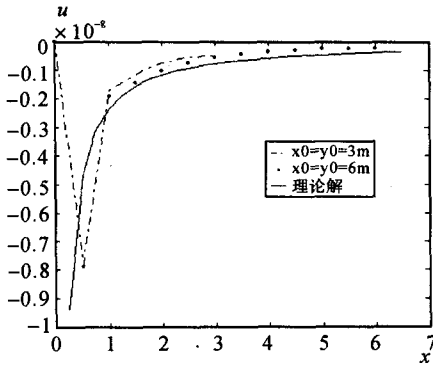


图 1.9 表面水平位移($\nu = 0.25$)

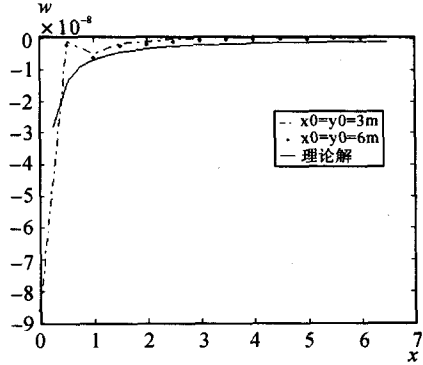


图 1.10 表面竖向位移($\nu = 0.25$)

由计算结果可以看到,截断边界的计算误差比较大,所以对于三维空间这类自由度比较大的计算,必须要采用其他边界条件,以减少自由度。另外,在集中力作用的原点上,计算结果的误差更大,这主要是由于解的奇异性引起的。

1.1.2 静力无限元

无限元这一概念最早是由 Ungless 在他的硕士论文中提出的,当时 Ungless 仅提出了一种较为粗糙的模型骨架。后来,在解决静力学问题方面, Bettess、Anderson 和 Ungless 于 1977 年分别在国际杂志上公开发表了有关无限元方法的论文,对静力无限元在理论方面的发展起到了较大的推动作用,从而很快地引起了人们的重视。1980 年, Bettess 再次对静力无限元的理论进行了补充和完善;1981 年, Medina 提出了轴对称静力无限元的概念; Lynn 对具有 $1/r^n$ 型衰减的静力无限元进行了讨论; Beer 和 Meek 用静力无限元研究了岩石孔洞周围的应力分布问题;1983 年, Zienkiewicz 等人和 Curnier 提出了映射静力无限元的概念,进一步丰富了静力无限元的理论。

1.2 动力问题的常用边界条件

1.2.1 截断边界

截断边界是人们最早使用的边界,它是在离振源一定距离范围内采用有

限元进行离散,在有限区域边界上采用固定边界或自由边界。这种边界既不传播能量,也不吸收能量,波在边界上会产生反射,从而导致计算结果产生非常大的误差。如果使用这种边界,一般要求在计算的时间内,边界上产生的反射波还没有传播到所需研究的区域,这样计算结果才可靠,所以有限元离散的区域需要足够大。

对于时域计算而言,一般要求满足以下的关系:

$$D \geq \frac{1}{2} c_{\max} T \quad (1.1)$$

式中: D 为需研究区域与截断边界的距离, $c_{\max}$ 为介质内最大波速, T 为计算时间。

上式在介质泊松比很大时,介质内的纵波速度将很大,这样所需要的计算区域非常大。

对于频域计算而言,使用截断边界将得不到满意的计算结果,如果所有边界都采用截断边界,位移虚部将为零,这将得出错误的结果。Clayton 用二维 SH 模型($h = 10d$, h 为截断边界的深度, d 为结构基础的特征长度)对底面采取固定边界、侧面采用吸收能量的边界,结果发现计算结果不好。这主要是因为在进行频域计算时,计算时间相当于取无穷大,从而导致边界上的反射波对计算区域产生很大影响。

