高职高专公共课系列教材

高等数学

（第二版）

金秀岩　主　编

Advanced Mathematics

東北大學出版社
Northeastern University Press

高职高专公共课系列教材

高　等　数　学

（第二版）

主　编　金秀岩
副主编　龚洪强　曾庆武

东北大学出版社
·沈　阳·

内 容 提 要

本书从高职高专教育的实际出发,以必要、够用为度,以讲清概念、强化应用为重点.在保持数学自身的系统性、逻辑性的基础上,适当减弱了严密的理论推证,尽量采用形象、直观的图形予以说明,对概念的引入我们注意从具体的实际问题抽象出数学模型,以达到从特殊到一般的论述方法,符合认识规律.力争体现数学思想方法,培养学生建立数学模型的能力,并在提高学生逻辑思维能力、实际运用和综合运用能力方面进行探索与改革.

全书涉及函数的基本概念、极限与连续、导数与微分的运算及应用、不定积分与定积分的运算及应用、空间解析几何、多元函数微积分学、级数、常微分方程等内容.

本书除可作为高职高专院校理工科类教学用书外,也供为成人高校大专层次的学生使用,还可供自学考试者、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 金秀岩主编 .— 沈阳 :东北大学出版社,2006.6(2007.7 重印)

ISBN 978-7-81102-050-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①金… Ⅲ.高等数学-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 072512 号

出 版 者:东北大学出版社

地址:沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编:110004

电话:024—83687331(市场部)　83680267(社务室)

传真:024—83680180(市场部)　83680265(社务室)

E-mail:neuph @ neupress.com

http://www.neupress.com

印 刷 者:沈阳市第六印刷厂书画彩印中心

发 行 者:新华书店总店北京发行所

幅面尺寸:184mm×260mm

印　　张:14.5

字　　数:362 千字

出版时间:2006 年 6 月第 2 版

印刷时间:2007 年 7 月第 4 次印刷

责任编辑:李　平　刘宗玉　　责任校对:李　莉

封面设计:唐敏智　　责任出版:杨华宁

定　　价:23.00 元

前言

高等数学是高职高专院校理工类各专业的公共必修课，是教学计划中的一门重要基础课，是工程技术人员必须掌握的基础知识．设置本课程的目的与任务是：使学生获得微积分的基本理论和解决问题的基本方法，并为后续课程的学习和进一步扩大知识面奠定必要的数学基础．

编写本书的指导思想是：从高职高专教育的实际出发，以必要、够用为度，以讲清概念、强化应用为重点．在保持数学自身的系统性、逻辑性的基础上，适当减弱了严密的理论推证，尽量采用形象、直观的图形予以说明，对概念的引入我们注意从具体的实际问题抽象出数学模型，以达到从特殊到一般的论述方法，符合认识规律．力争体现数学思想方法，培养学生建立数学模型的能力，并在提高学生逻辑思维能力、实际运用和综合运用能力方面进行探索与改革．

全书涉及函数的基本概念、极限与连续、导数与微分的运算及应用、不定积分与定积分的运算及应用、空间解析几何、多元函数积分学及其应用、级数、常微分方程等．例题、习题的选择侧重于基本训练，在此基础上注意选择有针对性的应用题．另外，每章后都配备了单元测试题，供检验学习效果之用．

本书除可作为高职高专院校理工科类教学用书外，也可供成人高校大专层次的学生使用，还可供自学考试者、工程技术人员参考．

本书系第二版，是在使用二年的基础上，对部分内容进行了修订，增删了若干习题而成。全书共 11 章，总课时为 108 学时，各院校可根据实际情况决定内容的取舍．

参加本书编写的人员及分工如下：第 1 章，李宝娣；第 2 章，黄溪生；第 3 章，杨平；第 4 章，郭丽颖；第 5 章、第 6 章，刘路漫；第 7 章，郑春玲；第 8 章，曾庆武；第 9 章，曾庆健；第 10 章，金秀岩；第 11 章，龚洪强、叶采飞．本书由金秀岩担任主编、主审，并对全书统稿；龚洪强、曾庆武担任副主编；曾庆健、叶采飞担任副主审．

