新课标

高中数学竞赛通用教材（综合分册）

主编 孙惠华 蔡小雄

编委（以姓氏笔画为序）

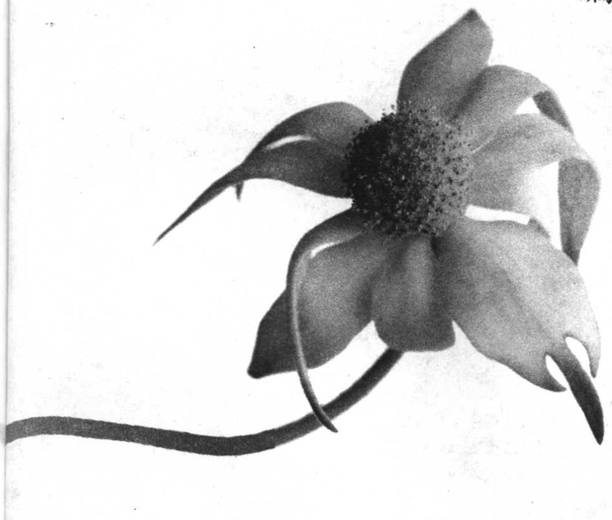
王希年 吕峰波 李惟峰

孙惠华 沈虎跃 郑日锋

金荣生 胡克元 陈相友

许康华 王红权 周顺钿

虞金龙 蔡小雄



浙江大學出版社

前　言

“奥林匹克”这一响亮的名字，曾让多少有竞争意识的人为之热血沸腾，心潮澎湃。中学生数学奥林匹克竞赛也是如此。从 1894 年匈牙利揭开现代中学生数学竞赛的序幕，一百多年来，数学竞赛吸引了世界各地的无数数学爱好者积极参与。

虽然不是每位参加数学竞赛的人都有机会获得国际金牌，也不是每个人都能通过竞赛取得保送大学的资格，但是参加“奥赛”的过程中所培养起来的数学思维能力和数学素养，以及“奥赛”中渗透的现代数学前沿知识与创新的思维方式，对日常学习与生活都将有重要的指导意义。正如数学前辈所言：“数学不仅具有真理，而且具有至高无上的美，人们在数学的王国里将找到真正意义上的快乐。”“数学能使你的思想正确、敏捷。有了正确、敏捷的思想，你才有可能爬上科学的大山。”

继广东、山东等省之后，2006 年 9 月开始浙江、江西等许多省份也实行了新一轮的课程改革。然而，目前市场上能与新课程标准相配套，而且真正适合课堂教学模式的竞赛辅导用书几乎是空白。为了更好地帮助广大数学爱好者进一步理解高中数学奥林匹克竞赛的知识方法，同时也为了给数学高考尖子、优秀高复生提高数学水平提供良好的数学资料，从而在数学联赛或高考的激烈竞争中游刃有余、脱颖而出，我们组织了部分数学奥林匹克高级教练与特级、高级教师，精心编写了这套《新课标高中数学竞赛通用教材》(共三个分册)。

本套教材力求体现的特色主要有以下三方面：

1. 同步辅导，螺旋上升

每册分成三部分，即必修、选修与实战演练三个模块。从竞赛培训的实际出发，将传统的竞赛内容与教材内容，将讲、练、考等方面进行了有机整合。必修部分与教材同步，是教材的补充和延伸，可直接在平时课堂教学中渗透；选修部分可作为课外辅导的专题资料，选题难度有些涉及全国联赛二试及 CMO、IMO 试题；实战演练则可作为学习完全书的综合测试。

2. 方法全面，点拨精要

每节专题均设有[知识点金]、[例题精析]、[赛点归纳]与[同步检测]四个栏目。[知识点金]囊括了与本节相关的所有知识要点与方法；[例题精析]力求向读者奉献最新最典型的高考或竞赛题；[赛点归纳]是对全节内容的概括与升华，是“点睛”之处；[同步检测]则可作为巩固提高的配套练习。每题均附有详细解答，便于读者完成后及时反馈。

3. 来源实践，实用高效

本书大多数内容是在原浙江省理科创新实验班课堂实践的基础上发展与完善的，因此，它可以直接应用到课堂教学中，是一本真正实用有效的竞赛辅导与同步提高材料。

也应指出，由于编写时间仓促，编者水平有限，书中错漏难免，敬请专家与读者批评指正，以便再版时修订。

编者

2007 年 4 月 1 日

目 录

方法模块(课堂同步拓展)

第一讲 数学归纳法

知识点金

掌握第一数学归纳法与第二数学归纳法，能够运用第一、第二数学归纳法证明与自然数有关的问题，了解反向归纳法(倒推归纳法)、跳跃数学归纳法与螺旋归纳法并会运用它们证明一些竞赛题.

1. 第一数学归纳法

设 $P(n)$ 表示一个与自然数 n 有关的命题，若

(1) $P(n_0)(n_0\in\mathbf{N})$ 成立；

(2) 假设 $P(k)(k\geqslant n_0)$ 成立，可推出 $P(k+1)$ 成立，

则 $P(n)$ 对一切自然数 $n\geqslant n_0$，$n\in\mathbf{N}$ 时都成立.

2. 第二数学归纳法

设 $P(n)$ 表示一个与自然数 n 有关的命题，若

(1) $P(n_0)(n_0\in\mathbf{N})$ 成立；

(2) 假设 $P(n)$ 在 $n_0\leqslant n\leqslant k$ 时成立，由此可推得 $P(k+1)$ 成立，

则 $P(n)$ 对一切自然数 $n\geqslant n_0$ 都成立.

3. 反向归纳法(倒推归纳法)

设 $P(n)$ 表示一个与自然数 n 有关的命题，若

(1) $P(n)$ 对无限多个自然数 n 都成立；

(2) 假设 $P(k+1)$ 成立，可推出 $P(k)$ 也成立，

则 $P(n)$ 对一切自然数 n 都成立.

