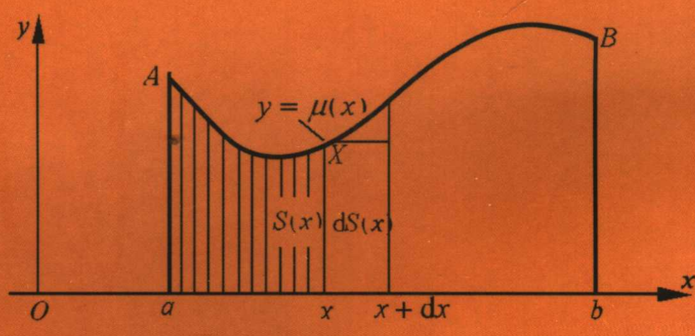
黄河科技学院系列教材

微积分
及其应用

经济类
专业用
JINGJILEIZHUANYEYONG

正确思维和逻辑错误·内容和方法点评

闫站立 主编



中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

黄河科技学院系列教材

微积分及其应用

（经济类专业用）

闫站立　主编

中国计量出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分及其应用（经济类专业用）/闫站立主编．—北京：中国计量出版社，2006.8
（黄河科技学院系列教材）
ISBN 7-5026-2444-9

Ⅰ．微…　Ⅱ．闫…　Ⅲ．微积分—高等学校—教材　Ⅳ．0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 063428 号

内 容 提 要

本书是为大学经济学类专业编写的微积分教科书。全书共三篇，第一篇为一元函数微积分；第二篇为多元函数微积分；第三篇为微积分的进一步应用。其主要内容包括：函数的极限和连续函数，微分和微分法，微分中值定理，积分和积分法，空间解析几何，多元函数微分法及其应用，二重积分，微分方程及其解法，微积分在经济学中的应用等。

本书可作为高等院校经济类、管理类的基础课教材，也可作为相关专业的教学参考书。

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲 2 号
邮政编码　100013
电话（010）64275360
http://www.zgjl.com.cn
北京长宁印刷有限公司印刷
新华书店北京发行所发行

*

787 mm×1092 mm　16 开本　印张 20.75　字数 512 千字
2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷

*

印数 1—2 500　**定价：36.00 元**

黄河科技学院教材建设委员会

主　任　胡大白

副主任　时庆云　闻良生

委　员　（按姓氏笔画为序）

王治国　尹建章　张仲良　张保海　张继东

陈庆奎　邹景超　罗　煜　郑天奎　郑发全

徐有志　郭遂礼　崔鸿斌

教材建设办公室

主　任　罗　煜

副主任　张保海

成　员　胡良玉　桑亚辉　桂秋新

本书编委会

主　编　闫站立

主　审　殷国华

副主编　杨振德

编　委　齐铁山　张景荣

序

20世纪80年代初期，在党和政府的关心、支持和鼓励下，我国民办高等教育重新登上历史舞台。一大批热爱民办高等教育事业的仁人志士，顺应时代潮流，把握历史机遇，历经坎坷，不畏艰难，用智慧和汗水创办了首批新型的社会主义民办高等学校。胡大白教授创办的黄河科技学院（原名黄河科技大学）就是其中的一所。中国民办高等教育经过20余年的发展，特别是《民办教育促进法》颁布实施以后，实现了历史性的跨越，使得我国高等教育正在形成公办、民办共同发展的新格局。

黄河科技学院既是全国第一所实施专科学历教育的民办高校，又是全国第一所实施本科学历教育的民办高等学校。在20余年的办学过程中，学校始终坚持“为国分忧，为民解愁，为社会主义现代化建设服务”的办学宗旨，坚持继承和发扬“开拓，拼搏，实干，奉献”的精神，使学校的办学规模不断扩大，教育和教学质量稳步提升。现已发展成为在校生2万余人，开设有26个本科专业，18个专科专业，涵盖理、工、文、法、经、医、教等8个学科门类的现代化民办综合性大学。

