广义度量空间与映射

（第二版）

林寿 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

空间与映射的分类设想是点集拓扑学的主要研究方向之一. 本书利用映射方法系统论述广义度量空间的基本理论，总结了20世纪60年代以来空间与映射理论的重要研究成果，特别包含了国内学者的研究工作,内容包括广义度量空间的产生、度量空间的映象和广义度量空间类等3章和2个附录. 第二版在第一版的基础上，对部分内容作了修饰,补充了广义度量空间理论的若干新进展，适当调整了附录和参考文献,列举了一些尚未解决的问题供有兴趣的读者研究.

本书可以作为广义度量空间理论学习或研究的参考书,可供大学数学系高年级学生、研究生及研究工作者使用.

图书在版编目(CIP)数据

广义度量空间与映射/林寿著. —2版. —北京:科学出版社,2007
ISBN 978-7-03-018587-7

Ⅰ.广… Ⅱ.林… Ⅲ.①度量空间②映射(数学) Ⅳ.0177.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第020975号

责任编辑:刘嘉善 鄢德平 张 扬/责任校对:张小霞
责任印制:赵德静/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1995年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2007年3月第 二 版 印张:16
2007年3月第一次印刷 字数:298 000
印数:1—3 000
定价:48.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

序

关于广义度量空间理论的综合介绍,国外出版的Burke,Lutzer[75],Gruenhage[140]以及最近出版的"Topics in General Topology"[305]中分别由Nagata[318],Tamano[371]撰写的二章都是比较优秀的,值得一读.本书的特点是用映射为工具阐述广义度量空间.早在1961年Alexandroff[3]在第一次布拉格会议上提出用映射方法研究空间的设想.1966年Arhangel'skiĭ[24]的综合论文"映射与空间"继承、发展了这一设想.我们对此感到莫大的兴趣.曾由吴利生、陈必胜两位同志把这综合论文译为中文(原系俄文),登载在《数学译林》(1981~1982),希望引起国内同行们的兴趣.

关于用映射研究空间的内容大致有三点:① 哪些特定的广义度量空间可以表示为度量空间在某些映射下的象或逆象.例如Morita[301]为研究积空间的正规性而引入的M空间可以表示为度量空间在拟完备映射下的逆象,从而为研究M空间开辟了新途径且使它与度量空间发生联系.② 度量空间在某些映射下的象有哪些内在特征.例如度量空间在闭映射下的象(通常称为Lašnev空间)被Foged[112]刻画为具有σ遗传闭包保持k网的T_3、Fréchet空间.从而可与Burke-Engelking-Lutzer度量化定理[74]作比较,且可与借助k网定义的某些广义度量空间(如$\aleph$空间)取得联系.③ 某些特定的广义度量空间在怎样的映射下保持不变.以度量空间为例,由Hanai-Morita-Stone定理[304, 363]知,可度量化在完备映射下保持不变.更进一步,Michael[285]得到了可度量化在可数双商闭映射下保持不变,显示了可数双商映射的魅力.从上述三方面的简单的例子看来,在广义度量空间的研究中渗入映射方法是多么丰富多采,引人入胜.

该书作者尝试采用Alexandroff-Arhangel'skiĭ的设想与方法,以映射为工具阐述国际上30年来广义度量空间方面的有关内容,特别是阐述了近年来国内学者在这方面的成果而写该书.书中对上述设想与方法更有所发扬,是一本饶有兴趣的科研读物.该书可用作大学数学系高年级学生及研究生的选修课教材或教学参考书,是一般拓扑学专业研究生的必读专著,也可供数学工作者或其他科学工作者参考.

高国士

1992年9月1日于苏州大学

第二版前言

本书最突出的特点是用映射方法系统论述广义度量空间理论，引导读者系统和快速地进入学科的前沿，开展科学研究工作. 第一版中“作者希望通过本书，使读者对映射的空间分类原则有所了解，创造出更多优异的成果，扩大我国一般拓扑学界在国际上的影响”已取得成效. 第一版于 1995 年出版后，在广义度量空间类和映射类方面均引起不少同行的关注，如具有点可数覆盖的空间，k 半层空间，Σ 空间，$\aleph$ 空间，g 可度量空间和局部可分度量空间的映射，ss 映射，紧覆盖映射，紧映射，π 映射等，都产生了丰富的结果.

近年来，国内外有不少优秀的论述广义度量空间理论的著作或综述报告问世，如 Arhangel'skiĭ[27]，高国士[122]，Gruenhage[142]，Hodel[166]，Nagata[320] 等，尤其是 Hart, Nagata 和 Vaughan[149] 的 “Encyclopedia of General Topology”，对一般拓扑学的各方向进行了较详细的描述. 然而，本书仍凸显其关于空间与映射理论系统介绍的学术价值. 过去的 10 多年间，空间与映射理论有了很大的发展，本书中列举的若干问题得到了解决（见 § 3.10），在使用中也发现了原书的一些错误. 为更好体现反映学科研究趋向、注重国内学者贡献的精神，特出版经修订后的第二版.

第二版大致保持原有的篇幅，尽量不与作者的《点可数覆盖与序列覆盖映射》[239] 内容交叉，所以删除或简化了第一版中“和定理”、“有限到一开映射”、“积空间的 k 空间性质”及点可数覆盖等方面的论述，附录 B 仅阐明广义度量空间理论的形成. 本书的修订和出版得到国家自然科学基金资助项目“覆盖方法及其在粗糙集理论中的应用”(项目编号 10571151) 和漳州师范学院学术专著出版基金的支持. 过去的 10 年间，不少同事在阅读第一版时提出了一系列建议，其中的大部分被吸收在修订版中. 在此对他们及所有关心第二版出版的同志们，尤其是南京大学师维学教授和漳州师范学院的拓扑学研究生们在文稿的编辑和排版上给予的帮助，表示衷心的感谢.

作 者①
2006 年 6 月

①通信地址: 352100 福建省宁德市蕉城南路宁德师范高等专科学校数学研究所(352100).
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn.

第一版前言

1944 年 Dieudonné[95] 引进仿紧性的概念是一般拓扑学进入全盛期的显著标志. 1950 ~ 1951 年间建立的卓越的 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理 [53, 311, 354] 为全面探索度量性质带来了根本性的变化, 同时对广义度量性质的研究展示了光明的前景, 对仿紧性及可度量性的深入工作揭开了广义度量空间理论的研究序幕.

1961 年 Alexandroff[3] 在布拉格 "一般拓扑学以及它与现代分析和代数的关系" 的国际学术会议上提出了用映射研究空间的设想, 即将各式各样的拓扑空间类通过映射类作为纽带将它们联结于一体, 通过映射与空间的关系反映拓扑空间论的研究框架与整体结构, 使映射成为揭示空间类之间的内部规律的强有力工具. 1966 年 Arhangel'skiĭ[24] 发表了历史性的文献 "映射与空间", 对如何实施 Alexandroff 设想给出了一系列建设性的具体步骤, 开创了用映射研究空间的新纪元, 成为一般拓扑学蓬勃发展的里程碑. 从此, Alexandroff 设想变为一般拓扑学中一种必不可少的研究手段, 推动着一般拓扑学, 尤其是广义度量空间理论的迅猛发展. 总之, Alexandroff 的关于映射的空间分类原则的设想构成了一般拓扑学的重要组成部分 [4].

依照 Alexandroff-Arhangel'skiĭ 思想, 用映射研究空间的主要内容是借助映射类建立度量空间类与具有特定拓扑性质的空间类之间的广泛联系, 研究度量空间类在各类映射下象的内在特征以及特定的空间类被怎样的映射保持. 这一框架决定了本书预期达到的目标: 全面描述度量空间类在各类映射下的特征, 建立某些重要的广义度量空间类的映射定理. 本书由 3 章及 2 个附录和 400 余篇文献组成. 第 1 章简要介绍广义度量空间类的一些基本概念, 其中包含这些空间类的基本运算性质和简单特征, 目的是为后两章阐述空间与映射的关系提供必要的准备. 第二章借助具有特定性质的集族, 同时通过基以及推广形成的一些概念, 展示度量空间类关于商映射, 伪开映射, 可数双商映射, 闭映射以及在附加纤维可分性或紧性等条件时这些映射的象或逆象的内在刻画. 第三章利用几类优美的特征建立由具有特定性质的基, 弱基, k 网, 网和 (mod$k$) 网等所确定的广义度量空间类, 如 M 空间类, g 可度量空间类, $\aleph$ 空间类, σ 空间类和 Σ 空间类的映射定理. 本书最后有 2 个附录, 一是便于读者了解正文中使用的一些覆盖性质的内容, 二是使读者加深对广义度量空间理论的全面认识, 特别是明确 Alexandroff 设想在一般拓扑学中所处

的位置.

本书的内容大都见于近 30 年来关于空间和映射研究的数百篇论文中. 作者力求通过广义度量空间类的映射定理指出, 映射的空间分类原则确实是一般拓扑学的带有决定性意义的研究模式, 并由此窥视空间与映射的全面联系. 同时注重取材的新颖与特色, 尽可能勾画出我国学者近年来取得的突出成就. 与通常的研究相比, 确定的可数双商映射和序列商映射的表达, 利用 cs^* 网讨论度量空间的各类商 s 映象, 对遗传闭包保持集族的系统阐述, 归纳和整理逆紧映射逆象的 G_δ 对角线定理, 闭映射的分解定理以及积空间 k 性质的研究等都是本书的特色.

映射与空间是一个庞大而前景广阔的课题. 作者希望通过本书, 使读者对映射的空间分类原则有所了解, 创造出更多优异的成果, 扩大我国一般拓扑学界在国际上的影响. 衷心感谢多年来一直给予作者关心、帮助的苏州大学、四川大学、广西大学、西北大学和山东大学等校的诸前辈和同事们, 如果说我在该领域有一点成绩的话, 那完全是由于他们的扶持与爱护的结果. 作者尤其深深感谢事业上的引路人、导师高国士教授①. 这不仅仅是由于高教授在空间与映射方面完成的出色工作和在国内积极推崇 Alexandroff-Arhangel'skiĭ 思想 [123], 从而使作者坚定地从事本课题的工作, 而且更重要的是因为高教授自 1984 年以来呕心沥血的谆谆教诲、无私帮助和持续鼓励, 为作者奠定了学习、研究的基础, 指出了继续探索的方向以及不断工作的勇气和信心. 虽然本书由作者执笔完成, 但稍为感到宽慰的是在一定程度上反映了高教授的研究风格与学术思想.

本书原稿是作者 1991 年 9 月 ~ 1992 年 7 月在四川大学数学所作为访问学者时撰写的, 感谢蒋继光老师和刘应明老师给予的帮助与关心.另外，如果没有国家自然科学基金优秀研究成果专著出版基金的资助, 本书是很难与读者见面的.

作　者

1993 年 4 月

①程民德主编. 中国现代数学家传 (第三卷). 南京: 江苏教育出版社, 1998, 287 ~ 297.

目　录

第一章　广义度量空间的产生

度量空间理论在一般拓扑学的研究中占据核心位置, 作为其一般化产生了广义度量空间理论. Burke 和 Lutzer[75] 认为, 广义度量空间的起源主要来自三个方面, 一是度量化问题, 二是乘积空间的仿紧性问题, 三是映射与空间的相互分类问题. 什么是广义度量空间? 或许, 任何推广了可度量性的拓扑性质都可以称为广义度量性质. 然而, 这种说明过于空泛. 粗略地说, 广义度量空间是这样的一些空间类, 有益于刻画可度量性, 继承了度量空间的许多优美性质且度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类 [140, 166]. Hodel[166] 指出: 有许多的理由说明为什么广义度量空间是值得研究的, 或许最重要的理由是这些空间类增加了人们对度量空间的理解; 此外, 拓扑学家正不断地寻找比度量空间更广泛的空间类, 使关于度量空间的一些特别重要的结果, 如 Katětov-Morita 维数定理、Dugundji 扩张定理、Borsuk 同伦扩张定理等, 在这些空间类上成立. 正因为如此, 从 20 世纪 60 年代起广义度量空间理论一直是一般拓扑学中活跃的研究方向, 所涉及的与公理集合论、数理逻辑、组合数学、泛函分析、拓扑代数、动力系统、计算机科学等分支相互交融而形成的大量问题已列入问题集 "Open Problems in Topology"[291], "Open Problems in Topology 2"[329] 和 "Problems from Topology Proceedings"[328]. 1960 - 2005 年间取得的广义度量空间理论的成就已总结在一些重要的论著中, 如 Arhangel'skiĭ[24]; Burke, Lutzer[75]; 高国士[122]; Gruenhage[140, 141, 142]; Hodel[166]; Kodama, Nagami[202]; 林寿 [235, 239]; Morita, Nagata[305]; Nagata[320]. 许多学者不断提出大量有挑战性的问题, 汇同一些长期未解决的经典问题, 成为广义度量空间理论进一步向前发展的源泉. 恰如 Hodel[166] 在总结了广义度量空间理论的阶段性结果后说: "或许更重要的是, 广义度量空间的研究还不是完整的. 更确切地说, 随着每年许多新的重要成果的出现, 它还在不断地成长壮大."

本章从距离函数、基及其推广、广义可数紧性三个角度导出本书所论述的大部分广义度量空间类, 同时描述这些空间类的一些简单刻画、基本的运算性质 (如拓扑和性质, 遗传性质, 可积性质) 以及与其他一些空间类的粗略关系.

1.1 记号及术语

约定: 空间均指满足 T_2 分离公理的拓扑空间.

本节定义本书常用的一些记号和术语, 而后列举几个经典结果.

1.1.1 实数子集

以 $\mathbb{R}$ 表示实直线, $\omega, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{P}, \mathbb{I}$ 和 $\mathbb{R}^+$ 分别表示 $\mathbb{R}$ 的自然数集、正整数集、有理数集、无理数集、单位闭区间和非负实数集. ω 也表示最小的无限序数. 记 $\mathbb{S}_1 = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. $\aleph_0, \mathbf{c}$ 分别表示 $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ 的基数; $\aleph_1$ 表示第一个不可数基数.

1.1.2 拓扑空间子集的运算

对空间 X, $\tau(X)$ 表示 X 的拓扑, $\tau^c(X)$ 表示 X 中闭集的全体. 在不引起混淆时, 分别记 $\tau(X)$ 和 $\tau^c(X)$ 为 τ 和 τ^c. 对 X 的子集 A 及 X 的子空间 (Y, τ') 的子集 Z,

$\overline{A}$ 或 $\mathrm{cl}(A)$ 表示 A 在 X 中的闭包;

A° 或 $\mathrm{int}(A)$ 表示 A 在 X 中的内部;

∂A 表示 A 在 X 中的边界;

A^d 表示 A 在 X 中的聚点的集合;

$\mathrm{cl}_Y(Z)$ 或 $\mathrm{cl}_{\tau'}(Z)$ 表示 Z 在 Y 中的闭包;

$\mathrm{int}_Y(Z)$ 或 $\mathrm{int}_{\tau'}(Z)$ 表示 Z 在 Y 中的内部.

1.1.3 拓扑空间的集族

对空间 X, 记

$$\mathscr{K}(X) = \{K \subset X : K \text{ 是 } X \text{ 的紧集 }\},$$

$$\mathscr{S}(X) = \{S \subset X : S \text{ 是 } X \text{ 的含极限点的收敛序列 }\},$$

其中非空有限集视为一确定的平凡收敛序列. X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为非平凡的, 若各 x_n 是互不相同的.

对 X 的集族 $\mathscr{P}$, 记

$\mathscr{P}^{<\omega} = \{\mathscr{F} \subset \mathscr{P} : \mathscr{F} \text{ 有限 }\}$;

$\mathscr{P}^F = \{\cup\mathscr{F} : \mathscr{F} \in \mathscr{P}^{<\omega}\}$;

$\cup\mathscr{P} = \cup\{P : P \in \mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 的并;

$\cap\mathscr{P} = \cap\{P : P \in \mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 的交;

$\mathscr{P}^- = \overline{\mathscr{P}} = \{\overline{P} : P \in \mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 的闭包;

$\mathscr{P}^\circ = \{P^\circ : P \in \mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 的内部;

$\bigoplus\mathscr{P} = \bigoplus\{P : P \in \mathscr{P}\}$, $\mathscr{P}$ 的拓扑和.

对 $A \subset X, x \in X$, 记

$$(\mathscr{P})_A = \{P \in \mathscr{P} : P \cap A \neq \varnothing\}, \ (\mathscr{P})_x = (\mathscr{P})_{\{x\}};$$

$\mathrm{st}(A,\mathscr{P})=\cup(\mathscr{P})_A,\ \mathrm{st}(x,\mathscr{P})=\cup(\mathscr{P})_x;$

$\mathrm{st}^{n+1}(A,\mathscr{P})=\mathrm{st}(\mathrm{st}^n(A,\mathscr{P}),\mathscr{P}), n\in\mathbb{N};$

$\mathscr{P}_{|A}=\{P\cap A:P\in\mathscr{P}\}.$

若 $\mathscr{F}$ 也是 X 的集族, 记 $\mathscr{P}\wedge\mathscr{F}=\{P\cap F:P\in\mathscr{P},F\in\mathscr{F}\}$. 同理可定义 $\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{P}_\alpha$.

1.1.4 空间上的映射

设 X,Y 是空间, $f:X\to Y$.

对 $A\subset X$, f 在 A 处的限制 $f_{|A}:A\to f(A)$ 定义为对 $x\in A, f_{|A}(x)=f(x)$.

对 $B\subset Y, f$ 在 B 处的限制 $f_B=f_{|f^{-1}(B)}$.

若 $\mathscr{P}$ 是 X 的集族, 则 $f(\mathscr{P})=\{f(P):P\in\mathscr{P}\}, \mathscr{P}$ 关于 f 的象.

若 $\mathscr{F}$ 是 Y 的集族, 则 $f^{-1}(\mathscr{F})=\{f^{-1}(F):F\in\mathscr{F}\}, \mathscr{F}$ 关于 f 的逆象或原象.

对空间 X,Y,Z 和 W, 若 $f:X\to Y$, $g:X\to Z$, $h:W\to Z$, 对角线映射 $f\triangle g:X\to Y\times Z$ 和乘积映射 $f\times h:X\times W\to Y\times Z$ 分别定义为 $(f\triangle g)(x)=(f(x),g(x))$ 和 $(f\times h)(x,w)=(f(x),h(w))$. 可类似定义 $\triangle_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha:X\to\prod_{\alpha\in\Gamma}Y_\alpha$ 和 $\prod_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha:\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha\to\prod_{\alpha\in\Gamma}Y_\alpha$.

id_X 表示空间 X 到 X 的恒同映射.

对积空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 及 $\beta\in\Gamma$, 以 $\pi_\beta:\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha\to X_\beta$ 表示 $\prod_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 在第 β 个坐标空间 X_β 上的投影映射.

1.1.5 空间的运算

设 Φ 是一拓扑性质.

(1) Φ 称为可加的, 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族, 则拓扑和 $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 具有性质 Φ.

(2) Φ 称为遗传的 (开遗传的, 闭遗传的), 若空间 X 具有性质 Φ, 则 X 的每一子空间 (开子空间, 闭子空间) 也具有性质 Φ.

(3) Φ 称为可积的 (有限可积的, 可数可积的), 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族 (且 Λ 是有限集, Λ 是可数集), 则积空间 $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 也具有性质 Φ.

(4) Φ 称为被映射类 $\mathscr{L}$ 保持 (逆保持), 若满映射 $f:X\to Y$, 其中 $f\in\mathscr{L}$ 且空间 X (空间 Y) 具有性质 Φ, 则空间 Y (空间 X) 也具有性质 Φ.

为了叙述方便起见, 术语 "Φ 空间"、"Φ 性质" 或 "Φ 空间性质" 将表示同一含意交换使用.

1.1.6 几个经典结果

本段列举以后各节要使用的一般拓扑学中的几个经典引理或定理以备查 [101].

(1) Zermelo *良序定理*. 任何集合可按某个线性序成为良序集.

(2) *连续统假设*. $\mathbf{c} = \aleph_1$ (简记为 CH).

(3) *Urysohn 度量化定理*. 具有可数基的正则空间可嵌入 Hilbert 方体 $\mathbb{I}^{\aleph_0}$, 因而是可度量空间.

(4) *Urysohn 引理*. X 是正规空间当且仅当对 X 中不相交的闭集 A, B, 存在连续函数 $f : X \to \mathbb{I}$, 使 $f(A) \subset \{0\}$ 且 $f(B) \subset \{1\}$.

(5) *Tietze 扩张定理*. 一个空间是正规空间当且仅当定义于它的闭子空间上的实值连续函数可连续地扩张到整个空间上.

(6) *Tychonoff 积定理*. 紧空间族的积空间是紧空间.

(7) *Tychonoff 紧扩张定理*. 一个空间是完全正则空间当且仅当它存在紧扩张.

(8) *Baire 范畴定理*. $\mathbb{R}$ 是第二范畴集, 即 $\mathbb{R}$ 中可数个开稠集之交集是 $\mathbb{R}$ 的稠子集, 从而 $\mathbb{R}$ 不是可数个具有空内部的闭集之并.

(9) *对角线引理*. 设连续函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 分离空间 X 的点与闭集, 其中 $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. 则对角线函数 $\Delta_{\alpha\in\Lambda} : X \to \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ 是嵌入, 即 $\Delta_{\alpha\in\Lambda} : X \to \Delta_{\alpha\in\Lambda}(X)$ 是同胚映射.

1.2 距离函数

度量空间最易为数学工作者接受的原因之一是其上存在度量. 对距离公理进行一般化是产生广义度量空间最直接的途径. 本节从距离函数出发引出度量空间, 对称度量空间, 半度量空间以及相关的可展空间, 拟可展空间的概念, 证明 Stone 定理.

定义 1.2.1　d 称为集合 X 的距离 (伪距离), 若 $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ 且对任意的 $x, y, z \in X$, 下述条件成立:

(1) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ $(d(x, x) = 0)$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

对 $A, B \subset X, x \in X$, 置

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\};$$
$$d(x, B) = d(B, x) = d(\{x\}, B).$$

对正数 ε, 令

$$\mathrm{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

X 称为度量空间 (伪度量空间), 若 X 是以 $\{\mathrm{B}(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ 为基生成的拓扑空间. 这拓扑也称为由 d 生成的拓扑. 若 X 的拓扑可由其距离 d 生成, X 称为可度量空间, d 称为 X 的度量.

设 $\{(X_\alpha, d_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是度量空间族. 记 $X = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, 定义 $d: X\times X \to \mathbb{R}^+$ 如下:

$$d(x,y) = \begin{cases} \min\{d_\alpha(x,y), 1\}, & \text{存在 } \alpha\in\Lambda, \text{ 使 } x,y\in X_\alpha, \\ 1, & \text{其他}. \end{cases}$$

则 (X,d) 是度量空间, d 称为标准的拓扑和度量.

度量空间是数学研究的一般对象, 具有良好的性质, 如可度量性是可加性, 遗传性和可数可积性. 度量空间理论中最深刻、最重要、最优美的结果是 Stone 定理.

定义 1.2.2[53] 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为离散的, 若对 $x\in X$, 存在 x 在 X 的邻域 V, 使 V 与 $\mathscr{P}$ 中至多一个元相交.

可数个离散集族之并称为 σ 离散集族. 一般地, 设 Φ 是一集族性质, 可数个具有性质 Φ 的集族之并称为 σ-Φ 集族.

定理 1.2.3[362] (Stone 定理) 度量空间是仿紧空间.

证明 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是度量空间 (X,d) 的开覆盖. 对 $\alpha\in\Lambda, n\in\mathbb{N}$, 置

(3.1) $U_{\alpha n} = \{x\in X: \mathrm{B}(x, 1/2^n)\subset U_\alpha\}$.

则 $U_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{\alpha n}$, 并且 $x\in U_{\alpha n}$ 当且仅当 $d(x, X-U_\alpha)\geqslant 1/2^n$. 于是

(3.2) 若 $x\in U_{\alpha n}, y\notin U_{\alpha n+1}$, 则 $d(x,y) > 1/2^{n+1}$.

由 Zermelo 良序定理, 把指标集 Λ 良序化. 置

(3.3) $U^*_{\alpha n} = U_{\alpha n} - \bigcup_{\gamma<\alpha} U_{\gamma n+1}, \alpha\in\Lambda$.

则对 $\alpha\neq\beta\in\Lambda$, 按 $\alpha<\beta$ 或 $\beta<\alpha$, 由 (3.3) 可得

(3.4) $U^*_{\beta n}\subset X - U_{\alpha n+1}$ 或 $U^*_{\alpha n}\subset X - U_{\beta n+1}$.

若 $x\in U^*_{\alpha n}, y\in U^*_{\beta n}$, 由 (3.3) 和 (3.4), 则当 $\alpha<\beta$ 时, $x\in U_{\alpha n}, y\notin U_{\alpha n+1}$; 当 $\beta<\alpha$ 时, $y\in U_{\beta n}, x\notin U_{\beta n+1}$. 所以由 (3.2) 总有 $d(x,y) > 1/2^{n+1}$, 即

(3.5) $d(U^*_{\alpha n}, U^*_{\beta n})\geqslant 1/2^{n+1}$.

对 $x\in X$, 在 Λ 中存在最小的 α, 使 $x\in U_\alpha$, 于是存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $x\in U_{\alpha n}$, 由 (3.3), $x\in U^*_{\alpha n}$. 这表明

(3.6) $\bigcup_{\alpha\in\Lambda, n\in\mathbb{N}} U^*_{\alpha n} = X$.

对 $\alpha\in\Lambda, n\in\mathbb{N}$, 置

(3.7) $U^+_{\alpha n} = \{x\in X: d(x, U^*_{\alpha n}) < 1/2^{n+3}\}$.

则

(3.8) $U^*_{\alpha n}\subset U^+_{\alpha n}\subset U_\alpha$.

由 (3.5), (3.7) 及三角不等式, 易证对 $\alpha\neq\beta\in\Lambda$, $d(U^+_{\alpha n}, U^+_{\beta n})\geqslant 1/2^{n+2}$. 于是对 $x\in X$, $\mathrm{B}(x, 1/2^{n+3})$ 至多与 $\{U^+_{\alpha n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 中的一个元相交, 所以 $\{U^+_{\alpha n}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X

的离散开集族. 至此, $\{U_{\alpha n}^{+}\}_{\alpha\in\Lambda,n\in\mathbb{N}}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的 σ 离散开加细. 故 X 是仿紧空间.

定义 1.2.4[7] 对集合 X, 函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}^{+}$ 称为 X 的对称距离, 若对 $x,y\in X$, 下述条件成立:

(1) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$.

空间 X 称为对称度量空间, 如果存在 X 的对称距离 d, 满足 $U\in\tau(X)$ 当且仅当对 $x\in U$, 存在 $\varepsilon>0$, 使 $\mathrm{B}(x,\varepsilon)\subset U$. 这时 d 称为 X 的对称度量.

若 d 是 X 的对称距离, 那么 (X,d) 是对称度量空间当且仅当 d 满足: $A\subset X$ 是 X 的闭集的充要条件是对 $x\in X-A$, $d(x,A)>0$. 易验证, 对称度量性是可加性, 开遗传性和闭遗传性.

定义 1.2.5[396] 设 d 是 X 的对称距离. d 称为 X 的半度量, 若 (X,d) 是对称度量空间, 并且对 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$, $x\in\mathrm{B}(x,\varepsilon)^{\circ}$. 这时 (X,d) 称为半度量空间.

若 d 是 X 的对称距离, 那么 (X,d) 是半度量空间当且仅当 d 满足: 对 $A\subset X, x\in\overline{A}$ 的充要条件是 $d(x,A)=0$. 易验证, 半度量性是可加性和遗传性.

定义 1.2.6 设 X 是空间.

(1) 称 X 为 Fréchet 空间 (或 Fréchet-Urysohn 空间) [115], 如果 $x\in\overline{A}\subset X$, 则存在 A 的序列在 X 中收敛于 x;

(2) 函数 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 称为 X 的 g 函数 [150] (或递减 g 函数 [407]), 如果对 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$, $x\in g(n+1,x)\subset g(n,x)$. 如未特别说明, g 函数均用 g 表示. 对 $A\subset X$, 记 $g(n,A)=\bigcup_{x\in A}g(n,x)$;

(3) 称 X 具有半展开 [1], 如果存在 X 的覆盖列 $\{\mathscr{F}_n\}$ 满足:

对 $x\in X, \{\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 的邻域基. 这时 $\{\mathscr{F}_n\}$ 称为 X 的半展开.

定理 1.2.7 下述条件等价:

(1) X 是半度量空间;

(2) X 存在半度量函数 [150], 即 X 具有 g 函数满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n\in g(n,x)$ 或 $x\in g(n,x_n)$, 则 $x_n\to x$;

(3) X 具有半展开 [1];

(4) X 是第一可数 (Fréchet) 的对称度量空间 [24].

证明 (1) $\Rightarrow$ (3). 设 (X,d) 是半度量空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{F}_n=\{A\subset X:\mathrm{diam}A<1/n\},$$

其中 $\mathrm{diam}A=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$. 若 $x\in X$, 则 $\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_n)=\mathrm{B}(x,1/n)$. 所以 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的邻域基.

(3) $\Rightarrow$ (2). 设 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 X 的半展开, 不妨设 $\mathscr{F}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{F}_n$. 定义 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$, 使 $g(n,x)=\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_n)^\circ$. 则 g 是 X 的半度量函数.

(2) $\Rightarrow$ (4). 设 g 是 X 的半度量函数. 显然, X 是第一可数空间. 对 $x\neq y\in X$, 置

$$m(x,y)=\min\{n\in\mathbb{N}:y\notin g(n,x),x\notin g(n,y)\}.$$

定义 $d:X\times X\to\mathbb{R}^+$ 为

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1/m(x,y), & x\neq y.\end{cases}$$

则 d 是 X 的半度量.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 Fréchet 空间 X 具有对称度量 d. 对 $A\subset X$, 若 $x\in\overline{A}-A$, 存在 A 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 如果 $d(x_n,x)\not\to 0$, 那么存在 $\{x_n\}$ 的子列 Z, 使 $d(x,Z)>0$. 令 $T=Z\cup\{x\}$. 则 T 是 X 的闭子空间, 于是 (T,d) 是对称度量空间. 从而 x 是 T 的孤立点, 矛盾. 因而 $d(x_n,x)\to 0$, 故 $d(x,A)=0$.

推论 1.2.8 半度量性质是可数可积性.

证明 对 $n\in\mathbb{N}$, 设 g_n 是空间 X_n 的半度量函数. 置 $g:\mathbb{N}\times(\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n)\to\tau(\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n)$, 使 $g(m,x)=(\prod_{n\leqslant m}g_n(m,x_n))\times\prod_{n>m}X_n$, 其中 $x=(x_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$. 则 g 是 $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ 的半度量函数.

定义 1.2.9 空间 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 称为 X 的展开, 若它是 X 的半展开. 具有展开的空间称为可展空间 [8]. 正则的可展空间称为 Moore 空间 [298]. X 的开集列 $\{\mathscr{U}_n\}$ 称为 X 的拟展开 [47], 若对 $x\in U\in\tau$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $x\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$. 具有拟展开的空间称为拟可展空间.

每一闭集是 G_δ 集的空间称为 perfect 空间.

定理 1.2.10 下述条件等价:

(1) X 是可展空间;

(2) X 存在可展函数 [150], 即 X 具有 g 函数满足: 对 X 的点 x 及序列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 若 $\{x,x_n\}\subset g(n,y_n)$, 则 $x_n\to x$;

(3) X 是 perfect 的拟可展空间 [47].

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的展开. 对 $x\in X,n\in\mathbb{N}$, 取定 $U_n\in\mathscr{U}_n$, 使 $x\in U_n$, 置 $g(n,x)=\bigcap_{i\leqslant n}U_i$. 则 g 是 X 的可展函数.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 g 是 X 的可展函数. 对 X 的闭集 A, $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}g(n,A)$, 所以 X 是 perfect. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{U}_n=\{g(n,x):x\in X\}$. 则 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 X 的展开.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $\{\mathscr{U}_n\}$ 是 perfect 空间 X 的拟展开. 对 $n\in\mathbb{N}$, 存在 X 的闭集列 $\{F_{nj}\}$, 使 $\cup\mathscr{U}_n=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}F_{nj}$. 令 $\mathscr{H}_{nj}=\mathscr{U}_n\cup\{X-F_{nj}\}$. 则 $\{\mathscr{H}_{nj}\}$ 是 X 的展开.

可展性或拟可展性都是可加性, 遗传性和可数可积性. 可展空间是半度量的次仿紧空间 (见附录 A 定理 3.3). 下述定理给出半度量空间是可展空间的一个简单的充分条件. 称空间 X 的基 $\mathscr{B}$ 是点可数的, 若 X 的每一点仅属于 $\mathscr{B}$ 中可数个元.

定理 1.2.11[152] 具有点可数基的半度量空间是可展空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是半度量空间 X 的点可数基, $(X,\leqslant)$ 是良序集. 对 $x \in X$, 记 $(\mathscr{U})_x = \{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$; 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\begin{aligned}
&V_n(x) = \mathrm{B}(x, 1/n)^\circ,\\
&h(n,x) = U_n(x) \cap V_n(x),\\
&p(n,x) = \min\{y \in X : x \in h(n,y)\},\\
&g(n,x) = V_n(x) \cap (\cap\{h(i,p(i,x)) : i \leqslant n\})\\
&\qquad\qquad\qquad \cap(\cap\{U_j(p(i,x)) : j, i \leqslant n,\ x \in U_j(p(i,x))\}),\\
&\mathscr{G}_n = \{g(n,x) : x \in X\}.
\end{aligned}$$

则 $\{\mathscr{G}_n\}$ 是 X 的展开. 若不然, 存在 $x \in X$ 及 x 的开邻域 W, 使对 $i \in \mathbb{N}$ 有 $x_i \in X$ 满足 $x \in g(i,x_i) \not\subset W$. 由于 $x \in V_i(x_i)$, 所以 $x_i \to x$. 选取 $l, m \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{B}(x,1/l) \subset U_m(x) \subset W$. 若对 $y \in X$ 有 $x \in h(l,y) \subset V_l(y)$, 那么 $y \in \mathrm{B}(x,1/l) \subset U_m(x)$, 于是 $p(l,x) \in U_m(x)$, 从而有 $k \in \mathbb{N}$, 使 $U_m(x) = U_k(p(l,x))$. 因为 $U_k(p(l,x)) \cap h(l,p(l,x))$ 是 x 的开邻域, 存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使当 $i \geqslant i_0$ 时, $x_i \in U_k(p(l,x)) \cap h(l,p(l,x))$, 因而当 $i \geqslant i_0$ 时, $p(l,x_i) \leqslant p(l,x)$. 另一方面, 若 $i \geqslant l$, 则 $x \in g(i,x_i) \subset h(l,p(l,x_i))$, 那么 $p(l,x) \leqslant p(l,x_i)$. 故当 $i \geqslant \max\{i_0,l\}$ 时, $p(l,x_i) = p(l,x)$, 这时 $x_i \in U_k(p(l,x_i))$, 于是当 $i \geqslant \max\{i_0,l,k\}$ 时, $g(i,x_i) \subset U_k(p(l,x_i)) = U_k(p(l,x)) = U_m(x) \subset W$, 矛盾. 所以 X 是可展空间.

1.3 基

度量空间及拓扑空间概念提出后产生的一般性问题是寻求空间的度量化定理, 即对可度量空间给出内在刻画. 这一问题在 20 世纪 50 年代得到完满的解决.

定义 1.3.1 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为在 $x \in X$ 是局部有限 (离散) 的 [5, 53], 若存在 x 的邻域 V, 使 V 与 $\mathscr{P}$ 中至多有限个 (一个) 元相交. 若 $\mathscr{P}$ 在 X 的每一点是局部有限 (离散) 的, 则称 $\mathscr{P}$ 在 X 是局部有限 (离散) 的.

继 Stone 定理之后, Bing, Nagata 和 Smirnov 得到了经典的度量化定理.

定理 1.3.2 (Bing-Nagata-Smirnov *度量化定理*) 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是可度量空间;

(2) X 具有 σ 离散基 [53];

(3) X 具有 σ 局部有限基 [311, 354].

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 (X,d) 是度量空间. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{B}_n=\{\mathrm{B}(x,1/2^n)\}_{x\in X}$. 则 $\mathrm{st}(x,\mathscr{B}_n)\subset \mathrm{B}(x,1/n)$. 由 Stone 定理 (定理 1.2.3), $\mathscr{B}_n$ 具有 σ 离散开加细 $\mathscr{V}_n$. 则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$ 是 X 的 σ 离散基.

(2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的, 下面证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 设 X 具有 σ 局部有限基 $\mathscr{B}$. 对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 置 $\mathscr{V}=\{B\in\mathscr{B}:$ 存在 $U\in\mathscr{U}$, 使 $B\subset U\}$. 则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 局部有限开加细. 故 X 是仿紧空间, 从而 X 是正规空间.

记 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$, 其中 $\mathscr{B}_n$ 是局部有限的. 对 $n,m\in\mathbb{N}$, $B\in\mathscr{B}_n$, 置

$$B_0=\cup\{A\in\mathscr{B}_m:\overline{A}\subset B\}.$$

则 $\overline{B}_0\subset B$. 由 Urysohn 引理, 存在连续函数 $f_B:X\to\mathbb{I}$, 使 $f_B(\overline{B}_0)\subset\{1\}$ 且 $f_B(X-B)\subset\{0\}$. 对 $x,y\in X$, 定义

$$d_{nm}(x,y)=\min\{1,\sum_{B\in\mathscr{B}_n}|f_B(x)-f_B(y)|\}.$$

则 d_{nm} 是 X 的伪距离. 重排 $\{d_{nm}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ 为 $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. 再定义 $\rho:X\times X\to\mathbb{R}^+$ 为

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k(x,y)}{2^k}.$$

则 ρ 是 X 的距离, 且由 ρ 生成的 X 的度量拓扑就是 X 的拓扑, 所以 X 是可度量空间.

定理 1.3.2 的 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 称为 Bing 度量化定理, (1) $\Leftrightarrow$ (3) 称为 Nagata-Smirnov 度量化定理. 由此可得到进一步的度量化定理.

定义 1.3.3[54] 空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为紧有限的, 若对 $K\in\mathscr{K}(X)$, $(\mathscr{P})_K$ 是有限的.

显然, 局部有限集族 $\Rightarrow$ 紧有限集族 $\Rightarrow$ 点有限集族.

推论 1.3.4[54] X 是可度量空间当且仅当 X 是具有 σ 紧有限基的正则空间.

证明 只需证充分性. 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ 紧有限基. 记 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$, 其中 $\mathscr{B}_n$ 是紧有限的. 断言: $\mathscr{B}_n$ 是局部有限的. 事实上, 对 $x\in X$, 记 $(\mathscr{B})_x=\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 令 $P_k=\bigcap_{i\leqslant k}B_i$. 对 $n,k\in\mathbb{N}$, 若 $\mathscr{B}_n$ 在 x 不是局部有限的, 那么 $(\mathscr{B}_n)_{P_k}$ 是无限的, 从而存在 $\mathscr{B}_n$ 的无限集 $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 X 的序列 $\{x_k\}$, 使 $x_k\in P_k\cap Q_k$. 令 $F=\{x\}\cup\{x_k:k\in\mathbb{N}\}$. 则 F 是 X 的紧集, 这与 $\mathscr{B}_n$ 的紧有限性相矛盾. 故 $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ 局部有限基, 从而 X 是可度量空间.

定理 1.3.5 下述条件等价:

(1) X 是可度量空间;