算例 1.3 均匀地基平面应变问题

计算模型如图 1.1 所示,三角形脉冲集中力作用于均匀地基中的原点,脉冲荷载最大值为 1N,作用时间为 0.02s,计算时间为 0.2s,计算步长为 0.001s;土的泊松比为 0.25,剪切模量为 $1.7 \times 10^7 \text{ N/m}^3$,底部截断边界采用固定边界,侧向截断边界采用自由边界,位置 $x_0 = y_0$ 分别为 6m、12m、24m 三种情况,对应的有限单元的尺寸为 $0.0625\text{m} \times 0.0625\text{m}$ 、 $0.125\text{m} \times 0.125\text{m}$ 、 $0.125\text{m} \times 0.125\text{m}$ 。计算结果如图 1.11 ~ 1.16 所示。

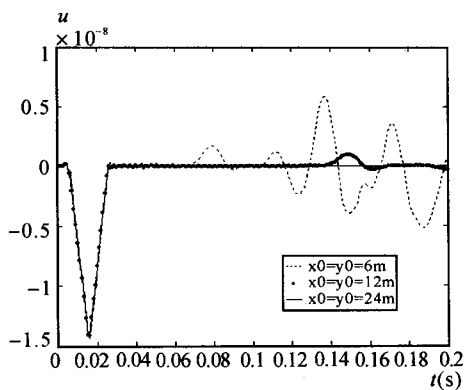


图 1.11 表面 $x = 0.5\text{m}$ 处的水平位移

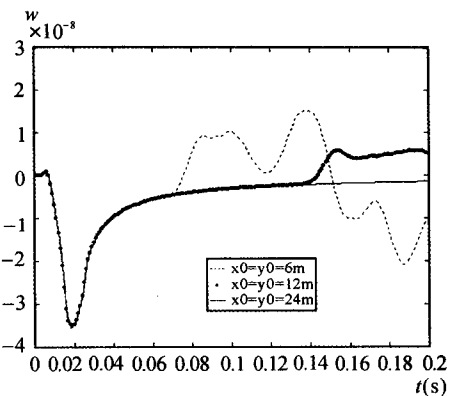


图 1.12 表面 $x = 0.5\text{m}$ 处的竖向位移

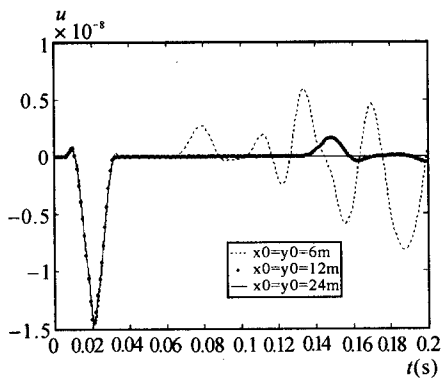


图 1.13 表面 $x = 1.0\text{m}$ 处的水平位移

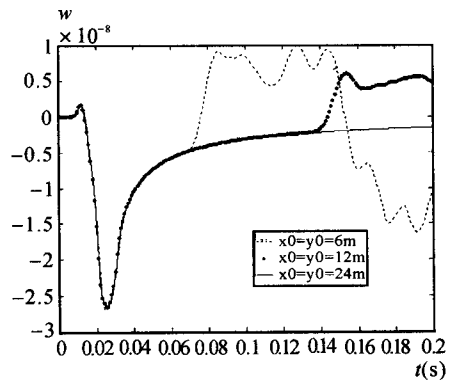


图 1.14 表面 $x = 1.0\text{m}$ 处的竖向位移

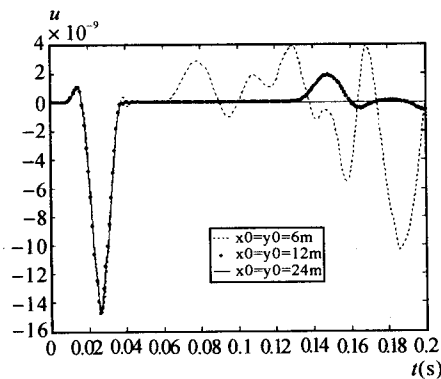


图 1.15 表面 $x = 1.5\text{m}$ 处的水平位移

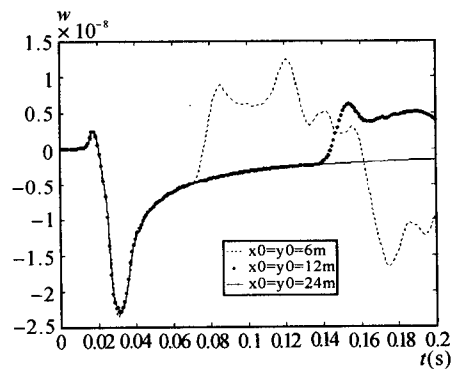


图 1.16 表面 $x = 1.5\text{m}$ 处的竖向位移

由计算结果可以看到,在计算的时间段内(0.2s), $x_0 = y_0$ 分别为 6m、12m 时,在地表 $x = 0.5\text{m}$ 、 $x = 1.0\text{m}$ 、 $x = 1.5\text{m}$ 处可以很明显地看到边界反射,而 $x_0 = y_0 = 24\text{m}$ 时,则无边界反射。

1.2.2 粘性边界

粘性边界是在假定的边界上不存在能量反射的条件下推导的,Lysmer 在 1969 年根据单向波理论提出了粘性边界。他们认为边界反作用力的法向应力 σ 和切向应力 τ 与边界水平位移 u 及竖向位移 v 有如下的关系:

(1) 水平底部边界

$$\sigma = a_H \rho c_p \dot{v}, \tau = b_H \rho c_s \dot{u} \quad (1.2)$$

(2) 竖向侧面边界

$$\sigma = a_V \rho c_p \dot{u}, \tau = b_V \rho c_s \dot{v} \quad (1.3)$$

式中: ρ 为介质的密度; $\dot{u}$ 、 $\dot{v}$ 分别为边界水平及竖向质点运动速度; c_p 、 c_s 分别为纵波和横波的传播速度; a_H 、 b_H 、 a_V 、 b_V 为根据波的反射、折射理论确定的两个参数。

研究表明,对辐射在边界上的 P 波、 S 波、 R 波, a_H 、 b_H 、 a_V 、 b_V 这四个参数均可取为 1,此时对应的粘性边界称为标准粘性边界。

1.2.3 傍轴边界