在20余年的教育和教学实践中，我校牢固树立质量是高等学校的生命线的指导思想，始终坚持教学工作在学校工作中的中心地位，高度重视师资队伍建设。现已会聚了一批知名的专家、学者、教授；积累和凝炼了较为丰富的民办高校教学、管理经验。近年来，我校随着学科建设、专业建设和课程建设的加强，作为课程建设的核心，教材建设被提到重要的议事日程。我们认识到教材是影响教学质量进一步提高的关键

问题之一，这也是全国民办高校普遍存在的问题。经过调研、分析，我们认为实施教材改革势在必行，而且进行了大胆的尝试和探索。我校决定，充分发挥自身优势，在以往部分自编教材的基础上，编写黄河科技学院系列教材，逐渐建立起自己的教材体系，这一工作不仅是提高我校教学质量的重要举措，对全国民办高校提供借鉴或许有所裨益。

本套系列教材编写的主导思想：首先在保证培养合格人才的知识容量和水平的前提下，力求精简；在坚持科学性、系统性和先进性的原则下，强调使用价值，把可读性和学生的可接受性作为重要目标；把因材施教方针、突出民办高校特色作为我们的落脚点。为便于进行教学工作、提高教学质量，体现为学生服务，本套系列教材除了主要参考书、讲义等基本教材外，还包括与之配套的辅助教材，引导学生探索、领会知识重点和难点，帮助学生自己掌握本学科的知识体系。

我们希望对民办高校教材建设起到一个抛砖引玉的作用，真诚期待着全国的同行对这套系列教材多提宝贵意见，期待着与各位同行携手共勉，共同探索民办高校的教材建设之路。

由于我们水平有限，错误和不当之处在所难免，欢迎批评指正。

黄河科技学院教材建设委员会

2006年7月

写给教师的话

本书是为大学开设有微积分课程的经济学类各专业而编写的微积分教科书。本书与同类书相比，具有以下特点。

第一，除在“写给学生的话”中介绍了一点形式逻辑的基本知识外，正文中在讲授微积分的同时，还穿插着介绍了一些正确思维的方法，目的是培养学生正确思维的习惯，避免或纠正他们在学习微积分的过程中可能出现的逻辑错误。

第二，因为微积分最初产生于几何学、力学和物理学，所以我们仍以这些学科中的具体例子来讲解微积分的基本概念、基本理论和基本方法。而另辟出一章专门讲微积分在经济科学中的应用，目的是把作为一门理论科学的微积分同微积分在经济科学中的应用区别开来。

第三，为了避免经济类专业学生把近代极限论视为学习微积分的“拦路虎”，我们宁愿采用18世纪关于极限概念的所谓“无限接近”说法（避开柯西的极限概念）。它虽然粗糙，但直观明白，初学者也容易接受。当然，有些概念的进一步明确性和某些结论的彻底证明，还需要用近代极限理论来完成。不过，在同类的一些微积分教科书中，尽管开始采用了关于极限概念的“$\varepsilon-N$”或“$\varepsilon-\delta$”说法，而实际上是“头重脚轻”，并没有或很少用它去证明有关结论。我们的目的是想用逻辑的（即去粗取精、去伪存真）和历史的辩证统一方法，着重解释微积分的基本概念、基本理论和基本方法（当然对某些结论也做出了标准的证明）。我们认为，这样讲授微积分既符合微积分的产生和不断完善的历史事实，也符合由浅入深的教学原则。

第四，本书在讲函数的微分和积分概念时，其切入点与其他教科书不同。莱布尼茨当初是借助几何直观先定义了函数的微分（作为起始概念），而后把导数定义为“函数微分除以自变量微分的商”（作为从属概念）。自柯西以来，几乎所有的微积分教科书中，都仿效柯西的做法，先用极限定义了函数的导数（作为起始概念），后用导数定义了函数的微分（作为从属概念）。许多学生学完微积分后，熟悉导数却不熟悉微分。本书与前两者不同，是把函数的“可微”作为切入点（即起始概念），并同时引出微分和导数两个概念。这样，才能真正体现出微分和导数之间的“孪生兄弟”关系。