4. 跳跃数学归纳法

设 $P(n)$ 表示一个与自然数 n 有关的命题，若

(1) $P(1),P(2),\cdots,P(l)$ 成立；

(2) 假设 $P(k)$ 成立，可以推出 $P(k+l)$ 成立，

则 $P(n)$ 对一切自然数 n 都成立.

5. 螺旋归纳法

螺旋归纳法实质上是一种交叉过渡的归纳方法，其原理如下：

设 $P(n),Q(n)$ 是两串与自然数 n 有关的命题，若

(1) $P(1)$ 成立；

(2) 由 $P(k)$ 成立，可得 $Q(k)$ 成立，由 $Q(k)$ 成立，可得 $P(k+1)$ 也成立，

则对所有自然数 n，$P(n),Q(n)$ 都成立.

6. 数学归纳法证题的主要策略

(1) 直接运用归纳假设；

(2) 削弱原来的命题；

(3) 强化命题的结论；

(4) 适当加大递推跨度.

例题精析

例 1 设 $a>0$ 且 $a\neq1$，$f(x)=\dfrac{a(a^{2x}-1)}{a^x(a^2-1)}$，求证：$f(n)\geqslant n,n\in\mathbf{N}^*$.

证明 证法一：数学归纳法证明：

(1) 当 $n=1$ 时，$f(1)=\dfrac{a(a^2-1)}{a(a^2-1)}=1$，不等式成立；

(2) 假设 $n=k$ 时，$f(k)\geqslant k$ 成立，当 $n=k+1$ 时，$f(k+1)=af(k)+a^{-k}\geqslant ak+a^{-k}$，由 $a>0$ 且 $a\neq1$，可令 $\dfrac{1}{a}=1+\alpha,\alpha>0$，(以上当 $a<1$ 时)

当 $a>1$ 时，对 $\forall x\in\mathbf{N}^*$

$$f(x)=\frac{a(a^2-1)[(a^2)^{x-1}+(a^2)^{x-2}+\cdots+1]}{a^x\cdot(a^2-1)}$$

$$=\frac{(a^2)^{x-1}+(a^2)^{x-2}+\cdots+1}{a^{x-1}}\geqslant\frac{x\cdot a^{x-1}}{a^{x-1}}=x$$

于是 $ka+a^{-k}=ka+(1+\alpha)^k\geqslant ka+1+k\alpha=k\left(a+\dfrac{1}{a}-1\right)+1>k+1$，即 $n=k+1$ 不等式也成立，由(1)，(2)可知不等式对 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

证法二：数学归纳法，利用均值不等式，得

$$f(k+1)=af(k)+a^{-k}>ak+a^{-k}=a+a+\cdots+a+\frac{1}{a^k}>k+1.$$

证法三：数学归纳法，先证明：$f(k+1)-f(k)>1$，

$$f(k+1)-f(k)=\frac{a}{a^2-1}\left(\frac{a^{2k+2}-1}{a^{k+1}}-\frac{a^{2k}-1}{a^k}\right)=\frac{1}{(a^2-1)\cdot a^k}(a^{2k+2}-1-a^{2k+1}+a)$$

$$=\frac{(a^{2k}+1)(a-1)}{(a^2-1)\cdot a^k}=\frac{a^{2k+1}+1}{a^k(a+1)}-1+1=\frac{(a^{k+1}-1)(a^k-1)}{a^k(a+1)}+1>1.$$

评注 本题也可不用数学归纳法证明. $f(n)=\frac{1}{a^n}\cdot\frac{a[1-(a^2)^n]}{1-a^2}=\frac{1}{a^n}(a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1})=\frac{1}{2a^n}[(a+a^{2n-1})+(a^3+a^{2n-3})+\cdots+(a^{2n-1}+a)]\geqslant\frac{1}{2a^n}\cdot n\cdot 2a^n=n$.

例 2 设 $1<x_1<2$,对于 $n=1,2,3,\cdots$,定义 $x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2$,求证:对于 $n\geqslant 3$,有 $|x_n-\sqrt{2}|<2^{-n}$.

证明

(1)当 $n=3$ 时,由 $x_3=1+x_2-\frac{1}{2}x_2^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(x_2-1)^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(x_1-\frac{1}{2}x_1^2\right)^2$,

考虑二次函数 $x_1-\frac{1}{2}x_1^2$ 在区间(1,2)内为减函数,故 $\frac{3}{2}-\frac{1}{8}<x_3<\frac{3}{2}$,

所以 $-\frac{1}{8}<\frac{3}{2}-\sqrt{2}-\frac{1}{8}<x_3-\sqrt{2}<\frac{3}{2}-\sqrt{2}<\frac{1}{8}$,即 $|x_3-\sqrt{2}|<\frac{1}{2^3}$.

(2)假设 $n=k(k\geqslant 3)$ 时,有 $|x_k-\sqrt{2}|<2^{-k}$,则当 $n=k+1$ 时,

$|x_{k+1}-\sqrt{2}|=\frac{1}{2}\cdot|x_k-\sqrt{2}|\cdot|x_k+\sqrt{2}-2|<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^k}\left|\frac{1}{2^k}+2\sqrt{2}-2\right|<\frac{1}{2^{k+1}}$.

即 $n=k+1$ 时结论也成立.

所以对于 $n\geqslant 3$,都有 $|x_n-\sqrt{2}|<2^{-n}$.

例 3 已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1,a_2=3,a_3=6$,且当 $n>3$ 时,$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}-2a_{n-3}$,试证:对大于 3 的自然数 n 恒有 $a_n>3\cdot 2^{n-2}$.

证明 用数学归纳法证明 $a_{n+1}>2a_n$,

(1)当 $n=4$ 时,$a_4=3a_3-a_2-2a_1=18-3-2=13>3\times 2^2$.