在本书的编写过程中，得到了学院各级领导的热情关怀和大力支持，在此表示衷心的感谢．在本书原稿的打印及编辑整理过程中学院基础部余海林老师给予了全力的帮助，在此也深表感谢．由于编者水平所限，加之时间仓促，书中难免有缺点和不当之处，敬请同仁和广大读者批评指正．

编　者

2006 年 2 月 16 日

于广东松山职业技术学院

目　录

第一章　预备知识

函数是高等数学研究的对象，也是高等数学的最基础、最基本的概念之一．因此，熟悉函数的各种性质及其运算，就为学习这门课程奠定了坚实的基础．

第一节　函数的概念

一、常量与变量

我们知道圆的面积等于半径乘半径再乘无理数 π，其中面积随着圆的半径的变化而变化，而无理数 π 保持不变．又如在质点自由落体的下落过程中，它们所经过的路程 s 和速度 v 都随着时间 t 而变化，而它的重力加速度 g 相对保持不变．我们抛开这些问题的实际意义，只从问题的数学含义上考虑不难发现在某一特定问题中有些量是发生变化的，而有些量是保持不变的．根据这些量的不同特点我们归纳出其数学含义，并予以定义就是：在某个变化过程中保持不变的量称为常量；而在某个变化过程中变化着的量称为变量．结合定义我们知道上述无理数 π、重力加速度 g 在其特定的问题中是常量；圆的面积、圆的半径、路程 s 和速度 v 以及时间 t 在其特定的问题中是变量．

一个量是常量还是变量，要根据具体情况做出具体分析，例如，重力加速度 g，就小范围区域来说，可以认为是常量，就大范围区域来说，则是变量．

常量通常用字母 a,b,c 等表示，变量用 x,y,z 等表示．

任何一个变量，都有一定的变化范围．例如，加工某零件的最高温度是 225℃，最低温度是 115℃，那么，这一零件的加工温度 T 的变化范围就是 115～225℃．也就是说，115～225℃是变量 T 的取值范围．变量的取值范围常用集合、区间等来表示．关于集合、区间的概念，在中学数学中已经学过，这里不再赘述．

下面介绍在今后学习中时常遇到被称做邻域的一种开区间，其规定如下：

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体叫做点 a 的 δ 邻域，点 a 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径．记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

在点 a 的 δ 邻域中去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$．

二、函数概念

我们先将上述两个例子用数学关系表示出来．

例 1　设圆的面积为 A，半径为 r，则有关系

$$A=\pi r^2$$

当半径 r 发生变化，面积 A 通过关系式 $A=\pi r^2$ 也随之变化，当 r 在其变化范围内有一确定值时，面积 A 的值也就确定了．

例 2　质点自由落体下落的距离 s 和时间 t 的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

当 t 在其变化范围内变化时,距离 s 通过关系式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 也随之变化;t 有一确定值时,s 的值随之确定.

在上述两例中抛开这些问题的实际意义,我们发现它们具有共同的性质,那就是:在某一变化过程中有两个变量,其中当一个变量发生变化时,另一个就随着这个变量的变化而发生变化,而且当其中一个变量取定了某个确定的值时,另一个变量就按着一定的法则总有确定的值和它对应.将这些特点归纳起来就可以得到如下函数定义:

定义1　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y,如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.其中 x 叫自变量,y 叫因变量,自变量 x 的变化范围叫做函数的定义域,因变量 y 的变化范围叫做函数的值域.如果函数的定义域为 D,那么函数的值域为

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

如果自变量取某一数值 x_0 时,函数有确定的值和它对应,那么就说函数在 x_0 处有定义.这时的函数值记作 $f(x_0)$.

函数的定义包括三个要素:

一是函数的定义域.定义域不同,函数就不相同,例如,$y=x+1$ 与 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$,前者的定义域是$(-\infty,+\infty)$,后者的定义域是$(-\infty,1)$与$(1,+\infty)$.