其次，本书在讲积分概念时是把牛顿—莱布尼茨积分作为切入点。因为它不需要近代

极限理论，所以初学者容易接受；另一方面是想在讲积分法之前，说明求原函数的必要性。

第五，由于历史的原因，我们有时必须用两种说法才能为微积分中的某些概念和记号做出满意的解释。例如，函数的微分，它既是无穷小量，又是有限量（不含极限过程）。再如，莱布尼茨当初使用记号“$\int$”，是把它看作“d”的逆运算符号（两者接连运算相互抵消），即$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)$，$\mathrm{d}\int F(x)\mathrm{d}x=F(x)\mathrm{d}x$。可是后来，人们又用记号$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+c$或$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c$[其中$f(x)=F'(x)$]表示函数在某区间上的“不定积分”。实际上，在西方很多微积分教科书中，根据需要，记号“$\int f(x)\mathrm{d}x$”既表示$f(x)$在某区间上所有原函数组成的集合（即在某个原函数后面另加一个常数c），又表示$f(x)$在某区间上的某一个原函数（即不必须加待定常数c）。可是，国内出版的几乎所有的微积分教科书中，只承认前一种用法，而不承认后一种用法（因为在考研试题的评分标准中，不加常数c就扣去满分为3分中的1分）。

书中可能会有演算上的错误或其他不当之处，恳请读者和采用本书作为教材的教师们指正。编者对此将表示衷心的感谢。

为了帮助学生学好微积分，我们专门建立了一个网站。网址：

http://www.lxwjf.com 或 http://lxwjf.yeah.net

读者若有问题需要解答，可发贴子到本网站，那里有管理员和版主或其他网友，会及时为你解答问题或同你在一起讨论。

编者

2006年7月

写给学生的话

“微积分”，从狭义上说，是函数微分和函数积分的合称；而从广义上说，它是微分和积分理论（包括应用和进一步发展）的简称。自 17 世纪后三十几年间，英国物理学家兼数学家牛顿（Newton，1642—1727）和德国哲学家兼数学家莱布尼茨（Leibniz，1646—1716）创立微积分起，经过 18 世纪的广泛应用和 19 世纪在理论上的不断完善，它已经成为人们公认的解决那些初等数学不能解决的数学问题的有力工具。

虽然人们都说，牛顿和莱布尼茨在前辈对特殊情形下求面积、体积和求切线问题的基础上，各自独立地发明了微积分，但那个时代的微积分是建立在神秘的“无穷小量”的基础上。正因为他们的微积分在理论基础上的缺陷，所以就成为当时一些人（包括当时的一些数学家）不接受微积分的原因之一。尽管如此，这种新理论和新方法也吸引和鼓舞着当时和后来的许多数学家，他们不仅为微积分的应用和发展做出了许多重大贡献，而且也为微积分的基础寻找着满意的解释。经过漫长的时间后，终于在 19 世纪初，法国数学家柯西（Cauchy，1789—1857）和后来的德国数学家魏尔斯特拉斯（Weierstrass，1815—1897）等才把微积分建立在极限理论的基础上。他们也由此成为近代微积分的奠基人。除了一些结论、记号和求函数微分和积分的规则外，在内容和形式化的外貌上，近代微积分与牛顿—莱布尼茨时代的微积分已经是大不相同了。

建造房屋是先打地基，而历史上建造微积分这座“高楼大厦”是先盖楼后打地基。

目前国内各家出版社出版的微积分教科书，尽管有十几种之多，但大致分为下面三种类型：

1. 理科专业（包括数学专业）用《微积分》或《数学分析》；

2. 工科专业用《微积分》或《高等数学》（其中包括有微积分）；

3. 经济类专业用《微积分》或《高等数学》（其中包括有微积分）。因为要求不同，所以在内容的取舍和编写的方法上会有很大的差别。

微积分最初产生于几何学、力学和物理学。自微积分产生到 20 世纪中期的近 300 年间，可以说微积分与经济问题毫不相干，这是因为微积分所研究的量多是连续变量，而经济科学中所研究的变量，从根本上说都是离散变量。既然如此，那么学习经济类专业的学生为什么也要学微积分呢？这是因为：