(2)假设 $k\geqslant n\geqslant 5$ 时,有 $a_k>2a_{k-1},a_{k-1}>2a_{k-2}$,则

当 $n=k+1$ 时,$a_{k+1}=3a_k-a_{k-1}-2a_{k-2}=2a_k+a_k-a_{k-1}-2a_{k-2}>2a_k+2a_{k-1}-a_{k-1}-2a_{k-2}=2a_k+(a_{k-1}-2a_{k-2})>2a_k$,因此,对 $n>3$ 都有 $a_{n+1}>2a_n$ 成立,由此证得.

评注 本题也可考虑特征方程 $x^3-3x^2+x+2=0$,所以 $(x-2)(x^2-x-1)=0$ 解得 $x_1=2$,$x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,故可设 $a_n=A+B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$,代入初始值解出通项,由通项证得.

例 4 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_n=a_{n-1}b_n,b_n=\frac{b_{n-1}}{1-a_{n-1}^2}(n\geqslant 2)$,$a_1=p,b_1=q$,且 $p,q>0,p+q=1$,求 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的通项公式.

解 当 $n=1$ 时,$a_1=p,b_1=q$,

当 $n=2$ 时,$b_2=\frac{q}{1-p^2}=\frac{1-p}{1-p^2}=\frac{1}{1+p}$,$a_2=a_1b_2=\frac{p}{1+p}$,

当 $n=3$ 时,$b_3=\frac{1+p}{1+2p}$,$a_3=\frac{p}{1+2p}$,

猜想 $a_n=\frac{p}{1+(n-1)p}$,$b_n=\frac{1+(n-2)p}{1+(n-1)p}$,下面用数学归纳法证明:

(1)当 $n=1,2,3$ 时,显然成立;

(2)假设 $n=k$ 时,$a_k=\frac{p}{1+(k-1)p}$,$b_k=\frac{1+(k-2)p}{1+(k-1)p}$,

则当 $n=k+1$ 时,

$$b_{k+1}=\frac{b_k}{1-a_k^2}=\frac{\frac{1+(k-2)p}{1+(k-1)p}}{1-\left(\frac{p}{1+(k-1)p}\right)^2}=\frac{1+(k-2)p}{1+(k-1)p}\cdot\frac{[1+(k-1)p]^2}{[1+(k-1)p]^2-p^2}=\frac{1+(k-1)p}{1+kp},$$

$$a_{k+1}=a_kb_{k+1}=\frac{p}{a+(k-1)p}\cdot\frac{1+(k-1)p}{1+kp}=\frac{p}{1+kp},$$

由(1),(2)知猜想成立. 所以 $a_n=\dfrac{p}{1+(n-1)p}$, $b_n=\dfrac{1+(n-2)p}{1+(n-1)p}$.

例 5 整数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$, $a_2=7$, $-\dfrac{1}{2}<a_{n+1}-\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}}\leqslant\dfrac{1}{2}$,求证:$n\geqslant2$ 时,a_n 必为奇数.

证明 对自然数 n 进行归纳,并用数学归纳法证明以下结论:$a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n$,

(1)当 $n=1$ 时,由 $a_1=2$, $a_2=7$, $a_3-\dfrac{a_2^2}{a_1}=a_3-\dfrac{49}{2}\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$得 $a_3=25$,满足 $a_3=3a_2+2a_1$;

(2)假设对 $n<k,k\geqslant2$ 都有结论成立,则当 $n=k$ 时,只需证$-\dfrac{1}{2}<3a_{k+1}+2a_k-\dfrac{a_{k+1}^2}{a_k}<\dfrac{1}{2}$.

事实上 $3a_{k+1}+2a_k-\dfrac{a_{k+1}^2}{a_k}=\dfrac{3(3a_k+2a_{k-1})a_k+2a_k^2-(3a_k+2a_{k-1})^2}{a_k}=\dfrac{2(a_k^2-3a_ka_{k-1}-2a_{k-1}^2)}{a_k}$

$$=\frac{2[a_k^2-a_{k-1}(3a_k+2a_{k-1})]}{a_k}=-\frac{2a_{k-1}}{a_k}\left(a_{k+1}-\frac{a_k^2}{a_{k-1}}\right),$$

因为 $a_k=3a_{k-1}+2a_{k-2}(k\geqslant3)$, $a_2=7$, $a_1=2$,

所以 $a_k>2a_{k-1}$,所以$-\dfrac{2a_{k-1}}{a_k}\in(-1,1)$.

又由已知有$-\dfrac{1}{2}<a_{k+1}-\dfrac{a_k^2}{a_{k-1}}\leqslant\dfrac{1}{2}$,

所以$-\dfrac{1}{2}<3a_{k+1}+2a_k-\dfrac{a_{k+1}^2}{a_k}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

又$-\dfrac{1}{2}<a_{k+2}-\dfrac{a_{k+1}^2}{a_k}\leqslant\dfrac{1}{2}$,

所以 $a_{k+2}=3a_{k+1}+2a_k$,即当 $n=k$ 时结论成立.

由归纳原理知 $a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n$ 对任意自然数都成立,由初始值及此递归式不难得到 $n\geqslant2$ 时,a_n 必为奇数.

例 6 数列$\{u_n\}$中,$u_0=2$, $u_1=\dfrac{5}{2}$,且 $u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-\dfrac{5}{2}$,求数列的通项 u_n.