傍轴边界是由 Clayton 和 Engquist 提出的,是至 20 世纪 80 年代最有代表性的研究成果。它是由声波方程得出的,后来推广到了弹性波中。

考虑二维声波方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.4)$$

此波动方程的频域解为:

$$\tilde{u} = A \exp[-i(k_x x + k_y y)] \quad (1.5)$$

将上面公式代入二维声波方程可以得到如下的频散方程:

$$k_x = \frac{\omega}{c} \left[1 - \left(\frac{ck_y}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.6)$$

将上式进行泰勒级数展开:

$$\frac{ck_x}{\omega} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{ck_y}{\omega} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{ck_y}{\omega} \right)^4 + \dots \quad (1.7)$$

根据 Pade 有理逼近方法近似,其中前三阶近似表示为:

$$\frac{ck_x}{\omega} = 1 \quad (1.8a)$$

$$\frac{ck_x}{\omega} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{ck_y}{\omega} \right)^2 \quad (1.8b)$$

$$\frac{ck_x}{\omega} = \frac{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{ck_y}{\omega} \right)^2}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{ck_y}{\omega} \right)^2} \quad (1.8c)$$

将上式乘以位移谱 $\tilde{u}$, 经整理后可得到单向波动方程的傅立叶变换:

$$[i\omega + c(-ik_x)]\tilde{u} = 0 \quad (1.9a)$$

$$[c(i\omega)(-ik_x) + (i\omega)^2 - \frac{c^2}{2}(-ik_y)^2]\tilde{u} = 0 \quad (1.9b)$$

$$[ic\omega^2 k_x - \frac{3c^3}{4}ik_x k_y^2 - (i\omega)^3 + \frac{3c^2}{4}i\omega k_y^2]\tilde{u} = 0 \quad (1.9c)$$

对上述公式进行傅立叶反变换,可以得到单向波动的前三阶近似方程:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.10a)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.10b)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} - \frac{3c}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} - \frac{c^2}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (1.10c)$$