第一，自上个世纪中后期开始，有关函数变化率的思想，被西方一些经济学家们用于

经济（宏观）分析中。他们所说的“边际函数”就是微积分中说的导函数在经济科学中的具体化。

第二，经济类专业的许多本科专业在二年级以后都设有其他高等数学课程（如概率统计、运筹学等），而这些课程都把微积分的基本概念、基本理论和基本方法作为基础知识。因此，自上个世纪后期开始，我国大学经济类许多专业都将微积分课作为必修基础课。

由于经济类专业的学生所学专业养成的思维习惯，他们中的多数对于学习高等数学（这里指微积分）都没有多大兴趣。不喜欢它，当然在学习它时也就不会花工夫。这是许多学生惧怕高等数学的主要原因之一。

要学好一门功课，除对它有兴趣外，还有一个学习方法问题。你学习的任何一门课程，不管它属于自然科学，还是社会科学或交叉学科，由于它自身的特点，就决定了学习它的科学方法。（大学）数学的特点是什么呢？抽象性和运用逻辑不能算是它独有的特点，因为任何一门理论科学都有不同程度的抽象性，并且也都用到逻辑。数学的特点，简单地说，就是它的任何一个结论，除少数公理（公理是通过实践检验为正确的结论）外，都必须根据概念的定义和已经证明为正确的结论，通过推理（思维的一种逻辑形式）来论证它的真实性。实验科学（如物理和化学）可以通过反复实验来验证它的结论的真实性（与客观事实相符或基本相符），但是数学不能用米尺（不论最小刻度多么小）通过测量来证明勾股定理。社会科学中的一个结论，可能是大致地包括一般，但是数学中的任何一个结论，都不能有一个例外，否则，这个结论就是不正确的。

人们在实践中得到的（同类）感性认识多了就会在头脑中产生一个“**概念**”，它是一类客观事物的本质属性（而不是个别现象）在人们头脑中的（正确）反映。概念有它的“**内涵**”（事物的本质属性）与“**外延**”（概念所反映的那一类事物）。概念是存在于人们头脑中抽象的东西，要把一个概念与另一个概念区别开来，就要借助词语称呼它，并用简明扼要的语言给它下定义。

就人们的认识过程来说，随着认识的不断深化，反映在人们头脑中的概念是可以改变的，例如古代人说的“数”可能只有1，2，3，而我们现在说的“数”不仅有自然数、分数、无理数，而且还有它们的相反数。数学中的函数概念、极限概念等也都是如此（其他科学中的许多概念也都是如此）。当然，作为明确概念的定义也会随着改变。一门科学中的重要概念的定义，往往标志着那门科学发展的水平，甚至会由它产生一门新的科学理论。

就人们的思维来说，概念必须是同一的，不能说是“东”又是“西”，似是而非，捉摸不定。不然的话，就有可能犯“偷换概念”的逻辑错误。

微积分（学）这门科学，研究的对象是函数，确切一点说，应当是“**连续函数**”或“**几乎连续函数**”。它的理论基础是描述函数变化趋势的极限理论。当你在中学里学习到数列极限（函数极限的简单情形）时，你是否也曾认为“$0.\dot{9}<1$”，或者向教师提出过“不论 $0.\dot{9}=0.999\cdots$ 中有多少个 9，也不会等于 1”这样的问题。那么现在反问你：“假若 $0.\dot{9}<1$，那么 $0.\dot{9}$ 比 1 小多少？”你不可能说出一个正数 ε（无论它有多么小）使 $1-0.\dot{9}\geqslant\varepsilon$. 因此，$0.\dot{9}=1$. 事实上，我们说“$0.\dot{9}=1$”，指的是

$$0.\dot{9}=0.999\cdots=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$$

$$=\frac{9}{10}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{9}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=1-0=1$$