二是对应关系.对应关系不同就是不同的函数,给出 y 与 x 间的对应关系就是给出了函数.函数记号 $y=f(x)$中的字母 f 是表示 x 与 y 之间的对应关系.在两个函数中虽然定义域相同,但对应关系不同,仍是两个不同的函数.例如,$y=x$ 与 $y=|x|$.

三是函数的值域.值域的取值由函数的定义域和对应关系所确定.

例如,$y=|x|$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$[0,+\infty)$;$y=\sin x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$[-1,1]$.

注意　对于函数 $y=f(x)$,当自变量在其定义域内任意取定一个数值 x 时,变量 y 总有确定的数值与它相对应,至于有几个函数值 y 与取定的自变量 x 相对应,由函数定义可知,至少一个,多则不限.如果对于自变量的每一个值,函数都只有一个确定的值和它对应,这种函数叫单值函数.否则,如果对于自变量的每一个值,函数都有两个或两个以上确定的值和它相对应,这种函数叫多值函数.

例如,$y=\mathrm{arcsin}x$,函数 y 在$(-\infty,+\infty)$内是 x 的多值函数,即对于 x 的每一个数值,y 都有两个以上数值和它对应.

例3　求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域.

解　因为根式 $\sqrt{1-x^2}$的值不能为负,所以应有 $\sqrt{1-x^2}\geqslant 0$,即 $x^2\leqslant 1$,于是 $|x|\leqslant 1$.故函数的定义域为 $D=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

例4　求函数 $y=\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$的定义域.

解　因为

$$\left|\frac{x-1}{5}\right|\leqslant 1 \text{ 且 } 25-x^2>0$$

即 $$|x-1|\leqslant 5 \text{ 且 } |x|<5$$
亦即 $$-4\leqslant x\leqslant 6 \quad \text{且} \quad -5<x<5$$
因此有 $$-4\leqslant x<5$$
于是,得出给定函数的定义域为 $D=[-4,5)$.

常用来表示函数的方法有三种.

1. 公式法

公式法就是用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法. 有些函数在其定义域内用一个式子就可完全表示,例如:$y=2e^x+1$. 而有些函数在其定义域内要用几个式子才能完全表示,这类函数我们称做分段函数,在科技、工程中经常用到分段函数.

例 5 函数

$$y=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

就是一个典型的分段函数(如图 1-1).

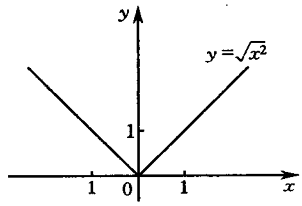

图 1-1

例 6 在等温过程中,气体压强 p 与体积 V 间的函数关系是

$$p=\begin{cases} \dfrac{k}{V}, & V\geqslant V_0 \\ \dfrac{\gamma}{V-\beta}-\dfrac{\alpha}{V^2}, & V<V_0 \end{cases} \quad (V_0, k, \alpha, \beta, \gamma \text{ 都是常数})$$

这也是一个分段函数.

例 7 已知函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ x^2, & 2<x\leqslant 4 \end{cases}$$

求(1)定义域;(2)$f(x-1)$;(3)$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

解 (1)定义域为 $D=[0,2]\cup(2,4]=[0,4]$.

(2) $$f(x-1)=\begin{cases} (x-1)+2, & 0\leqslant x-1\leqslant 2 \\ (x-1)^2, & 2<x-1\leqslant 4 \end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases} x+1, & 1\leqslant x\leqslant 3 \\ (x-1)^2, & 3<x\leqslant 5 \end{cases}$$

(3) 因为 $1\in[0,2]$,所以 $f(1)=1+2=3$;
因为 $2\in[0,2]$,所以 $f(2)=2+2=4$;
因为 $3\in(2,4]$,所以 $f(3)=3^2=9$.

2. 表格法

表格法就是将一系列的自变量值与对应的函数值列成表表示函数的方法如平方表、对数表、三角函数表等等.