解 直接计算可得 $u_0=2=2^0+2^0$, $u_1=\dfrac{5}{2}=2^1+2^{-1}$, $u_2=\dfrac{5}{2}=2^1+2^{-1}$, $u_3=8\dfrac{1}{8}=2^3+2^{-3}$, $u_4=32\dfrac{1}{32}=2^5+2^{-5}$,……猜想 $u_n=2^{x_n}+2^{-x_n}$,下面用数学归纳法证明

假设当 $n\leqslant k$ 时有 $u_k=2^{x_k}+2^{-x_k}$ 成立,

当 $n=k+1$ 时,

因为 $u_{k+1}=u_k(u_{k-1}^2-2)-\dfrac{5}{2}=(2^{x_k}+2^{-x_k})[(2^{x_{k-1}}+2^{-x_{k-1}})^2-2]-\dfrac{5}{2}$

$$=2^{x_k+2x_{k-1}}+2^{-(x_k+2x_{k-1})}+2^{x_k-2x_{k-1}}+2^{-x_k+2x_{k-1}}-\frac{5}{2},\text{又 } u_{k+1}=2^{x_{k+1}}+2^{-x_{k+1}},$$

所以只需证 $2^{x_{k+1}}+2^{-x_{k+1}}=2^{x_k+2x_{k-1}}+2^{-(x_k+2x_{k-1})}+2^{x_k-2x_{k-1}}+2^{-x_k+2x_{k-1}}-\dfrac{5}{2}$,

即证：$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}\cdots\cdots * \\ 2^{x_n-2x_{n-1}}+2^{-x_n+2x_{n-1}}=\dfrac{5}{2}\cdots\cdots * * \end{cases}$

考虑到“*”特征方程的两根为 2，−1，则可设 $x_n=A\cdot 2^n+B\cdot(-1)^n$，由初始值 $x_0=0,x_1=1$ 解得 $x_n=\frac{1}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}\cdot(-1)^n$，将该式代入“* *”验证成立.

所以 $u_n=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ 时 $u_n=2^{x_n}+2^{-x_n}$ 对一切非负整数都成立.

例 7 某次象棋比赛共有 n 个人参加($n\geqslant 2$)，每两个都应对弈，且一定决出胜负，证明：比赛结束后，可将这 n 个人列为一队，使队列中的每一个人都曾战胜过紧跟在他后面的那个人.

解 (1)当 $n=2$ 时，结论显然成立；

(2)假设当 $n=k$ 时结论成立，那么当 $n=k+1$ 时，不妨先从 $k+1$ 个人中叫出 k 个人，由于这 k 个人都曾决出胜负，因此，根据归纳假设，可将他们按照要求列成一列，此后，再让剩下的那个人按照如下办法插进已列好的队伍中：如果他曾战胜过队列中的第 1 人，那么他就站在最前头；否则，就再看第 2 个人是否被他战胜过，他可以一直这样依次看下去，直到看到一个曾被他战胜过的人后，他就插到该人的前面；如果这样的人一个也找不到，那么他就站到队列的最后去，不难得出，这样的队列即是符合要求的，即对 $n=k+1$ 命题也成立.

由归纳原理知，命题对 $n\geqslant 2$ 都成立.

例 8 有一批文件分成 n 个部分分别由 n 个人保管，这 n 个人每人都有电话机，证明：当 $n\geqslant 4$ 时，只需通电话 $2n-4$ 次，就可以使这 n 个人全都了解了全部文件的内容.

解 (1)当 $n=4$ 时，甲和乙、丙和丁先分别通一次话，相互告知各自掌握的文件内容；然后，甲和丙、乙和丁再分别通一次话，相互告知对方的了解的内容，即可使所有人都了解到全部文件的内容，此时共通了 4 次电话；

(2)假设当 $n=k$ 时结论成立，即只需通 $2k-4$ 次电话，就可使所有 k 个人都了解到全部文件的内容.下面证明当 $n=k+1$ 时结论也成立.设想首先由第 $k+1$ 个人打电话给第 1 个人，把他所掌握的文件内容全都告知第 1 人，然后按归纳假设，前 k 个人之间只需打 $2k-4$ 个电话即可使他们全都知道所有文件的内容，然后第 1 个人再给第 $k+1$ 个人打电话，告知他全部文件内容，所以一共只须打 $1+(2k-4)+1=2(k+1)-4$ 次电话，由此得当 $n=k+1$ 时结论也成立.

所以 由归纳原理知，结论对 $n\geqslant 4$ 都成立.

例 9 设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为任意无穷正实数数列，求证：不等式 $1+a_n>a_{n-1}\sqrt[n]{2}$ 对无穷多个正整数 n 成立.

证明 用反证法.假设不等式 $1+a_n>a_{n-1}\sqrt[n]{2}$ 只对有限多个正整数成立.设这些正整数中最大的一个为 M，则对任意的正整数 $n>M$，上述不等式均不成立，即有 $1+a_n\leqslant a_{n-1}\sqrt[n]{2}$，$n>M$，

亦即 $a_n\leqslant a_{n-1}\sqrt[n]{2}-1$，$n>M$. ①

由贝努利不等式，有 $\sqrt[n]{2}=(1+1)^{\frac{1}{n}}\leqslant 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$(正整数 $n\geqslant 2$)， ②

结合①，②可得，$a_n\leqslant\frac{n+1}{n}a_{n-1}-1$，$n>M$. ③

下面用数学归纳法证明：

$a_{M+n}\leqslant(M+n+1)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{m+n+1}\right)$，其中 n 是非负整数， ④

(1)当 $n=0$ 时，④式左边为 a_M，右边也为 a_M，故④式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N})$ 时,④式成立,

即有 $a_{M+k}\leqslant(M+k+1)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{m+k+1}\right)$. ⑤

在③中取 $n=M+k+1$,并利用⑤,可得

$$a_{M+k+1}\leqslant\frac{M+k+2}{M+k+1}a_{M+k}-1\leqslant\frac{M+k+2}{M+k+1}(M+k+1)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{m+k+1}\right)-1$$

$$=(M+k+2)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{m+k+1}\right)-1$$

$$=(M+k+2)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{m+k+2}\right),$$

故④式在 $n=k+1$ 时也成立.故④式得证.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{M+1}\right)\right]=+\infty$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{M+2}+\frac{1}{M+3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

因而存在正整数 N_0,满足 $\frac{1}{M+2}+\frac{1}{M+3}+\cdots+\frac{1}{N_0}>\frac{a_M}{M+1}$. ⑥

在④式中取 $n=N_0-M-1$,得 $a_{N_0-1}\leqslant N_0\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{N_0}\right)$. ⑦

结合⑥,⑦知 $a_{N_0-1}<0$,这与 $a_{N_0-1}>0$ 矛盾,故命题得证.