而你向教师所提问题的那句话中，不仅包含着“事实错误”（$0.\dot{9}<1$），而且也包含有“逻辑错误”(偷换概念)。所谓**“事实错误”**，就是结论与事实不相符（即结论不真实）；所谓**“逻辑错误”**，就是把一种思想与另一种思想不正确地连接在一起（即思维不正确）。在上述那句话“不论 $0.\dot{9}=0.999\cdots$ 中有多少个 9，也不会等于 1”中，前面说的是 $0.\dot{9}=0.999\cdots$（无限循环小数），而在得出结论时，又把它偷换成 $0.999\cdots9$（有限小数）。这样，就违反了思维中的**“同一律”**。

假如有人说：“因为我早晨吃了两碗饭，所以地球绕着太阳转。”人们或者哈哈大笑，或者会说“这是胡说八道”。可是，有些逻辑错误，本质上与上面的笑话没有两样，却常常不为人们所重视（这些逻辑错误常常是没有把相似的概念加以区别或在推理中用错结论造成的）。譬如，有本《微积分学习指导》书中竟把“设有正数 β_i（$i=0，1，2$)。若对于任意正数 t，都有 $\beta_1\leqslant\frac{2}{t}\beta_0+\frac{t}{2}\beta_2$，则 $\beta_1^2\leqslant4\beta_0\beta_2$。”的证明写成：

“$\beta_1\leqslant\frac{2}{t}\beta_0+\frac{t}{2}\beta_2$，即 $\beta_2t^2-2\beta_1t+4\beta_0\geqslant0$，由于 $\beta_2t^2-2\beta_1t+4\beta_0\geqslant0$ 对任意 $t>0$ 都成立，故判别式必非正，即 $4\beta_1^2-16\beta_0\beta_2\leqslant0$. 由此得 $\beta_1^2\leqslant4\beta_0\beta_2$。”

细心的中学生都能够看出其中“指鹿为马”、“张冠李戴”一类的严重逻辑错误，并能给出一个简单的证明（因为它是中学生都应当会做的简单习题）。

有些人重视事实错误，而轻视逻辑错误，实际上，从某种意义上说，逻辑错误比事实错误更有害，而且不容易纠正。数学中的一些结论一般说都是正确的，如果不去避免和纠正证明中的逻辑错误，那么做证明题还有什么意义呢！

读者知道，数学中所说的“相等”或“等于”（记成“=”）都是就研究的具体对象在某种确定的含义下才有意义（譬如两个复数的相等、两个函数的相等或相同），离开研究的具体对象和确定的含义来谈论“相等”是没有意义的，而且有可能犯逻辑错误，从而造成事实错误。学习高等数学（这里指微积分）当然离不开初等数学的那些知识，但是读者要小心，由于研究的对象变了，不要把限于初等数学（常量数学）才能运用的术语（包括记号）和结论，随意照搬到高等数学（变量数学）中来。这就是说，对于高等数学中的某些概念和结论，你用初等数学的观念是不可理解的。

不论是初等数学，还是高等数学，其中都会有很多概念和定理①。概念的内涵是用定义这一逻辑形式说明的，假若不理解定义说的是什么，就有可能在形成**判断**（思维的逻辑

---

① 定理（包括引理、推论等）是已经被证明为正确的重要结论。可是“命题”则不同，它有可能是假命题（而定理是真命题）。在数学中，“命题”有点像“猜想”；在物理中，它有点像“假说”。总之，定理与命题是有区别的。有些教师和有的非数学专业用的微积分教科书中，说到一个定理的逆命题时，说“这个定理的逆定理不成立”（“逆定理”与“不成立”不能搭配！应当说成“这个定理的逆命题不成立”）。既然说成“逆定理”，而逆定理也是定理，怎么又能说它不成立呢？这岂不是说“正确的结论不成立吗”？（自相矛盾的逻辑错误！）

形式）或进行**推理**（也是思维的逻辑形式）时，出现逻辑错误。学习过程中，当然应该开动脑筋，独立思考，灵活运用，但是当你还没有完全理解概念的定义和定理的意思时，千万不要随意去改动其中一个字或一个词，甚至一个记号，因为这样做的结果有可能造成逻辑或事实上的错误。因此，当你还不很理解一个概念或结论时，就先把概念的定义或结论死记硬背下来，在以后的不断学习过程中会逐渐理解它。有些学生学习高等数学时，常常只记定义和结论（不记定义和结论就更不对了），而不喜欢看定理的证明（即论证）。其实，看一看证明，一是可以加深你对概念的理解程度，二是从看定理的证明中有时会学习到做习题的方法。