如:在标准大气压下,温度 t 与水的体积 V 的函数关系,实测如下表:

t/℃	0	2	4	6	8	10	12	14
V/cm^3	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

3. 图示法

图示法就是用坐标系中直线或曲线表示函数的方法.

三、反函数及其图形

定义 2　设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，如果把 y 当作自变量，x 当作函数，则由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 而函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

习惯上，我们总是用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此，我们把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$，称 $y=f^{-1}(x)$ 和 $y=f(x)$ 互为反函数. 它们的图形在同一个直角坐标系下关于直线 $y=x$ 对称.

例 8　求函数

$$y=f(x)=5x-2$$

的反函数，并在同一直角坐标系中做出它们的图形.

解　由 $y=f(x)=5x-2$ 解出 x，得所求的反函数为

$$x=f^{-1}(y)=\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}$$

将上式中的 x 换成 y，将 y 换成 x，因此得出 $y=5x-2$ 的反函数是

$$y=\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$$

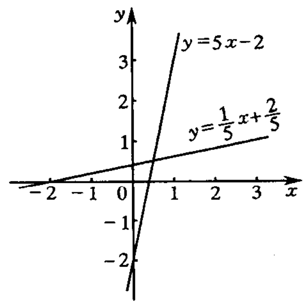

图 1-2

如图 1-2 所示. 从图 1-2 可以看出，直接函数 $y=5x-2$ 的图形与反函数 $y=\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

习题 1-1

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否相同？为什么？在哪一区间内它们是相同的？

(1) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x,\ \varphi(x)=1$；　(2) $f(x)=\lg x^2,\ \varphi(x)=2\lg x$；

(3) $f(x)=x,\ \varphi(x)=(\sqrt{x})^2$；　(4) $f(x)=x,\ \varphi(x)=\sqrt[3]{x^3}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\arccos\frac{2x-3}{3}$；　(2) $y=\sqrt{25-x^2}$；　(3) $y=\sqrt{x^2-16}$；

(4) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　(5) $y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$；　(6) $y=\frac{1}{\lg(2-x)}$.

3. 设 $f(x)=\sqrt{9+x^2}$，求下列函数值：$f(0), f(1), f\left(\frac{1}{a}\right), f(x_0+h)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1;\\ x-1, & 1<|x|<2.\end{cases}$ 求：(1) 定义域；(2) 计算 $f(0), f(1)$.

5. 已知 $F(x)=x^3+x\cos x$，证明：$F(-x)=-F(x)$.

6. 已知 $\varphi(x)=\sin^2x-5x^2$，证明：$\varphi(-x)=\varphi(x)$.

7. 若 $\varphi(x)=3\sin x-4\cos x$，证明：$\varphi(x+2\pi)=\varphi(x)$.

8. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$.

第二节　函数的几种特性

一、函数的奇偶性

定义 1　**如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任何 x，恒有**

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数；如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任何 x，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例 1　判断 $y=f(x)=x^2\cos x$ 的奇偶性.

解　因为

$$f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x)$$

所以 $y=x^2\cos x$ 是偶函数.

例 2　判断 $y=f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$ 的奇偶性.

解　因为

$$f(-x)=\ln\frac{2-(-x)}{2+(-x)}=\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{2-x}{2+x}=-f(x)$$

所以 $y=\ln\frac{2-x}{2+x}$ 是奇函数.

二、函数的周期性

定义 2　**对于函数 $y=f(x)$，如果存在不为零的常数 T 使关系式**

$$f(x+T)=f(x)$$

对于定义域内任何 x 值都成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数. T 叫做 $f(x)$ 的周期. 一般我们所说的周期是指最小正周期.

例如，$\sin x,\cos x,\tan x,\cot x$ 是周期函数，其中 $\sin x,\cos x$ 的周期是 2π，$\tan x,\cot x$ 的周期是 π.

三、函数的单调性

定义 3　**如果对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有**

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；如果当 $x_1<x_2$ 时，

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的. 单调增加的或单调减少的函数统称为单调函数.

例 3 判断函数 $f(x)=3x$ 的单调性.

解 任取区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的两点 x_1,x_2,如果 $x_1<x_2$,则有

$$f(x_1)-f(x_2)=3x_1-3x_2=3(x_1-x_2)<0$$

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,于是有 $f(x_1)<f(x_2)$,因此,$f(x)=3x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的.

例 4 判断函数 $y=x^2+1$ 的单调性.

解 对于任意两点 x_1,x_2,

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

如果 $x_1<x_2\leqslant0$,则 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,所以在区间 $(-\infty,0]$ 上函数是单调减少的;

如果 $x_2>x_1\geqslant0$,则 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以在区间 $[0,+\infty)$ 上函数是单调增加的.

因此函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

四、函数的有界性

定义 4 设函数在区间 I 内有定义,如果存在正的常数 M,使得对于区间 I 内的任何 x 值,恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是有界的;如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 I 内是无界的.

例如,函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内,总有 $|\sin x|\leqslant1$,所以,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的,但在 $[1,+\infty)$ 上却是有界的.

习题 1-2

1. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=e^{-x}-e^{x}$; (2) $y=x(x-1)(x+1)$; (3) $y=\tan x$;

(4) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$; (5) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; (6) $y=f(x)-f(-x)$.

2. 函数 $y=\sin3x$ 的周期是多少?

3. 判断下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\tan x,(0,+\infty)$; (2) $y=2^x,(-\infty,+\infty)$; (3) $y=2^{-x},(-\infty,+\infty)$; (4) $y=1-3x^3,(-\infty,+\infty)$.

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,如果 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,试证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

第三节 初等函数

一、基本初等函数

1. 幂函数

定义 1　函数

$$y = x^{\mu} \quad \text{(其中 } \mu \text{ 为任意实数)}$$

叫做幂函数.

它的定义域是随着 μ 的不同而不同.但不论 μ 取什么值,幂函数在 $(0, +\infty)$ 中总有定义,图形都通过点 $(1,1)$.且当 $\mu>0$ 时,在第一象限内是单调增加函数;当 $\mu<0$ 时,在第一象限内是单调减少函数.另外,有些幂函数具有奇偶性.例如 $y=x^2$,是 $(-\infty, +\infty)$ 内的偶函数,而 $y=x^3$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数.

在 $y=x^{\mu}$ 中,$\mu=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 是最常见的幂函数,它们的图形如图 1-3 所示.

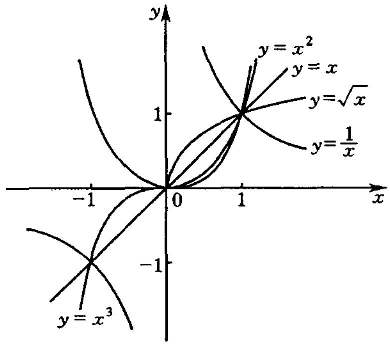

图 1-3

2.指数函数

定义 2　函数

$$y=a^x \quad (a>0, a\neq1)$$

叫做指数函数.

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.因为恒有 $a^x>0$ 及 $a^0=1$,所以指数函数的图形总在 x 轴上方,并通过点 $(0,1)$.且当 $a>1$ 时,在定义域内是单调增加函数;当 $0<a<1$ 时,在定义域内是单调减少函数.科技中常常使用以常数 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$.例如,函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的,而 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调减少的.它们的图形如图 1-4 所示.

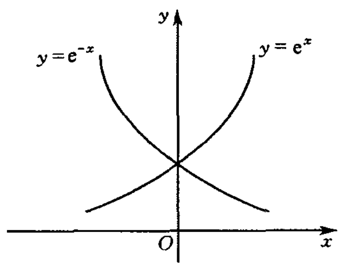

图 1-4

3.对数函数

定义 3　指数函数 $y=a^x$ 的反函数,记作

$$y=\log_a x \quad (a>0, a\neq1)$$

叫做对数函数.

它的定义域是 $(0, +\infty)$,因为恒有 $x>0$ 及 $\log_a 1=0$,所以对数函数的图形总在 x 轴右方,并通过点 $(1,0)$.且当 $a>1$ 时,在定义域内是单调增加函数;当 $0<a<1$ 时,在定义域内是单调减少函数.工程实际问题中常遇到的以 e 为底的对数函数

$$y=\log_{\mathrm{e}} x$$

叫做自然对数函数,简记作

$$y=\ln x$$

4.三角函数

常用的三角函数有

正弦函数　$y=\sin x$　$(-\infty<x<+\infty)$

余弦函数　$y=\cos x$　$(-\infty<x<+\infty)$

正切函数　$y=\tan x$　$\left(x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\text{的全体实数}\right)$

余切函数　$y=\cot x$　（$x\neq n\pi$ 的全体实数）

其中自变量要用弧度作单位，n 为任意整数.

三角函数都具有周期性，正弦函数和余弦函数是以 2π 为周期的周期函数；正切和余切函数是以 π 为周期的周期函数.

正弦函数和余弦函数的函数值介于 -1 和 1 之间，即 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，因此，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，而 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 分别在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $(0,\pi)$ 内是无界的.

图 1-5 分别表示了它们的图形.

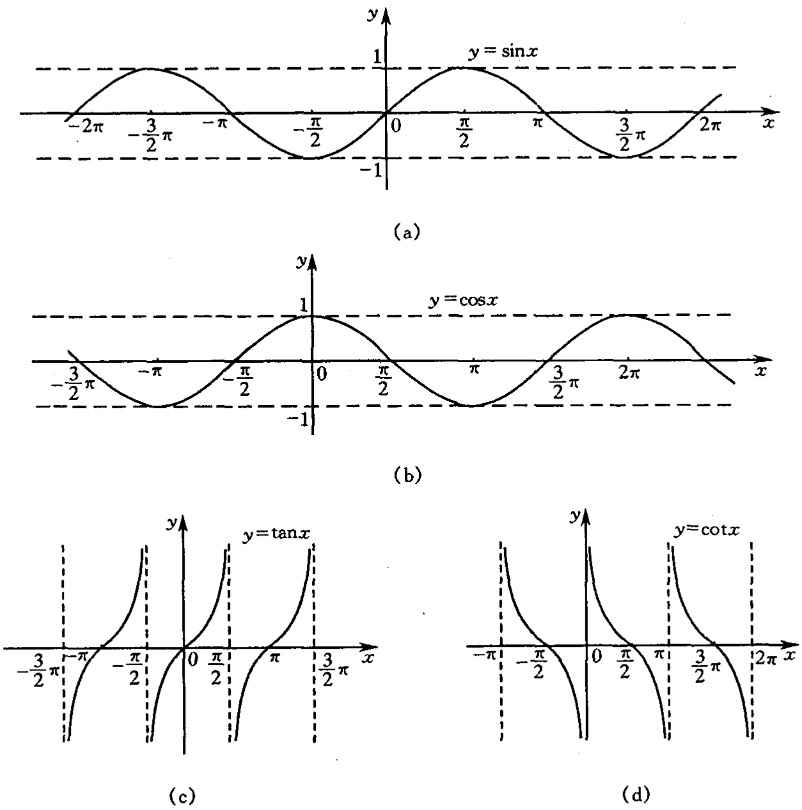

图 1-5

5.反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，对于上述四种三角函数，其相应的反函数为

反正弦函数　$y=\arcsin x$　$(-1\leqslant x\leqslant 1)$

反余弦函数　$y=\arccos x$　$(-1\leqslant x\leqslant 1)$

反正切函数　$y=\arctan x$　$(-\infty<x<+\infty)$

反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$　$(-\infty<x<+\infty)$

反三角函数的图形都可由相应的三角函数的图形按反函数规则做出（图 1-6）.

反三角函数都具有多值性，例如，$y=\arcsin x$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，对应的 y 值有 $2k\pi+\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，即有无穷多个值对应，所以是多值函数.但是，我们可以选取这些函数的单值分

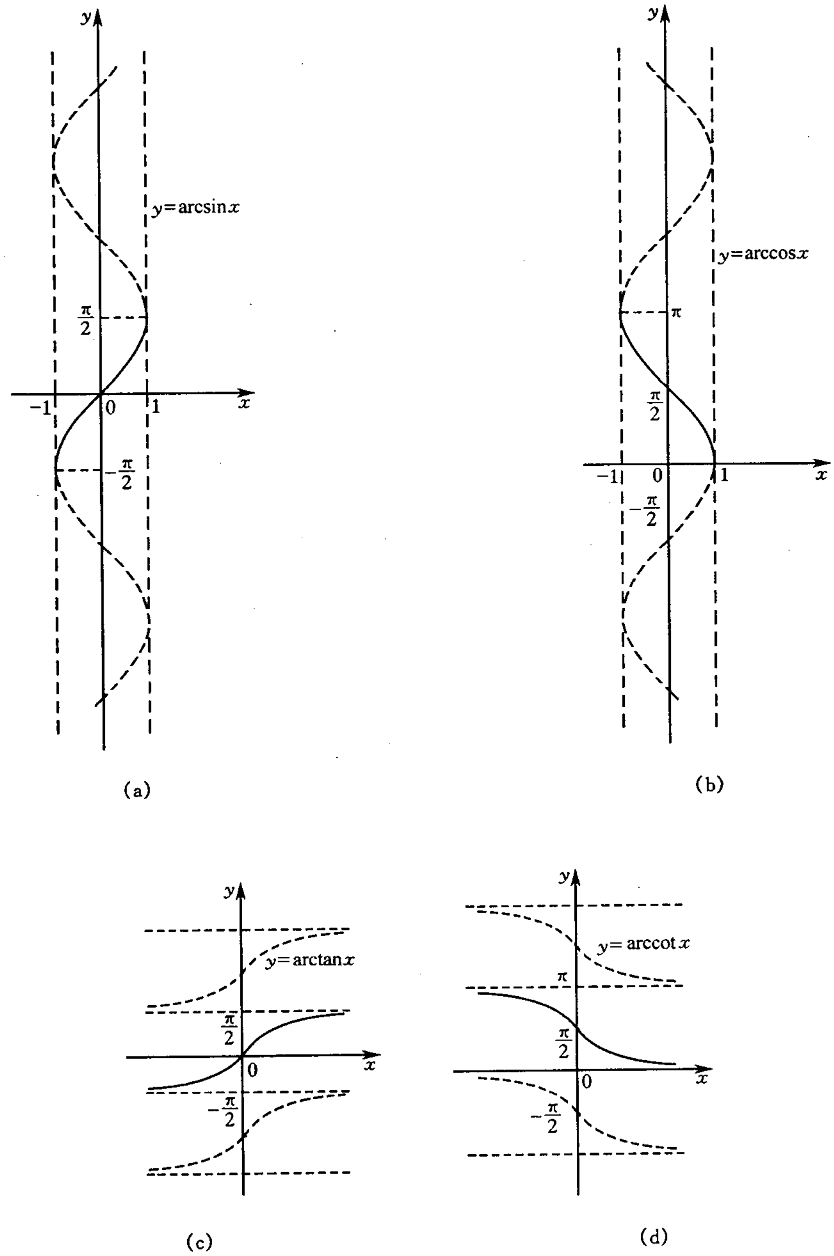

图 1-6

支.例如,把 arcsin$x$ 的值限制在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上,称为反正弦函数的主值,并记作 arcsin$x$,这样,函数 $y=\arcsin x$ 就是定义在闭区间$[-1,1]$上的单值函数,且有

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$$

通常也称 $y=\arcsin x$ 为反正弦函数,其图形为图 1-6(a)的粗线部分. 类似地,有

反余弦函数 $\quad y=\arccos x,\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant\pi$