例 10 实数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=\frac{1}{2}$,$a_{k+1}=-a_k+\frac{1}{2-a_k}$,$k=1,2,\cdots$.

证明:$\left(\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right)^n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$.

证明 首先,用数学归纳法证明:$0<a_n\leqslant\frac{1}{2}$,$n=1,2,\cdots$.

(1)$n=1$ 时,命题显然成立.

(2)假设命题对 $n(n\geqslant1)$ 成立,即有 $0<a_n\leqslant\frac{1}{2}$.设 $f(x)=-x+\frac{1}{2-x}$,$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,则 $f(x)$ 是减函数,于是 $a_{n+1}=f(a_n)\leqslant f(0)=\frac{1}{2}$,$a_{n+1}=f(a_n)\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}>0$,即命题对 $n+1$ 也成立.

原命题等价于 $\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n\left(\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right)^n$

$$\leqslant\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

设 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)$,$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,则 $f(x)$ 是凸函数,事实上,对于 $0<x_1,x_2<\frac{1}{2}$,有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

$$\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2\geqslant0.$$

由 Jenson 不等式可得 $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$,

即 $\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-1\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$.

另一方面,由题设及 Cauchy 不等式,可得

$$\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+a_{i+1}}-n\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})}-n=\frac{n^2}{a_{n+1}-a_1+2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-n$$

$$\geqslant\frac{n^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-n=n\left(\frac{n}{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-1\right),\text{所以}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\geqslant\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\left(\frac{n}{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-1\right),$$

故 $\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n\left(\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right)^n\leqslant\left(\frac{(1-a_1)+(1-a_2)+\cdots+(1-a_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n$

$\leqslant\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$,从而原命题得证.

[illegible]

数学归纳法是解决与自然数有关问题的很好的方法,对于参加竞赛的同学而言,不仅要掌握第一数学归纳法与第二数学归纳法,还要了解反向归纳法(倒推归纳法)、跳跃数学归纳法与螺旋归纳法,并能运用它们证明一些竞赛题.

同步检测

1. 证明斐波那契数列对一切自然数 n,数列中的第 $5n$ 项必为 5 的倍数.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^2-na_n+1$,当 $a_1=2$ 时,求 a_n.

3. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数,$A_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$,$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,求证:对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$,$A_n\geqslant G_n$.(算术—几何平均不等式)

4. 设 x_1,x_2 是方程 $x^2-(p+1)x+1=0$ 的两个根,其中 $p\geqslant3$ 为正整数,证明:对任何自然数 n,$x_1^n+x_2^n$ 都是一个不能被 p 整除的整数.

5. $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的数列,满足 $a_1=0,a_2=3,a_{n+1}\cdot a_n=(a_{n-1}+2)(a_{n-2}+2),n\geqslant3$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n.

6. 设 a,b,c 是方程 $x^3-x^2-x-1=0$ 的三个根,求证:$\frac{a^{2002}-b^{2002}}{a-b}+\frac{b^{2002}-c^{2002}}{b-c}+\frac{c^{2002}-a^{2002}}{c-a}$ 是整数.

7. 试证用面值为 3 分和 5 分的邮票可支付任何 $n(n\geqslant8,n\in\mathbf{N})$ 分的邮资.

8. 设 a_0 为常数,且 $a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}(n\in\mathbf{N})$,

(1)证明对任意 $n\geqslant1$,$a_n=\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}\cdot2^n]+(-1)^n\cdot2^na_0$;

(2)假设对任意 $n\geqslant1$,都有 $a_n>a_{n-1}$,求 a_0 的取值范围.

9. 设整数数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=1,a_2=12,a_3=20$,且 $a_{n+3}=2a_{n+2}+2a_{n+1}-a_n$,试证明:对于任何正整数 n,$1+4a_na_{n+1}$ 是一个整数的平方.

10. 已知 $a>0$,数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a,a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n},n=1,2,\cdots$.

(1)已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零,求 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$(将 A 用 a 表示);

(2)设 $b_n=a_n-A, n=1,2,\cdots$,证明:$b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{A(b_n+A)}$;

(3)若 $|b_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立,求 a 的取值范围.

11. 已知对任意的 $n\in\mathbf{N}$,有 $a_n>0$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2$,求证:$a_n=n$.

12. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)+1=f(x)+f(y)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$,且 $x>\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)<0$,

(1)设 $a_n=f(n)$,$(n\in\mathbf{N}^+)$,求数列 a_n 的通项;

(2)证明当 $x\in\left[\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{1}{2^n}\right](n\in\mathbf{N}^+)$ 时,$f(x)\leqslant 1-\dfrac{1}{2^n}$;

(3)判断 $f(x)$ 的单调性,并证明.

13. 设数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 为如下定义的两个整数列:$x_0=1, x_1=1, x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,$y_0=1, y_1=7, y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,试证明:两个数列有且只有一个公共项.

14. 证明:存在正整数的无穷数列 $\{a_n\}$:$a_1<a_2<a_3<\cdots$,使得对所有自然数 n,$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2$ 都是完全平方数.

第二讲　逐步调整法

知识点金

逐步调整法，就是为了解决某个问题，从与问题有实质联系的较宽要求开始，然后充分利用已获得的结果作为基础，逐步加强要求，逐步逼近目标，直至最后彻底解决问题的一种解题方法.