微积分（学）的英文名称 **"calculus"**，有计算（或演算）的含义。可见，初学者学习微积分必须做一定数量的习题（尤其是求函数的微分、导数和积分），不然的话，就是"上山打柴而空手归"。

做微积分习题同你在中学里做数学题一样，开始都是照着书上或教师在黑板上举的例题"比着葫芦画瓢"。当你还不很理解其中的道理时，尤其应当如此，即使把例题抄一遍，对你也会有好处。在做微积分习题时，也要像在中学里做数学习题那样，算式要整齐和有规矩，还要正确使用标点符号。遇到有不会做的习题时，可以先把它放在一边（注意，有时做下面的习题时会用到上面一题的结论。遇到这种情形，你就先承认它的结论），去做其他的习题。你做题多了，熟能生巧，再回过头来去做那些习题时，或许会感到它很容易。一般的微积分教科书中，留给学生做的习题，大体上分为两类：第一类是为提高初学者的熟练程度而编选的习题（譬如求极限、导数、微分和积分的一般习题）；第二类是为培养初学者的联想和应用能力，而编选的与当前所讲内容有关的习题。对于那些比较一般（不带有任何技巧）的计算题，你在草纸上演算一下后再看一下答案就行了；而对于那些你认为是有保留价值的习题（多数是证明题），就应当像教科书中的例题那样，有规矩地写在作业本或卡片上。

最后，我们把学习微积分的方法归纳为四个字：

"说"，就是学说微积分中主要概念的定义和重要结论；

"记"，就是记住基本概念的定义和重要结论（包括定理），以及主要计算公式；

"练"，就是做够一定数量的练习（尤其是求函数的微分或导数和函数的积分）；

"看"，就是在做到以上要求的基础上，再看一看有一定技巧的习题选解。

编　者

2006 年 7 月

目　录

第一篇　一元函数微积分

第二篇　多元函数微积分

第三篇　微积分的进一步应用

第0章　准备知识(中学数学基础知识)

笛卡儿的变量是数学的转折点.正是由于有了变量,运动和辩证法才进入了数学.

——恩格斯

在现在的中学数学课本中,都已经讲到变量和函数、数列和级数(甚至有的"示范高中"还讲授了初等微积分).尽管大家都熟悉中学数学,这里还是有必要再把那些以后用到的中学数学基础知识总结一下.读者再读一读它,或许能从中学习到一些你还不曾知道的新知识.其中有许多习题,我们都给出了解答,目的是想告诉读者以后做习题的方法和书写格式.当然,这些习题的结论,对你以后学习微积分或做习题是有用的.

第0-1节　集合及其运算·实数

1. 集合

集(合)与**元(素)**在近代数学中都作为原始概念,就像几何学中的点、直线和平面.当不需要写出集合的元素时,就用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合;当有必要写出集合的元素时,可以把集合的所有元素都写在一个花括号内(同一个元素不准重复出现)表示这个集合,例如全体正整数组成的集合可以表示成 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$.有时也把集合表示成 $\{x|P(x)\}$,例如 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 也可写成 $\{n|n$ 为正整数$\}$.

集合的元素一般用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.a 是集合 A 的元素就记成"$a\in A$",读作"a 属于 A";a 不是集合 A 的元素就记成"$a\notin A$",读作"a 不属于 A".**空集**作为一个特殊的集合不含任何元素,记成 $\varnothing$.

2. 集合的运算

两个集合 A 与 B 含有相同的元素时就记成"$A=B$",读作"A 等于 B".若集合 A 的元素都是集合 B 的元素时就记成"$A\subset B$",读作"A 包含在 B 中"或"B 包含 A"(注意,把"$A=B$"看作"$A\subset B$"的特殊情形).若 $A\subset B$,则称 A 为 B 的**子集**.约定空集是任何集合的子集.

当讨论集合之间的运算时,需要首先约定一个"大集合"U(在集合论中称 U 为**全集**),而所讨论的集合都是 U 的子集.设 A 与 B 都是 U 的子集,把 A 和 B 的所有元素放在一起组成的新集合记成"$A\cup B$",即

$$A\cup B=\{x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

称它为 A 与 B 的**并(集)**;而把 A 与 B 的公共元素放在一起组成另一个新集合记成"$A\cap B$",即

$$A\cap B=\{x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

称它为 A 与 B 的**交(集)**.假若 A 与 B 没有公共元素,即 $A\cap B=\varnothing$,就说它们**不相交**.属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的新集合记成"$A-B$"或"$A\backslash B$",称它为 A 减去 B 的**差(集)**.

特别，全集 U 减去子集 A 的差（即 $U-A$），称为 A（关于 U）的**余集**或**补集**，记成 A^C.

3. 实数

用单位量去测量同类量时就得到抽象的“数”. 在人们的日常生活中，有理数（正整数和负整数、零、正分数和负分数）足够用了. 但在理论研究工作中，有必要把数的概念做进一步的扩张，因为从精确意义上说，有理数不足以表示连续量的大小或多少. 早在公元前 5 世纪时，古希腊人认为线段是由不能再分割的最小“原子”组成的，当把单位线段的长度看作 m 个原子组成时，每个原子的长度为 $1/m$，而含 n 个原子的线段的长度就是 n/m（有理数）. 后来不久，古希腊人又发现，边长为一个单位长的正方形的对角线的长度不是有理数. 事实上，假若它是有理数，则它可以表示成既约分数 n/m（n 与 m 没有公因数）. 根据勾股定理，

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2=1^2+1^2=2,\text{即 } n^2=2m^2$$

故 n 为偶数. 设 $n=2k$（k 为正整数），则 $(2k)^2=2m^2$ 或 $m^2=2k^2$，故 m 也是偶数. 这样以来，n 与 m 就有公因数 2，这与 n/m 是既约分数的假设相矛盾. 现在，人们都知道，它是无理数 $\sqrt{2}$. 可是，实数理论一直到 19 世纪 70 年代才建立起来.

初学者认识实数都从数轴开始. 大家都知道，任一个有理数 n/m 都可以用数轴上的某一个点（称为有理点）来表示. 如果把全体有理数都表示在数轴上的话，那么数轴将不能被这些有理点所填满，即在数轴上还会留下很多空隙. 例如图 0—1 中那个点 A，正如上面所说，它不表示有理数. 这就是说，所有的有理点组成的集合与数轴上所有点组成的集合相比较是“不连续的”，或者说是“不完备的”. 我们就把数轴上除有理点外的其他点（空隙）称为“无理数”所对应的无理点（这里当然不能算是无理数的定义）. 有理数和无理数合称为**实数**. 于是，实数集合与数轴上点的集合是 1 对 1 的. 为说话方便起见，我们以后把实数与数轴上表示实数的点不加区别，例如“数 a”有时就说成“点 a”. 这当然是就它们之间的一对一关系来说的，而不是说，“实数”就是数轴上的“点”. 至于“实数”到底是什么，读者暂时可以不必管它，只要知道它的运算性质（如同有理数那样）和“**实数连续性**”就行了.

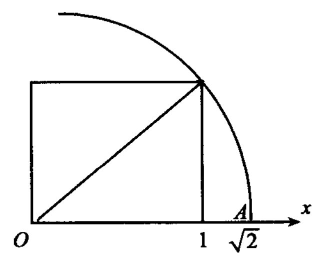


图 0—1

4. 绝对值

实数 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

在数轴上，实数 x 的绝对值 $|x|$ 表示点 x 到原点 O 的距离（图 0—2）. 记号

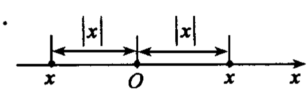


图 0—2

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

表示实数 x 的符号［其中 sgn 是 sign（记号，符号）的缩写］. 于是，实数 x 的绝对值为