以上就是著名的 Clayton-Engquist 傍轴边界方程。

当波动为弹性纵波或横波时,傍轴边界由波的各位移分量表示。而在二维均匀介质中的弹性波情形下,傍轴近似的前两阶人工边界则表示为:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + [B_1] \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} + [C_1] \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + [C_2] \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y} + [C_3] \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (1.12)$$

在上式中,各变量的含义如下:

$$\begin{aligned} [B_1] &= [C_1] = \begin{bmatrix} 1/c_s & 0 \\ 0 & 1/c_p \end{bmatrix}, [C_2] = (c_s - c_p) \begin{bmatrix} 0 & 1/c_s \\ 1/c_p & 0 \end{bmatrix}, \\ [C_3] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_s - 2c_p & 0 \\ 0 & c_p - 2c_s \end{bmatrix}, U = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.13)$$

式中: u 、 v 分别为 x 、 y 方向的位移。

由此可见,标准粘性边界是一阶傍轴边界。

1.2.4 多向透射边界

多向透射边界是 Higdon 于 1986 年提出的,该边界是基于声波方程的有限差分 and 单向波概念而设计的一种能够完全吸收不同角度入射和同一波速 c 传播的若干平面声波。

对于二维出平面问题,其弹性波动方程见式(1.4),与边界法向成 θ 角、满足上述波动方程的外传平面波为:

$$u = f(x\cos\theta + y\sin\theta - c_it) \quad (1.14)$$

上式同时也满足边界上外行单侧波动方程:

$$\frac{c_i}{\cos\theta} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1.15)$$

上式可以透射入射到边界的入射角为 θ 的平面波。

对于有许多不同入射角的平面波射向边界,Higdon 提出了以下的多向透射边界:

$$\left[\prod_{j=1}^J \left(\cos\theta_j \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u = 0 \quad (1.16)$$

式中: θ_j 为第 j 个平面波的入射角.Keys 在 1985 年也提出了与此相似的成果。

在 J 阶多向透射边界中,如果取 $\theta_j = 0 (j = 1, 2, \dots, J)$,则多向透射边界转化为 J 阶傍轴近似边界。例如:当 $J = 1, \theta = 0$ 时,多向透射边界变为粘性边界;当 $J = 2$,并且取 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 时,多向透射边界变为二阶傍轴近似边界。

1.2.5 透射边界

透射边界是我国著名学者廖振鹏院士于 20 世纪 80 年代提出的。假定波位于人工边界所包围的计算区域内,向边界上一点 Q 入射的波沿 x 轴的视传播可一般表示为:

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^N u_i(t, x) = \sum_{i=1}^N u_i^*(c_it - x\cos\theta_i) \quad (1.17)$$

式中: $u(t, x)$ 表示波场总位移矢量的某一分量,它由一系列沿 x 轴以视速度 $c_i/\cos\theta_i$ 传播的行波 $u_i^*(c_it - x\cos\theta_i)$ 组成。对于平面体波,在每一介质层内, c_i 为该层的压缩波速或剪切波速。

每一行波 $u_i(t, x)$ 的透射公式为:

$$u_i(t + \Delta t, x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N u_i[t - (j-1)\Delta t, x - j\alpha_i c_i \Delta t] \quad (1.18)$$

引入人工波速 $c_A = \alpha_i c_i$, 则可以得到统一的透射公式:

$$u_i(t + \Delta t, x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N u_i[t - (j-1)\Delta t, x - j c_A \Delta t] \quad (1.19)$$

1.2.6 粘 — 弹性边界

当假定入射波为柱面波的情况下, 其出平面位移 u 满足如下运动微分方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c_s^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1.20)$$

上式的远场解为:

$$u(r, t) = r^{-1/2} f(t - r/c_s) \quad (1.21)$$

作用在波阵面上的径向剪应力 $\tau(r, t)$ 为:

$$\tau(r, t) = G \frac{\partial u}{\partial r} = -G \left[\frac{1}{2} r^{-3/2} f(t - r/c_s) + \frac{1}{c_s} r^{-1/2} f'(t - r/c_s) \right] \quad (1.22)$$