对于问题涉及的多个可变对象，先对其中少数对象进行调整，让其他变量暂时保持不变，从而化难为易，使问题的解决在局部获得进展.经过若干次这样局部上的调整，不断缩小范围，最终导致整个问题的圆满解决.无疑它是我们研究数学乃至其他问题的应用十分广泛而又卓有成效的一种基本思想方法.

例题精析

例 1　已知锐角三角形 ABC 中，$A>B>C$.在$\triangle ABC$ 的内部(包括边界)上找一点 P，使得 P 到三边的距离之和最小.

分析　先对 P 在$\triangle ABC$ 边界上时，研究点 P 在什么位置时，P 到三边距离之和最小，然后再对 P 在$\triangle ABC$ 的内部时进行研究.

解　(一)先研究 P 在$\triangle ABC$ 的边界上时

(1)若 P 在边 BC 上.如图 1，记$\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 对应的边分别是 a,b,c，边 a,b,c 上的高分别为 h_a,h_b,h_c，P 到边 c,b 的距离分别为 x，y，连 PA.因为 $A>B>C$，所以 $a>b>c$，所以 $h_a<h_b<h_c$.

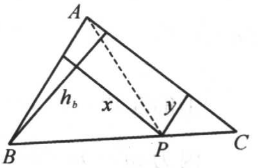


图 1

由面积关系得$\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot x+\frac{1}{2}y\cdot b\leqslant\frac{1}{2}x\cdot b+\frac{1}{2}y\cdot b$，所以 $h_b\leqslant x+y$(当 $x=0$ 时取等号).即 P 在点 B 处时，P 到三边距离之和最小为 h_b.

(2)若 P 在边 AC 上，P 在点 A 处时，P 到三边距离之和最小为 h_a.

(3)若 P 在边 AB 上，P 在点 A 处时，P 到三边距离之和最小为 h_a.

综合(1)，(2)，(3)，当点 P 在点 A 处时，P 到三边距离之和最小.

(二)再研究 P 在$\triangle ABC$ 内部时

如图 2，过 P 作 BC 的平行线交 AB 于 E，交 AC 于 F，固定 x，由(一)知，$x+y+z>EG+EH$.让 x 变化，有 $EG+EH\geqslant h_a$，所以 $x+y+z>h_a$.

综合(一)，(二)知，当点 P 在 A 处时，$x+y+z$ 最小.

评注　本题先对 P 在边界上进行调整，获得问题的局部解决.经过若干次这样的局部调整，逐步逼近目标，最终得到问题的整体解决.

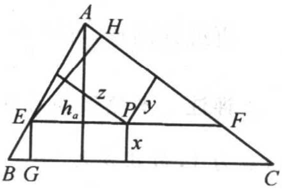


图 2

例 2 已知正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$,求证:$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant 1$.

分析 从特殊情形入手,$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时不等式成立,然后研究一般情况,通过局部调整解决问题.

证明 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时不等式成立.

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中不全为 1 时,其中必有一个属于 $(0,1)$,一个属于 $(1,+\infty)$,据对称性,不妨设 $0<x_1<1<x_n$,$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$,

(1)若 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\frac{1}{n-1}$,

因为 $\frac{1}{n-1+x_2}+\frac{1}{n-1+x_3}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_{n-1}}<\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-1}=\frac{n-2}{n-1}$,

所以 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}<1$.

(2)若 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_n}>\frac{1}{n-1}$,即 $x_1x_n<(n-1)^2$.

作第一次调整:令 $x_1'=1,x_n'=x_1x_n,x_j'=x_j(2\leqslant j\leqslant n-1)$.下证 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\frac{1}{n-1+x_1'}+\frac{1}{n-1+x_2'}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n'}$.

即证 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\frac{1}{n-1+1}+\frac{1}{n-1+x_1x_n}$. ①

令 $f(x)=\frac{1}{n-1+x}$,则 $f(y)+f(z)=\frac{1}{n-1+y}+\frac{1}{n-1+z}=\frac{2(n-1)+y+z}{(n-1)^2+yz+(n-1)(y+z)}$.

记 $b=(n-1)^2+x_1x_n=(n-1)^2+x_1'x_n'$,$m=(n-1)(x_1+x_n)$,$m'=(n-1)(x_1'+x_n')=(n-1)(1+x_1x_n)$,$a=2(n-1)$,$c=\frac{1}{n-1}$,

①的左边 $=f(x_1)+f(x_n)=\frac{a+cm}{b+m}$,右边 $=f(x_1')+f(x_n')=\frac{a+cm'}{b+m'}$,

因为 $m'-m=(n-1)(1+x_1x_n-x_1-x_n)=(n-1)(x_1-1)(x_n-1)<0$,所以 $m'<m$.

①$\Leftrightarrow\frac{a+cm}{b+m}\leqslant\frac{a+cm'}{b+m'}\Leftrightarrow(a-bc)(m-m')\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant bc\Leftrightarrow 2(n-1)\geqslant\frac{1}{n-1}[(n-1)^2+x_1x_n]$

$\Leftrightarrow x_1x_n\leqslant(n-1)^2$.因为 $x_1x_n<(n-1)^2$,所以 $x_1x_n\leqslant(n-1)^2$ 成立.

所以 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\frac{1}{n-1+x_1'}+\frac{1}{n-1+x_2'}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n'}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1+x_2'}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n'}$,其中 $x_2'x_3'\cdots x_n'=1$.

再继续调整,可得 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=1$.

评注 本题调整的目的是逐步将求证不等式左边各项变为 $\frac{1}{n}$,应注意每次调整应使各变量的积为 1,而且放大.

例 3 将 2006 表示成 5 个正整数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 之和.记 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$.问:

(1)当 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 取何值时,S 取到最大值;

(2)设对任意 $1\leqslant i,j\leqslant 5$,有 $|x_i-x_j|\leqslant 2$,问当 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 取何值时,S 取到最小值.(2006 年全国高中数学联赛试题)

解 (1)首先,这样的 S 的值是有界集,故必存在最大值与最小值.

若 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$,且使 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$ 取到最大值,则必有

$|x_i-x_j|\leqslant 1(1\leqslant i,j\leqslant 5)$. ①

事实上,假设式①不成立,不妨设 $x_1-x_2\geqslant 2$. 令 $x_1'=x_1-1,x_2'=x_2+1,x_i'=x_i(i=3,4,5)$,有 $x_1'+x_2'=x_1+x_2,x_1'x_2'=x_1x_2+x_1-x_2-1>x_1x_2$.

将 S 改写成 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j=x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$.

同时有 $S'=x_1'x_2'+(x_1'+x_2')(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$.

于是,有 $S'-S=x_1'x_2'-x_1x_2>0$,这与 S 在 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 时取到最大值矛盾.所以,必有 $|x_i-x_j|\leqslant 1(1\leqslant i,j\leqslant 5)$. 因此,当 $x_1=402,x_2=x_3=x_4=x_5=401$ 时,取到最大值.

(2)当 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$ 且 $|x_i-x_j|\leqslant 2$ 时,只有如下三种情形满足要求:

①402,402,402,400,400;②402,402,401,401,400;③402,401,401,401,401

而后两种情形是在第一种情形下作 $x_i'=x_i-1,x_j'=x_j+1$ 调整得到的. 根据(1)的解题过程可知,每调整一次,和式 $S=\sum\limits_{i\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$ 变大. 所以,在 $x_1=x_2=x_3=402,x_4=x_5=400$ 时,取到最小值.

评注 *解决本题的关键是把五元函数 S 视为二元函数,通过调整两个变量的取值,使 S 的值最大,最终获得问题的解决.*

例 4 在 1,2,3,…,1989 每个数前添上“+”或“-”号,求使其代数和为最小的非负数,并写出算式(全俄 1998 年数学竞赛题).

解 先证其代数和为奇数.

从简单情形考虑:全添上“+”,此时 $1+2+\cdots+1989=995\times 1989$ 是奇数.

对一般情况,只要将若干个“+”调整为“-”即可.

因为 $a+b$ 与 $a-b$ 奇偶性相同,故每次调整,其代数和的奇偶性不变,即总和为奇数.

而 $1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\cdots+(1986-1987-1988+1989)=1$,

因此这个最小值是 1.

评注 *在不断调整、变化过程中,挖掘不变量(或不变性质)使问题迎刃而解.*

例 5 空间有 2003 个点,其中任何三点不共线,把它们分成点数各不相同的 30 组,在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形,问要使这种三角形的总数为最大,各组的点数应为多少?

分析 设分成的 30 组的点数分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$,其中 $n_i(i=1,2,\cdots,30)$ 互不相等,则满足题设的三角形的总数为 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k$. 问题转化为在 $n_1+n_2+\cdots+n_{30}=2003$,其中 $n_i(i=1,2,\cdots,30)$ 为互不相等的正整数的条件下,求 S 的最大值.

解 设分成的 30 组的点数分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$,其中 $n_i(i=1,2,\cdots,30)$ 互不相等,则满足题设的三角形的总数为 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k$. 由对称性,不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_{30}$.

(1)在 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$ 中,让 n_1,n_2 变化,其余各组的点数不变,因为 n_1+n_2 的值不变,注意到 $S=n_1n_2\sum\limits_{3\leqslant k\leqslant 30}n_k+(n_1+n_2)\sum\limits_{3\leqslant j<k\leqslant 30}n_jn_k+\sum\limits_{3\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k$ ①,要使 S 的值最大,只需 n_1n_2 的值最大. 如果 $n_2-n_1\geqslant 3$,令 $n'_1=n_1+1,n'_2=n_2-1$,则 $n'_1+n'_2=n_1+n_2,n'_1n'_2=(n_1+1)(n_2-1)=n_1n_2+$

$n_2-n_1-1>n_1n_2$，S 的值变大. 因此要使 S 的值最大，对任何 $1\leqslant i\leqslant 29$ 都有 $n_{i+1}-n_i\leqslant 2$.

(2)若 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$ 中，使 $n_{i+1}-n_i=2(1\leqslant i\leqslant 29)$ 的 i 的值不少于 2 个，不妨设 $1\leqslant i<j\leqslant 29$，$n_{i+1}-n_i=2$，$n_{j+1}-n_j=2$. 类似(1)，令 $n_i'=n_i+1$，$n_{j+1}'=n_{j+1}-1$，其余各组的点数不变，则 S 的值变大. 因此要使 S 的值最大，至多有一个 i 使 $n_{i+1}-n_i=2$.

(3)若对任何 $1\leqslant i\leqslant 29$，$n_{i+1}-n_i=1$. 设这 30 组的点数分别是 $m-14,m-13,\cdots,m+15$，则 $30m+15=2003$，这是不可能的.

综上，要使 S 的值最大，对任何 $1\leqslant i\leqslant 29$ 在 $n_{i+1}-n_i$ 中恰有一个为 2，其余均为 1. 设这 30 组的点数分别是 $m,m+1,\cdots,m+t-1,m+t+1,\cdots,m+30(1\leqslant t\leqslant 29)$，则

$$m+(m+1)+\cdots+(m+t-1)+(m+t+1)+\cdots+(m+30)=2003,$$

即 $30m+465-t=2003$，解得 $m=52$，$t=22$. 所以当分成的 30 组的点数分别是 $52,53,\cdots,73,75,\cdots,82$ 时，能使三角形的总数最大.

评注 解决本题的关键是把多元函数 S 视为二元函数，通过调整两个变量的取值，使 S 的值最大，最终获得问题的解决.

以上例题说明，局部调整法解决数学问题的本质就是从问题的特殊情况入手，寻求问题的局部解决，通过逐步调整，获得问题的全部解决，体现了从特殊到一般的思想. 在解决多元极值问题、多元不等式的证明及操作性问题时常用.

1. 求和为 2008 的正整数之积的最大值.

2. n 为给定整数，$n\geqslant 2$，确定 $c_{\min}$，使不等式 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leqslant c\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^4$ 对一切非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 恒成立.(第 40 届 IMO 试题)

3. 求证：对于 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有 $A(a)\geqslant G(a)$，其中 $A(a)=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$G(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

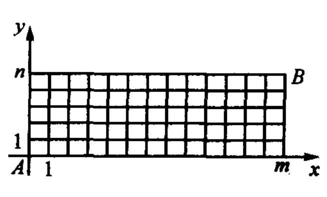
4. 已知非负实数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=1$，求证：$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\geqslant\dfrac{5}{2}$.

5. 在线段 AB 上关于它的中点 M 对称地放置 $2n$ 个点. 任意将这 $2n$ 个点中的 n 个染成红点，另 n 个染成蓝点. 证明：所有红点到 A 的距离之和等于所有蓝点到 B 的距离之和.

6. 已知二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的所有系数都是正的，且 $a+b+c=1$，求证：对于任何满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 的正数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\geqslant 1$.

7. 如图，有 $m\times n(m\geqslant n)$ 个格点，求从点 $A(1,1)$ 到达点 $B(m,n)$ 的一条路径，使得它所经过的每个格点的两坐标的乘积之和为最大，并求出此最大值.(注：这里所谓"路径"指的是向上、向右，即不允许逆着 x,y 轴的正向走)

8. 证明：平面上任意 $n(n\geqslant 2)$ 个点，总可以被某些不相交的圆盖住. 这些圆的直径的和小于 $n-a+1$，且每两个圆之间的距离大于 a. 这里 $0<a<1$.



9. 14人进行一种日本棋循环赛,每人都与另外13人对弈,在比赛中没有平局,求"三角联"个数的最大值(这里"三角联"指3人之间的比赛每人皆一胜一负)(2002年日本数学奥林匹克试题)

10. 给定平面上的点集 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_{1994}\}$,$P$ 中任三点均不共线.将 P 中所有的点任意分成83组,使得每组至少有3个点,且每点恰好属于一组,然后将在同一组的任两点用一条线段相连,不在同一组的两点不连线段,这样得到一个图案 G.不同的分组方式得到不同的图案.将图案 G 中所含的以 P 中的点为顶点的三角形的个数记为 $m(G)$.

(1)求 $m(G)$ 的最小值 m_0;

(2)设 G^* 是使 $m(G^*)=m_0$ 的一个图案,若将 G^* 中的线段(指以 P 的点为端点的线段)用4种颜色染色,每条线段恰好染一种颜色.证明存在一个染色方案,使 G^* 染色后不含以 P 的点为顶点的三边颜色相同的三角形.(1994年全国高中数学联赛加试题)

第三讲 构造法

知识点金

在处理某些数学问题时，有时求解或推理不能顺利进行，因而不得不寻找某些中介工具沟通条件和结论的联系，解题的中介工具往往隐含在题设条件之中，需要我们去发掘、去发现、去构造. 构造一个与之有关的辅助命题，也就是在已知与未知间搭桥，借以沟通“条件”和“结论”. 数学竞赛中的许多试题具有构造的性质，因而这些问题须用构造的方法才能解决.

构造法在数学竞赛中是常用的解法，这种方法就是在面对新问题时，从新的角度，用新的观点观察、分析、解析对象，别开生面地依据题设条件的特点，用已知条件中的元素为“元件”，用已知数学关系式为“支架”，在思维中构造出一新的数学形式，或者直接构造出有关结论、模型、辅助问题等，使新问题中隐晦不清的关系和性质在新结构中清楚地展现出来，从而简捷地解决问题.

例题精析

例 1 正数 a,b,c 和 A,B,C 满足 $a+A=b+B=c+C=k$，求证：$aB+bC+cA<k^2$.

证明 证法 1 构造边长为 k 的正△PMN，取点 D,E,F 如图 1 所示.

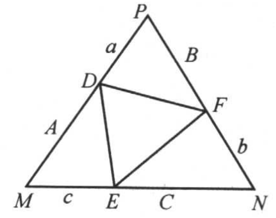


图 1

显然△DEF 恒存在，则 $S_{\triangle PDF}+S_{\triangle MED}+S_{\triangle NFE}<S_{\triangle PMN}$，

由此有 $\frac{1}{2}(aB+bC+cA)\sin60°<\frac{1}{2}k^2\sin60°$，即证.

证法 2 作正方形 $PQRS$，并在边上取线段，线段长满足题设并如图 2 所示，由阴影部分面积小于正方形面积即证.

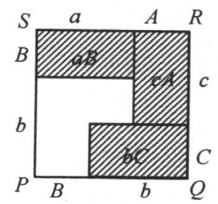


图 2

证法 3 作立方体，使棱长为 k，并在共顶点的三条棱上取满足题设的线段长，则 $k^3=(a+A)(b+B)(c+C)=abc+ABC+k(aB+bC+cA)>k(aB+bC+cA)$，即证.

评注 通过构建几何模型，将题设中的代数关系转化为几何模型，从而通过几何关系直接可以判断出不等关系，从而解决问题. 通过本题可以看出，构建的几何模型并非惟一，只要满足题设的条件和要求即可. 构造几何模型，将代数问题转化为几何模型是构造法解题的一种常用方法.

例 2 正数 x,y,z 满足方程组 $\begin{cases} x^2+xy+\frac{1}{3}y^2=25 \\ \frac{1}{3}y^2+z^2=9 \\ z^2+xz+x^2=16 \end{cases}$，求 $xy+2yz+3zx$ 的值.