注意到式(1.21)和 $\frac{\partial u}{\partial t} = r^{-1/2} f'(t - r/c_s)$, 上式可写成以下形式:

$$\tau(r, t) = -\frac{G}{2r} u(r, t) - \rho_s \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \quad (1.23)$$

式(1.23)中剪应力相当于由以下阻尼项及弹性项组成:

$$C_b = \rho_s, K_b = \frac{G}{2r} \quad (1.24)$$

式中: C_b 、 K_b 分别为施加在人工边界上的粘性阻尼和线性弹簧。

1.2.7 双渐进边界

Philip(1981) 在利用有限元方法进行土 — 结构动力相互作用分析时, 提出了双渐进边界条件(Doubly asymptotic approximation) 的概念。它是通过土 — 结构相互作用面上散射波产生的力和位移、速度的近似关系来代替包围结构的无限土体对结构的作用。

散射力可以写成以下的矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} F_n \\ F_t \end{Bmatrix} = \rho A \begin{bmatrix} c_p & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_n \\ \dot{u}_t \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

在低频极限情况下,介质对结构的作用可通过下面的拟静力表面关系得到:

$$\begin{Bmatrix} F_n \\ F_t \end{Bmatrix} = K_s \begin{Bmatrix} u_n \\ u_t \end{Bmatrix} \quad (1.26)$$

式中: K_s 为无限介质与结构接触表面静力刚度,可通过边界积分方程方法或克隆求得。

将上式结合可以得到双渐进边界:

$$\begin{Bmatrix} F_n \\ F_t \end{Bmatrix} = K_s \begin{Bmatrix} u_n \\ u_t \end{Bmatrix} + \rho A \begin{bmatrix} c_P & 0 \\ 0 & c_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_n \\ \dot{u}_t \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

1.2.8 双渐进—多向透射边界

Wolf 等人根据双渐进边界对零频和高频波动精确模拟的优点及多向透射边界能很好地模拟外行波动的特点,将二者结合起来提出了双渐进—多向透射边界。这一条件在人工边界面上以力、位移、速度的关系给出。具体形式如下:

$$R_p^b = K_s u_p^b + C \dot{u}_p^b + Q_p^b \quad (1.28)$$

式中: R_p^b 为内部单元在 p 时刻对人工边界点的作用力,前两项为双渐进边界, Q_p^b 是由前一些时刻及内部相邻节点利用多向透射边界计算。

式(1.16)是用位移场表示的,可将其应用于应力波场,当取 $J=2$ 时(有足够的精度),有如下的表达式:

$$\frac{c_s}{\cos\theta_1} \frac{c_s}{\cos\theta_2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left(\frac{c_s}{\cos\theta_1} + \frac{c_s}{\cos\theta_2} \right) \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0 \quad (1.29)$$

对上式在时空领域进行差分运算:

$$\left(\frac{\partial^2 Q_0}{\partial x^2} \right)^{p-2} = \frac{Q_0^{p-2} - 2Q_1^{p-2} + Q_2^{p-2}}{\Delta x^2} \quad (1.30a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 Q_0}{\partial x \partial t} \right)^{p-2} = \frac{Q_0^{p-1} - Q_0^{p-2} - Q_1^{p-1} + Q_1^{p-2}}{\Delta x \Delta t} \quad (1.30b)$$

$$\left(\frac{\partial^2 Q_0}{\partial t^2} \right)^{p-2} = \frac{Q_0^p - 2Q_0^{p-1} + Q_0^{p-2}}{\Delta t^2} \quad (1.30c)$$

将上述差分式代入式(1.29)可得:

$$Q_0^p = (2 - a_1)Q_0^{p-1} + (a_1 - a_2 - 1)Q_0^{p-2} + a_1 Q_1^{p-1} + (2a_2 - a_1)Q_1^{p-2} - a_2 Q_2^{p-2} \quad (1.31)$$

其中: