



第

章

集合与函数概念

一、教材分析

本章涉及的主要内容是集合的概念、表示方法,集合之间的关系及运算,函数的有关概念及性质,函数的应用,函数与方程.

集合的概念及其基本理论是近代数学的基础.一方面,许多重要的数学分支,如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计和拓扑等,都建立在集合论的基础上;另一方面,集合论及其反映的数学思想,在越来越广泛的领域中得到应用.集合语言是现代数学的基本语言,通过学习和使用集合语言,有利于学生简洁、准确地表达数学内容.高中数学课程只将集合作为一种语言来学习,学生将学会使用最基本的集合语言表示有关的数学对象,提高运用数学语言进行交流的能力.本章中,集合的初步知识是学生学习、掌握和使用数学语言的基础,是高中数学学习的出发点.该部分的重点是集合的特征、性质、描述及集合之间的相互关系.难点是使用集合的特征、性质描述集合的逻辑含义.

函数是数学中重要的基本概念之一,是学生进一步学习高等数学的基础课程,包括极限理论、微分学、积分学、微分方程和泛函分析等,无一不是以函数作为基本概念和研究对象的.其他学科,如物理学科等,也是以函数的基础知识作为研究问题和解决问题的工具.函数的教学内容蕴涵着极其丰富的辩证思想,是对学生进行辩证唯物主义观点教育的好素材.函数是中学数学中最重要、最基本的概念之一,也是中学数学的主体内容,几乎每一章都贯穿着函数的思想.可以说,函数思想是整个高中数学的纲,是基础的数学语言.这一章涉及的一些重要的思想方法,对学好高中数学起着重要的作用.该部分的重点是对函数概念的较好理解.从初中用变化的观点理解函数概念到高中用集合和对应来理解函数,需要学生从认知结构上发生变化,如何实现这一转变是教学中的一个关键.本章的学习是高中函数概念学习的出发点,对学生今后的学习具有重要的意义.该部分的难点是用集合与对应的观点理解函数概念.

二、学法建议

集合是一个不加定义的概念,学习时,应结合自己的生活经验和已有的数学知识,通过列举丰富的实例来理解集合的含义.学习集合语言的最好方法是运用.在学习过程中,要尽可能地运用集合语言进行表达和交流,使自己在实际运用中逐渐熟悉自然语言、集合语言和图形语言各自的特点,以及进行相互转换并掌握集合语言.在关于集合之间的关系和运算的学习中,使用 Venn 图是重要的,有助于学习、掌握、运用集合语言和其他数学语言.

在学习函数时,学生应理解映射是一种特殊的一对一或多对一的对应,函数则是建立在两个非空数集之间的映射.在学习函数的单调性和奇偶性时,应注重数形结合的思想.在函数的应用这一节中,重点是一次函数和二次函数模型的应用,解题时要注意审题、读懂题意、合理设出未知量和列出函数关系式.

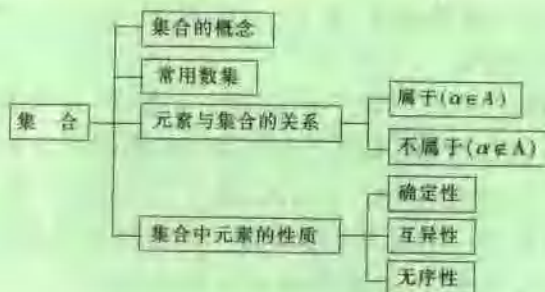


1.1 集 合

1.1.1 集合的含义与表示(一)



主干知识梳理



1 集合的概念

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫做集合.给定一个集合,它的元素必须是确定的.也就是说,给定一个集合,任何一个元素在不在这个集合中就确定了;一个给定集合中的元素是互不相同的,也就是说集合中的元素是不允许重复出现的.

2 常用数集的记法

$\mathbf{N}$ 表示自然数, $\mathbf{N}^+$ 表示正整数集, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, $\mathbf{Q}$ 表示有理数集, $\mathbf{R}$ 表示实数集.

3. 集合、元素间的关系

只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是相等的.

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A , 记作 $a \in A$; 如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合, 记作 $a \notin A$.



重点难点讲练

要点透析

1 元素性质的运用

例 1 下列各组对象能否构成一个集合?

- (1) 美丽的小鸟.
- (2) 不超过 20 的非负数.
- (3) $3, x, x^2$ 这三个实数.

解题思路: (1) “美丽的小鸟”无明确标准, 对于某个小鸟是否“美丽”无法给出明确的判断, 即元素不具备确定性, 因此(1)不能构成集合.

(2) 任给一个实数 x , 可以明确判断是不是“不超过 20 的非负数”, 即“ $0 \leq x \leq 20$ ”与“ $x < 0$ 或 $x > 20$ ”, 两者必居其一, 且仅居其一, 故(2)能构成集合.

(3) 虽然三个实数已被指定, 但这三个实数不一定能构成集合, 因为 $3, x, x^2$ 之间有可能相等, 所以不一定满足元素的互异性.

针对训练

1. 下列各组对象能构成集合的是().

- (1) 接近于 0 的数的全体
- (2) 比较小的正整数全体
- (3) 平面上到点 O 的距离等于 1 的点的全体
- (4) 正三角形的全体
- (5) $\sqrt{2}$ 的近似值的全体



如果添加条件 $\begin{cases} x \neq 3, \\ x^2 \neq 3, \text{ 即 } x \neq \pm\sqrt{3}, 0, 1, \\ x^2 \neq x, \end{cases}$ 那么三个实数 $3, x, x^2$ 就可以构成一个集合.

2 元素与集合关系

例2 给出下列关系,其中正确的个数为().

$$(1) \frac{1}{2} \in \mathbf{R}, (2) \sqrt{2} \in \mathbf{Q}, (3) |-3| \notin \mathbf{N}^*, (4) |-\sqrt{3}| \in \mathbf{Q}.$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解题思路: 显然(1)正确, $\sqrt{2}$ 为无理数,

又 $|-3|=3$, 为正整数, $|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$, 为无理数.

故(2)(3)(4)错误, 正确的个数为1, 选A.

3 集合中元素互异性的运用

例3 已知集合A有三个元素, 分别为 $a-2, 2a^2+5a$ 和12, 且 $-3 \in A$, 求a的值.

解题思路: $\because -3 \in A$,

$$\therefore a-2 = -3 \text{ 或 } 2a^2+5a = -3.$$

$$\therefore a = -1 \text{ 或 } a = -\frac{3}{2}.$$

但 $a = -1$ 时, $a-2 = -3, 2a^2+5a = -3$, 与集合中元素的互异性矛盾,

$$\therefore a = -\frac{3}{2}.$$

点评: 已知一元素属于某集合, 那么此元素就具备集合中元素的特点, 并且在集合中只能出现一次. 因此, 在本例中出现元素同时等于-3的情况应排除.



课时同步练习

巩固提高

1 下列各条件能构成集合的是().

- A. 世界著名的数学家
- B. 在数轴上与原点非常近的点
- C. 所有的等腰三角形
- D. 全年成绩优秀的同学

2 给出下面三个关系: $\sqrt{3} \in \mathbf{R}, 0.5 \notin \mathbf{Q}, 2 \in \mathbf{N}^*$, 其中不正确的个数是().

- A. 0 B. 1
- C. 2 D. 3

3 若a是R中的元素, 但不是Q中的元素, 则a可以是().

- A. 3.14 B. -5

点评: 集合中的元素一定具有确定性、互异性和无序性; 反过来, 一组对象若不具备这三个特性, 则这组对象也就不能构成集合. 因此, 在分析和处理集合问题的过程中, 要时刻注意集合元素的三个特征对集合元素的限制.

2 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

$$(1) 0 \quad \mathbf{Q}, 0 \quad \mathbf{N}, 0 \quad \mathbf{N}^*,$$

$$0 \quad \mathbf{Z}, 0 \quad \mathbf{R},$$

$$(2) -2 \quad \mathbf{N}^*, -2 \quad \mathbf{Z}, -2 \quad$$

$$\mathbf{R}, -2 \quad \mathbf{Q},$$

$$(3) \sqrt{3} \quad \mathbf{N}^*, \sqrt{3} \quad \mathbf{R}, \sqrt{3} \quad \mathbf{Q},$$

$$\sqrt{3} \quad \mathbf{Z}.$$

点评: 研究元素与集合的关系, 应首先明确集合是由怎样的元素组成, 然后再判断所给对象是否集合中的元素.

3 已知集合A中有三个元素: $a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3$, 且 $1 \in A$, 求实数a的值.

4 方程 $(x-5)(x-1)^3(x+2)=0$ 的解集中有几个元素? 求这几个元素.

$$C. \frac{3}{7}$$

$$D. \sqrt{7}$$

4 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

$$2 \quad \mathbf{N}, -1 \quad \mathbf{N}, \frac{1}{2} \quad \mathbf{N},$$

$$\pi \quad \mathbf{N}, 2 \quad \mathbf{Z}, -1 \quad \mathbf{Z},$$

$$\frac{1}{2} \quad \mathbf{Z}, \pi \quad \mathbf{Z}, 2 \quad \mathbf{Q},$$

$$-1 \quad \mathbf{Q}, \frac{1}{2} \quad \mathbf{Q}, \pi \quad \mathbf{Q},$$

$$2 \quad \mathbf{R}, -1 \quad \mathbf{R}, \frac{1}{2} \quad \mathbf{R},$$

$$\pi \quad \mathbf{R}.$$

5 方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集中, 有_____个元素.

6 已知集合M由 $1, x, x^2+x$ 三个元素组成, 且 $2 \in M$, 求



实数 x 的值.

探究创新

7. 已知集合 S 中的三个元素是 $\triangle ABC$ 的三边长, 那么 $\triangle ABC$ 一定不是(),
- A. 锐角三角形
B. 直角三角形
C. 钝角三角形
D. 等腰三角形
8. 对于由 2, 4, 6 三个元素组成的集合 A , 若对于 $a \in A$, 都有 $6-a \in A$, 那么 a 的值是_____.

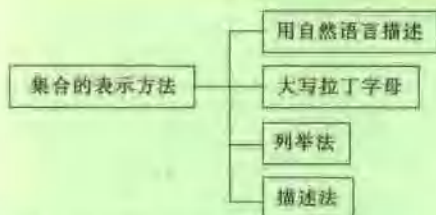
9. 已知集合 A 中的元素为实数, 且满足: ① $1 \notin A$, ② 若 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$. 试求当 $2 \in A$ 时的集合 A .

10. 已知集合 A 有 $a-1$, a^2+1 和 $2a^2+5a+1$ 三个元素, 且 $-2 \in A$, 求 a 的值.

1.1.1 集合的含义与表示(二)



主干知识梳理



1. 列举法的概念

把集合中的元素一一列举出来, 写在大括号内表示集合的方法叫列举法.

2. 描述法的概念

把集合中元素的公共属性描述出来, 写在大括号内表示集合的方法叫描述法.

3. 点集与数集

如何理解下面两个集合: $A = \{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$.

集合描述法的一般格式为 $\{x \in A | P(x)\}$, “ $\{$ ”前表示集合中元素的形式, “ $|$ ”后表示这个集合中元素的共同特征. 因为 (x, y) 表示点, 故 A 指抛物线 $y = x^2$ 上所有点组成的集合, 而 y 是实数, 故 B 是抛物线 $y = x^2$ 上所有点的纵坐标组成的集合, 即 $B = \{y | y \geq 0\}$, 且为数集.

点集和数集是中学数学中两种最常见的集合.



重点难点讲练

要点透析

1. 列举法、描述法比较

例1 用适当的方法表示下列集合.

- (1) 方程 $(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x^2-2)(x^2+1)=0$ 的有理根的集合 A .
- (2) 坐标平面内, 不在第一、三象限的点的集合.
- (3) 方程组 $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x-y=7 \end{cases}$ 的解集.
- (4) 100 以内被 3 除余 1 的正整数.
- (5) 到两坐标轴距离相等的点.

解法思路: (1) 由 $(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x^2-2)(x^2+1)=0$, 得 $x=-1 \in \mathbb{Q}, x=\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}, x=\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$$\therefore A = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}.$$

(2) 坐标平面内在第一、三象限的点的特征是纵、横坐标同号, 所以不在第一、三象限的点的集合可表示为 $\{(x, y) | xy \leq 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

$$(3) \{(x, y) | \begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x-y=7 \end{cases}\} = \{(3, 2)\}.$$

$$(4) \{x | x=3k+1, k \in \mathbb{N}, x < 100\}.$$

$$(5) \{(x, y) | |y| = |x|, x \in \mathbb{R}\}.$$

元素与集合关系的判定

例2 (1) 设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | 6 + \sqrt{3} < x \leq 10\}$, 则 $3 + \sqrt{10}$ 是不是集合 A 中的元素? $5\sqrt{3}$ 呢?

(2) 集合 $A = \{x | x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$. 设 $x_1 \in A, x_2 \in A$, 求证: $x_1 x_2 \in A$.

解法思路: (1) 解: $\because 3 + \sqrt{10} < 7 < 6 + \sqrt{3}, \therefore 3 + \sqrt{10} \notin A$, 即 $3 + \sqrt{10}$ 不是集合 A 中的元素. 又 $6 + \sqrt{3} < 8 < 5\sqrt{3} < 10, \therefore 5\sqrt{3} \in A$, 即 $5\sqrt{3}$ 是集合 A 中的元素.

(2) 证明: 由 $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}, x_2 = a_2 + b_2\sqrt{2} (a_i, b_i \in \mathbb{Z}, i=1, 2)$, 得 $x_1 x_2 = (a_1 a_2 + 2b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{2}$.

$$\text{又 } a_i, b_i \in \mathbb{Z}, (i=1, 2),$$

$$\therefore a_1 a_2 + 2b_1 b_2 \in \mathbb{Z}, a_1 b_2 + a_2 b_1 \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore x_1 x_2 \in A.$$

集合表示方法的转换

例3 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbb{R}\}$.

(1) 若集合 A 中只有一个元素, 求集合 A .

(2) 若集合 A 中至少有一个元素, 求 a 的取值范围.

解法思路: (1) 当 $a=0$ 时, 原方程为 $-3x+2=0$, 解得

针对训练

1. 用适当方法表示下列集合.

- (1) 由大于 -3 而小于 9 的偶数组成的集合.
- (2) 方程 $(x+2)^3(x-1)=0$ 的解集.
- (3) 第三象限内所有的点组成的集合.
- (4) 不等式 $3x-2 < 4$ 的解集.
- (5) 所有被 5 除余 2 的奇数.

点评: 用列举法表示集合时, 必须注意如下几点: (1) 元素与元素之间必须用“,”隔开; (2) 集合的元素必须是明确的; (3) 不必考虑元素出现的先后顺序; (4) 集合的元素不能重复; (5) 集合的元素可以表示任何事物; (6) 集合中元素为有限个.

使用描述法时, 应注意六点: (1) 写清集合中元素的代号; (2) 说明该集合中元素的性质; (3) 不能出现未被说明的字母; (4) 多层描述时, 应当准确使用“且”和“或”; (5) 所有描述的内容都要写在大括号内; (6) 用于描述的语句力求简明和确切.

该例(1), (3)可用列举法, 也可用描述法, (2), (4), (5)不能用列举法, 但可用描述法表示.

2. 设集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}, B = \{x | x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$. 若 $a \in A, b \in B$, 试判断 $a+b$ 与 A, B 的关系.

点评: 判断一个对象是不是某个集合的元素, 就是判断这个对象是否具有集合元素具有的属性. 由于集合多种多样, 因此判断方法也多种多样, 因题而异.

3. 依据列举法、描述法表示集合的实质体会下列问题:

- (1) 集合 $\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{(1, 2)\}$ 三者之间的关系如何?



$x = \frac{2}{3}$; 当 $a \neq 0$ 时, 一元二次方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 有两个相等的实数根, 即 $(-3)^2 - 8a = 0$,

$$\therefore a = \frac{9}{8}, \text{此时 } A = \left\{ \frac{4}{3} \right\}.$$

综上所述, $A = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ 或 $A = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$.

(2) 由上知, 当 $a = 0$ 时, $A = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$; 当 $a \neq 0$ 时, 要使方程有实根, 则 $\Delta = 9 - 8a \geq 0$, 即 $a \leq \frac{9}{8}$, 且 $a \neq 0$. 综上知, a 的取值范围为 $a \leq \frac{9}{8}$.

点评: “ $a = 0$ ”这种情况容易被忽视, 对于“方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ ”有两种情况: 一是“ $a = 0$ ”, 即它是一元一次方程; 二是“ $a \neq 0$ ”, 即它是一元二次方程, 也只有在这种情况下才能用判别式来解决问题.

解决集合问题的关键在于把抽象问题具体化和形象化, 也就是把用描述法表示的集合用列举法来表示, 或用图示法来表示, 或用图形来表示集合. 例如, 用数轴来表示集合; 再如, 当集合的元素为有序实数对时, 可用平面直角坐标系中的图形表示相关的集合等. 此例就是将集合符号语言转化为自然语言来解决的.



课时同步练习

巩固提高

- 已知集合 $M = \{(2, -2), 2, -2\}$, 则集合 M 中元素的个数是().
A. 2 B. 3
C. 4 D. 6
- 下列集合不同于另外三个集合的是().
A. $\{x | x = 1\}$ B. $\{y | (y - 1)^2 = 0\}$
C. $\{x = 1\}$ D. $\{1\}$
- 方程组 $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ 的解集是().
A. $\{x = 1, y = 1\}$ B. $\{1\}$
C. $\{(1, 1)\}$ D. $\{(x, y) | (1, 1)\}$
- 点 $(2, 11)$ 与集合 $\{(x, y) | y = x + 9\}$ 之间的关系为_____.
- 已知集合 $A = \{0, 1, -1, 2, -2, 3\}$, $B = \{y | y = x^2 - 1, x \in A\}$, 则 $B =$ _____.
- 用列举法表示 $A = \{x | x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}, a, b \text{ 为非零实数}\}$.

(2) 集合 $\{y | y = x^2 + 1\}$, $\{p | p = t^2 + 1\}$, $\{x | x = y^2 + 1\}$ 三者之间的关系如何?

(3) 集合 $\{y | y = x^2 + 1\}$, $\{x | y = x^2 + 1\}$, $\{(x, y) | y = x^2 + 1\}$ 三者之间的关系如何?

- 设集合 $A = \{(x, y) | x + y = 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$, 试用列举法表示集合 A .
- 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | mx^2 - 2x + 3 = 0, m \in \mathbf{R}\}$, 若 A 中元素至多只有一个, 求 m 的取值范围.

探究创新

- 有以下 4 种说法, 其中正确的个数有().
(1) $M = \{(1, 2)\}$ 与 $N = \{(2, 1)\}$ 表示同一个集合.
(2) $M = \{1, 2\}$ 与 $N = \{2, 1\}$ 表示同一个集合.
(3) $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 与 $N = \{t | t = (x + 1)^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 表示同一个集合.
(4) $0 \in \{x \in \mathbf{N} | 2x > -1\}$.
A. 3 B. 2
C. 1 D. 0
- 已知集合 $\{x | x^2 + ax + b = 0\} = \{2\}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.



9 在集合 $A = \{x | ax^2 - 2x + 1 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2x + a = 0\}$ 中, 已知 A 只有一个元素, 求集合 A 与 B .

10 设 $A = \{x \in \mathbb{N}^+ | x < 4\}$, $B = \{(a, b) | a + b^2 = 1, b \in A\}$, 试用列举法表示 B .

1.1.2 集合间的基本关系



主干知识梳理



1. 概念与性质

(1) 对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素, 我们就说这两个集合有包含关系, 称集合 A 为集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$, 或 $B \supseteq A$.

(2) 如果集合 A 是集合 B 的子集 ($A \subseteq B$), 且集合 B 是集合 A 的子集 ($B \subseteq A$), 此时集合 A 和集合 B 中的元素是一样的, 因此称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$.

(3) 如果集合 $A \subseteq B$, 但存在元素 $x \in B$ 且 $x \notin A$, 我们称集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$.

(4) 我们把不含任何元素的集合叫做空集, 记为 $\emptyset$, 并规定: 空集是任何集合的子集.

(5) 任何一个集合是它本身的子集, 即 $A \subseteq A$. 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$.

2. 有限集的子集个数

n 个元素的集合有 2^n 个子集, 有 $2^n - 1$ 个真子集, 有 $2^n - 1$ 个非空子集, 有 $2^n - 2$ 个非空真子集.

3. 注意区分一些容易混淆的符号

(1) $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别: $\in$ 是表示元素与集合之间的关系, 因此有 $1 \in \mathbb{N}$, $-1 \notin \mathbb{N}$ 等; $\subseteq$ 表示集合与集合之间的关系, 因此有 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ 等.

(2) $\{0\}$ 与 $\emptyset$ 的区别: $\{0\}$ 是含有一个元素的集合, $\emptyset$ 是不含任何元素的集合, 因此有: $\emptyset \subseteq \{0\}$, 不能写成 $\emptyset = \{0\}$, $\emptyset \in \{0\}$ 等.



重点难点训练

►要点透析◀

1 用子集及真子集的概念解题

例1 满足 $\{a\} \subseteq M \subseteq \{a, b, c, d\}$ 的集合 M 共有().

- A. 6个 B. 7个 C. 8个 D. 15个

解题思路: $\because \{a\} \subseteq M, \therefore M$ 中至少含有一个元素 a ;

又 $\because M \subseteq \{a, b, c, d\}$,

$\therefore M$ 中至多含有三个元素.

由此可知满足条件的集合 M 有 $\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}$ 共 7 个.

$\therefore$ 选 B.

2 集合相等的运用

例2 已知三元素集合 $A = \{x, xy, x-y\}, B = \{0, |x|, y\}$, 且 $A=B$, 求 x 与 y 的值.

解题思路: $\because 0 \in B, A=B, \therefore 0 \in A$.

$\because x \neq xy, \therefore x \neq 0$.

又 $\because 0 \in B, y \in B, \therefore y \neq 0$,

从而 $x-y=0, x=y$.

这时 $A = \{x, x^2, 0\}, B = \{0, |x|, x\}$.

$\therefore x^2 = |x|$, 则 $x=0$ (舍去) 或 $x=1$ (舍去) 或 $x=-1$.

经验证 $x=-1, y=-1$ 是本题的解.

3 空集在解题中的作用

例3 若集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}, B = \{x | mx + 1 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求 m 的值.

解题思路: $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3, 2\}$.

$\because B \subseteq A, \therefore$ 当 $B = \emptyset$ 时, $m=0$ 适合题意.

当 $B \neq \emptyset$ 时, 方程 $mx+1=0$ 的解为 $x = -\frac{1}{m}$,

则 $-\frac{1}{m} = -3$ 或 $-\frac{1}{m} = 2$.

$\therefore m = \frac{1}{3}$ 或 $m = -\frac{1}{2}$.

综上所述, 所求 m 的值为 0 或 $\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{2}$.

4 “直观化”判定集合间的关系

例4 (1) 设集合 $A = \{x | x \text{ 是菱形}\}, B = \{x | x \text{ 是平行四边形}\}, C = \{x | x \text{ 是正方形}\}$, 指出 A, B, C 之间的关系.

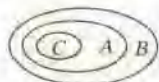


图 1-1-1

(2) 已知集合 $A = \{x | 1 \leq x < 4\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取

►针对训练◀

1. 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ 的所有子集的个数为().

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2. 设集合 $A = \{1, 3, a\}, B = \{1, a^2 - a + 1\}, A \supseteq B$, 求 a 的值.

点评: 根据子集及其子集的概念判断出 M 含有元素的可能情况, 并一一列举出来, 谨防遗漏.

3. 设集合 $A = \{1, a, b\}, B = \{a, a^2, ab\}$, 且 $A=B$, 求 $a^{2005} + b^{2007}$.

点评: ①两个集合相等的描述有两个角度: 一是从元素的角度, 两集合的元素必须完全相同; 二是包含关系的

角度, $A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B, \\ B \subseteq A. \end{cases}$

②灵活运用元素的互异性是解好本题的关键.

4. 已知 $A = \{0, 1\}$, 且 $B = \{x | x \subseteq A\}$, 求 B .

点评: 解决此类问题时, 最容易忽略 $B = \emptyset$ 的情况, 要引起重视.

5. 已知 $M = \{x | x > 1\}, N = \{x | x > a\}$, 且 $M \subseteq N$, 求 a 的取值范围.



值集合.

解题思路: (1) 用 Venn 图表示集合 A, B, C , 如图 1-1-1, $\therefore C \subseteq A \subseteq B$.

(2) 将数集 A 表示在数轴上 (如图 1-1-2), 要满足 $A \subseteq B$, 表示数 a 的点必须在表示 4 的点处或在表示 4 的点的右边, 所以所求 a 的集合为 $\{a | a \geq 4\}$.

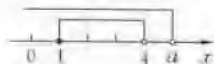


图 1-1-2



课时同步练习

巩固提高

- 下列各式正确的个数是().
 (1) $\emptyset = \{0\}$, (2) $\emptyset \subseteq \{0\}$, (3) $\emptyset \in \{0\}$, (4) $0 = \{0\}$,
 (5) $0 \in \{0\}$, (6) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$, (7) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$,
 (8) $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$.
 A. 1 B. 2
 C. 3 D. 4
- 设集合 $A = \{x | x \leq \sqrt{13}\}$, $a = 2\sqrt{3}$, 那么下列关系正确的是().
 A. $a \subseteq A$ B. $a \in A$
 C. $a \notin A$ D. $\{a\} \in A$
- 下列集合表示同一集合的是().
 (1) $P = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{x | x = 4n, n \in \mathbf{Z}\}$,
 (2) $P = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{x | x = 2(n-1), n \in \mathbf{Z}\}$,
 (3) $P = \{x | x = 2n+1, n \in \mathbf{N}_+\}$, $Q = \{x | x = 2n+1, n \in \mathbf{Z}\}$,
 (4) $P = \{x | x^2 - x = 0\}$, $Q = \{x | x = \frac{1+(-1)^n}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$.
 A. (1)(2) B. (3)(4)
 C. (2)(4) D. (2)(3)(4)
- 若 $\{a, 0, 1\} = \{c, \frac{1}{b}, -1\}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.
- 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 M, N 的关系是 _____.
- 求满足 $\{x | x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\} \subseteq M \subseteq \{x | x^2 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 的集合 M 的个数.

点评: (1) 本题写成 $C \subseteq A \subseteq B$ 也可, 子集具有传递性, 如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$, 如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

(2) 借助图形可使问题变得直观易解, 除用 Venn 图外, 数集可借助于数轴求解, 点集可借助于直角坐标系求解.

探究创新

- 下列命题正确的个数是().
 (1) 空集没有子集, (2) 空集是任何一个集合的真子集,
 (3) 任何一个集合必有两个或两个以上的子集, (4) 如果集合 $A \supseteq B$, 某元素不属于 A , 则必不属于 B .
 A. 1 B. 2
 C. 3 D. 4
- 已知集合 $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, 又知非空集合 C 是这样一个集合: 若各元素都加 2 后, 就变为 A 的一个子集; 若各元素都减 2 后, 则变为 B 的一个子集. 集合 $C =$ _____.
- 已知 $M = \{x | x = a^2 + 1, a \in \mathbf{N}^+\}$, $P = \{x | x = b^2 - 4b + 5, b \in \mathbf{N}^+\}$, 判断 M 与 P 的关系.
- 设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$. 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.



1.1.3 集合的基本运算(一)



主干知识梳理



1. 并集、交集的概念

(1)一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,用描述法表示为 $\{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

(2)一般地,由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$,用描述法表示为 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

2. 并集、交集的性质

(1) $A \cap A = A, A \cup A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A, A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A, A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

(2)若 $A \cap B = A$,则 $A \subseteq B$;若 $A \cup B = A$,则 $B \subseteq A$.

3. 用 Venn 图表示交集与并集

已知集合 A 与 B ,用阴影部分表示 $A \cap B, A \cup B$,如图 1-1-3 所示.

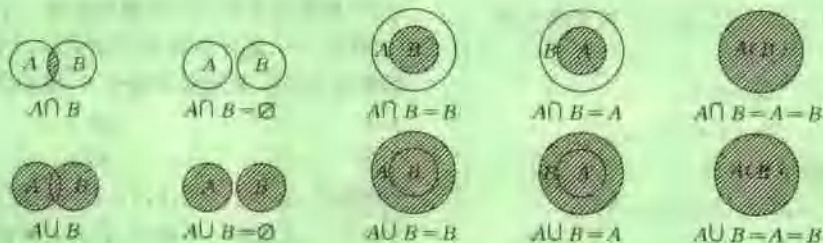


图 1-1-3



要点难点讲练

要点透析

1. 并集概念的运用

例 1 求满足集合 $A \cup B = \{a, b\}$ 的集合 A, B .

解题思路: 本题应对 A 的元素个数进行分类讨论.

(1)若 $A = \emptyset$,则 $B = \{a, b\}$.

(2)若 $A = \{a\}$,则 $B = \{b\}$,或 $B = \{a, b\}$.

(3)若 $A = \{a, b\}$,则 $B = \{a\}$,或 $B = \{b\}$,或 $B = \{a, b\}$,或 $B = \emptyset$.

点评: 1. 在求 $A \cup B$ 时,只要把 A 和 B 两集合中的元素并在一起即可.当然,在两集合的并集中,原两个集合的公共元素出现一次,不准重复.若已知 $x \in A \cup B$,那么它包含 3 种情形:① $x \in A$ 且 $x \notin B$;② $x \in B$ 且 $x \notin A$;③ $x \in A$ 且

针对训练

1. 已知集合 $A \cap B = \{a, b\}, A \cup B = \{a, b, c, d\}$,则符合条件的不同集合 A, B 有().

A. 3 对 B. 4 对 C. 8 对 D. 16 对

2. 已知集合 $A = \{x | x < 3\}, B = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$,那么 $A \cup B =$ ().

A. $\{x | -1 \leq x < 3\}$ B. $\{x | x \geq -1\}$
C. $\{x | x \leq 4\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq -4\}$

$x \in B$.这在解决与并集有关问题时应引起注意.

2. 并集的概念

并集的概念含有分类讨论的意义,要能自觉地进行分类讨论,不要漏掉空集的情况.

2. 交集的意义

例 2 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}, B = \{a-5, 1-a,$

$3\}$,设集合 $A = \{a^2, a+1, -3\}, B = \{a+3, a^2-1, a^2+1\}, A \cap B = \{-3\}$,求实数 a .



9), 分别求适合下列条件的 a 的值.

(1) $9 \in A \cap B$.

(2) $\{9\} = A \cap B$.

解题思路: (1) $\because 9 \in A \cap B$ 且 $9 \in B$,

$\therefore 9 \in A$,

$\therefore 2a-1=9$ 或 $a^2=9$,

$\therefore a=5$ 或 $a=\pm 3$.

当 $a=3$ 时, B 中元素 $a-5$ 与 $1-a$ 相同, 所以 $a=3$ 应舍去.

经检验知: $a=5$ 或 $a=-3$.

(2) $\because \{9\} = A \cap B$, $\therefore 9 \in A \cap B$,

$\therefore a=5$ 或 $a=-3$.

当 $a=5$ 时, $A=\{-4, 9, 25\}$, $B=\{0, -4, 9\}$, 这时 $A \cap B=\{-4, 9\} \neq \{9\}$, 所以 $a=5$ 应舍去. 故 $a=-3$.

3 变通、并集的转变

例 3 设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$, $B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1) 若 $A \cap B=B$, 求 a 的值.

(2) 若 $A \cup B=B$, 求 a 的值.

解题思路: 首先化简集合 A , 得 $A=\{-4, 0\}$.

(1) 由于 $A \cap B=B$, 则有 $B \subseteq A$, 可知集合 B 或为 $\emptyset$, 或只含有根 0 或 -4 .

①若 $B=\emptyset$, 由 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$, 得 $a<-1$.

②若 $0 \in B$, 代入 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$, 得 $a^2-1=0$, 即 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时, $B=\{x|x^2+4x=0\}=\{0, -4\}=A$, 合题意; 当 $a=-1$ 时, $B=\{x|x^2=0\}=\{0\} \subseteq A$, 也合题意.

③若 $-4 \in B$, 代入 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$, 得 $a^2-8a+7=0$, 即 $a=7$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时, ②中已讨论, 合题意.

当 $a=7$ 时, $B=\{x|x^2+16x+48=0\}=\{-12, -4\}$, 不合题意.

由①②③得 $a=1$ 或 $a \leq -1$.

(2) 因为 $A \cup B=B$, 所以 $A \subseteq B$. 又 $A=\{-4, 0\}$, 而 B 至多只有两个根, 因此应有 $A=B$.

由(1)知, $a=1$.

点评: $9 \in A \cap B$ 与 $\{9\} = A \cap B$ 意义不同, $9 \in A \cap B$ 说明 9 是 A 与 B 的一个公共元素, 但 A 与 B 中允许有其他公共元素, 而 $\{9\} = A \cap B$, 说明 A 与 B 的公共元素有且只有一个 9 .

例 4 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$, $B=\{x|mx-1=0\}$, 且 $A \cap B=B$. 求由实数 m 构成的集合 M , 并写出 M 的所有子集.

例 5 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x|x^2-5x+6=0\}$, $C=\{x|x^2+2x-8=0\}$, 求 a 取何实数时, $A \cap B \neq \emptyset$ 与 $A \cap C = \emptyset$ 同时成立.

点评: (1) 当集合 A 与 B 是一个包含关系, 如 $A \subseteq B$, 当 A, B 有一个是确定的, 而另一个不确定, 须要考虑空集这一情况.

(2) 注意条件的转化, 即 $A \cap B=B \Rightarrow B \subseteq A$, $A \cup B=B \Rightarrow A \subseteq B$.

课时同步练习

巩固提高

1. 满足 $\{1, 3\} \cup A = \{1, 3, 5\}$ 的集合 A 的个数是().

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

2. 若集合 A, B, C 满足 $A \cap B=A$, $B \cup C=C$, 则 A 与 C 之

间的关系必定是().

- A. $A \subseteq C$
B. $C \subseteq A$
C. $A \subseteq C$
D. $C \subseteq A$

3. 设 $M=\{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$, $N=\{1, 4, 6, 8, 9\}$, $P=\{4, 7, 9\}$, 则 $(M \cap N) \cup (M \cap P)$ 等于().



A. $\{1,4\}$

B. $\{1,7\}$

C. $\{4,7\}$

D. $\{1,4,7\}$

4. 已知 $A = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$, $B = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$, 则 $A \cap B =$, $A \cup B =$.

5. $\{(2,3)\} \subseteq A \cap B$, $A = \{(x,y) | ax - y^2 + b = 0\}$, $B = \{(x,y) | x^2 - ay - b = 0\}$, 则 $a =$, $b =$.

6. 设集合 $A = \{a+1, 3, 5\}$, 集合 $B = \{2a+1, a^2+2a, a^2+2a-1\}$, 当 $A \cap B = \{2, 3\}$ 时, 求 $A \cup B$.

C. 4

D. 16

8. 设集合 $M = \{x | -1 \leq x < 2\}$, $N = \{x | x - k \leq 0\}$. 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 k 的取值范围是_____.

9. 设集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$. 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的值.

10. 已知 $A \cap \{-1, 0, 1\} = \{0, 1\}$, 且 $A \cup \{-2, 0, 2\} = \{-2, 0, 1, 2\}$, 求满足上述条件的集合 A .

探究创新

7. 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B \subseteq A$, $1 \in A \cap B$, $4 \notin A \cap B$, 则满足上述条件的集合 B 的个数是().

A. 7

B. 3

1.1.3 集合的基本运算(二)



主干知识梳理



1. 全集的概念

如果一个集合含有我们研究问题中的所有元素, 那么就称这个集合为全集.

2. 补集的概念

对于集合 A , 由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集, 记作 $C_U A$.

3. 全集与补集的关系

全集与补集是相互依存、不可分离的两个概念, 补集是以全集为前提建立的. 补集既是集合之间的一种关系, 又是集合的一种运算. 利用定义可以直接求出已知集合的补集, 即从全集 U 中去掉属于集合 A 的元素后, 由剩下的元素组成的集合就是 U 中子集 A 的补集 $C_U A$.

4. 补集的运算性质

$A \cup C_U A = U$; $A \cap C_U A = \emptyset$; $C_U \emptyset = U$; $C_U U = \emptyset$; $C_U (C_U A) = A$.

5. 有限集中元素个数的关系式

对于任意两个有限集 A, B 有 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.



重点难点讲练

要点透析

1. 补集中隐含条件的运用

例1 设集合 $A = \{2a-1, 2\}$, $B = \{2, 3, a^2+2a-3\}$, 且 $\complement_U A = \{5\}$, 求实数 a 的值.

解题思路: 由符号 $\complement_U A = \{5\}$ 知 $5 \in B$ 且 $5 \notin A$.

$\therefore a^2+2a-3=5$, 即 $a=2$ 或 $a=-4$.

当 $a=2$ 时, $|2a-1|=3$, 这时 $A=\{3, 2\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, 所以 $\complement_U A = \{5\}$, 适合题意, 所以 $a=2$.

当 $a=-4$ 时, $|2a-1|=9$, 这时 $A=\{9, 2\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $A \not\subseteq B$, 所以 $\complement_U A$ 无意义, $a=-4$ 舍去.

综上所述可知: $a=2$.

2. 运用 Venn 图的直观性解题

例2 已知全集 $U = \{x | x \text{ 取不大于 } 30 \text{ 的质数}\}$, A, B 是 U 的两个子集, 且 $A \cap (\complement_U B) = \{5, 13, 23\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{11, 19, 29\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{3, 7\}$, 求集合 A, B .

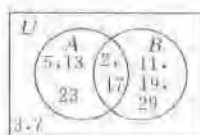


图 1-1-4

解题思路: $\because U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$,

$\therefore$ 用图形表示出 $A \cap B, A \cap (\complement_U B), (\complement_U A) \cap B, (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$, 得 $\complement_U (A \cup B) = \{3, 7\}, A \cap B = \{2, 17\}$.

$\therefore A = \{2, 5, 13, 17, 23\}, B = \{2, 11, 17, 19, 29\}$.

3. 借助数轴解补集问题

例3 已知 $A = \{x | x < 3\}, B = \{x | x < a\}$.

(1) 若 $A \subseteq B$, 问 $\complement_{\mathbb{R}} B \subseteq \complement_{\mathbb{R}} A$ 是否成立.

(2) 若 $\complement_{\mathbb{R}} A \subseteq \complement_{\mathbb{R}} (\complement_{\mathbb{R}} (\complement_{\mathbb{R}} B))$, 求 a 的取值范围.

解题思路: (1) $\because A \subseteq B$, 即 A 是 B 的子集, 如图 1-1-5(1)所示.



图 1-1-5

$\therefore a \geq 3$, 而 $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x \geq a\}, \complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x \geq 3\}$,

$\therefore \complement_{\mathbb{R}} B \subseteq \complement_{\mathbb{R}} A$, 即 $\complement_{\mathbb{R}} B \subseteq \complement_{\mathbb{R}} A$ 成立.

针对训练

1. 设全集 $U = \{2, 4, a^2-a\}, A = \{2, a+3\}$. 若 $\complement_U A = \{0\}$, 求 a 的值.

点评: 在由 $\complement_U A = \{0\}$ 求得 $a=2$ 或 $a=-4$ 之后, 验证其是否符合隐含条件 $A \subseteq B$ 是必要的, 否则就会把 $a=-4$ 误认为本题的答案了. 集合是一种数学语言, 如果不能从这种语言中破译出它的全部意义, 那么就会造成各种各样的错误.

2. (1994 年全国改编) 设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 则由 $\complement_U A$ 与 $\complement_U B$ 的所有元素组成的集合为 (),

- A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$
C. $\{0, 1, 4\}$ D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

点评: 将题中的信息汇集到 Venn 图中, 使抽象的集合运算建立在直观的形象思维基础之上, 能帮助我们深刻理解、记忆集合的概念、运算及其相互关系, 为问题解决创设有益情景. 本题可以考虑采用元素分析的手法, 读者可不妨一试.

3. 已知 $\complement_{\mathbb{Z}} A = \{x \in \mathbb{Z} | x > 5\}, \complement_{\mathbb{Z}} B = \{x \in \mathbb{Z} | x > 2\}$, 则有 ().

- A. $A \subseteq B$ B. $A \supseteq B$
C. $A = B$ D. 以上都不对

点评: 有的集合问题比较抽象, 解题时若借助 Venn 图进行数形分析或利用数轴, 图像采取数形结合的思想方法, 往往可将问题直观化和形象化, 使问题灵活、直观、简捷、准



(2) $\because \complement_U A = \{x | x \leq 3\}, \complement_U(\complement_U(\complement_U B)) = \complement_U B = \{x | x \geq a\},$

$\therefore$ 题意即 $\complement_U A \subseteq \complement_U B$, 如图 1-1-5(2) 所示.

$\therefore a \leq 3$. 所求 a 的取值范围为 $\{a | a \leq 3\}$.

4. 将集合运算转化为自然语言求解

例 4 如图 1-1-6, U 是全集, M, P, S 是 U 的三个子集, 求阴影部分表示的集合.

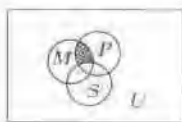


图 1-1-6

解题思路: 阴影部分即在 M 内, 又在 P 内, 故应是 $M \cap P$ 中的部分. 又阴影部分在 S 外, 故应在 $\complement_U S$ 内, 所以结果为 $(M \cap P) \cap \complement_U S$.

点评: 运用图形解题可将问题直观化. 将图形表示转化为自然语言表示有利于理解题意, 并且易于解题.



同步练习

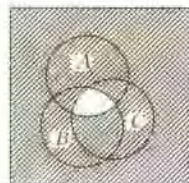
巩固提高

- 已知集合 $I = \{0, -1, -2, -3, -4\}$, 集合 $M = \{0, -1, -2\}$, $N = \{0, -3, -4\}$, 则 $M \cap \complement_I N =$ ().
A. $\{0\}$ B. $\{-3, -4\}$
C. $\{-1, -2\}$ D. $\emptyset$
- 已知 $S = \{a, b\}$, $A \subseteq S$, 则 A 与 $\complement_S A$ 的所有有序组对共 ().
A. 1 组 B. 2 组
C. 3 组 D. 4 组
- 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x + 1 > 0\}$, 则 $\complement_U A$ 是 ().
A. $\{x | x < -1\}$ B. $\{x | x \leq -1\}$
C. $\{x | x > -1\}$ D. $\{x | x \geq -1\}$
- 已知全集 $U = \{0, 1, 2\}$ 且 $\complement_U A = \{2\}$, 则集合 A 的真子集共有 _____ 个.
- 已知全集为 U , M, N 是 U 的非空子集. 若 $M \subseteq N$, 则 $\complement_U M$ 与 $\complement_U N$ 的关系是 _____.
- 已知集合 $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $\complement_U A = \{-1, -3, 1, 3, 5\}$, $\complement_U B = \{-1, 0, 2\}$, 求集合 B .

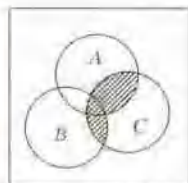
确地获解.

运用数轴解题时应注意验证端点值, 从而使解题做到准确无误.

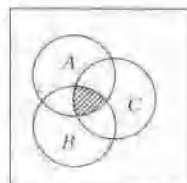
4. 如图, 分别用集合 A, B, C 表示各图中的阴影部分集合.



(1)



(2)



(3)

(第 4 题图)

5. 给出下列命题: ① $\complement_U A = \{x | x \notin A\}$; ② $\complement_U \emptyset = U$; ③ 若 $S = \{\text{三角形}\}$, $A = \{\text{钝角三角形}\}$, 则 $\complement_S A = \{\text{锐角三角形}\}$; ④ 若 $U = \{1, 2, 3\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, 则 $\complement_U A = \{1\}$. 其中正确命题的序号是 _____.

探究创新

- 设 M, P 是两个非空集合, 定义 M 与 P 的差集为 $M - P = \{x | x \in M, x \notin P\}$, 则 $M - (M - P)$ 等于 ().
A. P B. $M \cap P$
C. $M \cup P$ D. M
- 已知全集 $U = \{a, 1, 3, b, x^2 - 2 = 0\}$, 集合 $A = \{a, b\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
- 设全集 $U = \{2, 3, x^2 + 2x - 3\}$, $A = \{5\}$, $\complement_U A = \{2, y\}$, 求实数 x, y 的值.
- 设全集 $S = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $A = \{x | x^2 - px + q = 3\}$. 若 $\complement_S A = \emptyset$, 求 p, q .



● ● ● 集合习题课 ● ● ●



知识总结

1 集合中元素具有确定性、互异性、无序性三大特征

2 元素与集合、集合与集合间的关系

元素与集合的关系可用符号 $\in, \notin$ 来表示, a 是集合 A 中的元素记作 $a \in A$, a 不是集合 A 中的元素记作 $a \notin A$.

集合与集合之间的关系可用符号 $\subseteq, \supseteq, =$ 来表示, A 是 B 的子集,记作 $A \subseteq B$; $A = B$ 可改写为 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$;若 $A \supseteq B$,则集合 A 中所有元素都是 B 中元素,且集合 B 中存在元素不是 A 中元素.

3 $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 之间的关系

$\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 之间的关系可用符号 $\in, \subseteq, \supseteq$ 来表示,第一个符号说明 $\emptyset$ 是 $\{\emptyset\}$ 中的元素,第二个符号说明 $\emptyset$ 是 $\{\emptyset\}$ 的子集,第三个符号说明 $\emptyset$ 是 $\{\emptyset\}$ 的真子集.

4 集合 A 与 B 间的两种关系

$A \cap B = A$ 时, A 与 B 的关系有 $A \subseteq B$; $A \cup B = A$ 时, A 与 B 的关系是 $B \subseteq A$.

5 正确理解概念是进行交集、并集、补集运算的基础,灵活利用下面性质可给解题带来方便

名称	A, B 的交集	A, B 的并集	U 中子集 A 的补集
符号	$A \cap B$	$A \cup B$	$\complement_U A$
定义	$\{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	$\{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	$\{x x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$
性质	$A \cap B = B \cap A$ $A \cap B \subseteq A$ $A \cap B \subseteq B$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cup B \supseteq A$ $A \cup B \supseteq B$ $A \cup \emptyset = A$	$A \cap \complement_U A = \emptyset$ $A \cup \complement_U A = U$ $\complement_U (\complement_U A) = A$



例题应用

典例剖析

例1 (2006年安徽·文) 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $S = \{1, 3, 5\}$, $T = \{3, 6\}$, 则 $\complement_U (S \cup T)$ 等于().

- A. $\emptyset$ B. $\{2, 4, 7, 8\}$
C. $\{1, 3, 5, 6\}$ D. $\{2, 4, 6, 8\}$

解题思路: $S \cup T = \{1, 3, 5, 6\}$, 则 $\complement_U (S \cup T) = \{2, 4, 7, 8\}$, 故选 B.

例2 (2006年江苏) 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定有().

- A. $A \subseteq C$ B. $C \subseteq A$
C. $A \neq C$ D. $A = \emptyset$

解题思路: 因为 $A \subseteq A \cup B$ 且 $C \cap B \subseteq C$, $A \cup B = C \cap B$, 由题意得 $A \subseteq C$, 所以选 A.

例3 (2006年辽宁·理) 设 $\oplus$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个运算, A 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集, 若对任意 $a, b \in A$, 有 $a \oplus b \in A$, 则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于零)四则运算都封闭的是().

- A. 自然数集 B. 整数集
C. 有理数集 D. 无理数集

变式训练

1 (2006年天津·文) 已知集合 $A = \{x | -3 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | |x| \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$ ().

- A. $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$
C. $\{x | -3 \leq x \leq 2\}$ D. $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$

点评: 高考对集合知识的考查每年都有, 且多出现在选择题中, 填空题出现较少, 其主要考查集合的基本运算, 以及集合之间的关系等, 本题主要考查了集合的并、补运算.

2 (2006年辽宁·理) 设集合 $A = \{1, 2\}$, 则满足 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 的集合 B 的个数是().

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 8

点评: 对集合的子、交、并、补运算, 以及集合之间的关系要牢固掌握. 本题考查三个抽象集合之间的关系, 可以考虑借助 Venn 图.

3 (2006年山东·理) 定义集合运算: $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$. 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为().

- A. 0 B. 6 C. 12 D. 18



解题思路: A 中 $1-2=-1$ 不是自然数, 即自然数集不满足条件;

B 中 $1 \div 2=0.5$ 不是整数, 即整数集不满足条件;

C 中有理数集满足条件;

D 中 $\sqrt{2} \times \sqrt{2}=2$ 不是无理数, 即无理数集不满足条件, 故选择答案 C.

例 4 (2003 年上海·理) 设集合 $A=\{x \mid |x| < 4\}$, $B=\{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____.



图 1-1-7

解题思路: 由已知得 $A=\{x \mid -4 < x < 4\}$, $B=\{x \mid x > 3 \text{ 或 } x < 1\}$, 所以由数轴表示的集合 A 和集合 B 知 $A \cap B=\{x \mid -4 < x < 1 \text{ 或 } 3 < x < 4\}$, 所以 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\}=\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$.

例 5 (2004 年全国·理) 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式错误的是 ().

A. $(\complement_I A) \cup B = I$ B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$

C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$ D. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$

解题思路: 由补集的定义及 $A \subseteq B$ 知 $A \cap \complement_I B = \emptyset$, $\complement_I B \subseteq \complement_I A$, 所以 D, A 结论都正确.

又对 A 中的任一元素 x, 都有 $x \notin \complement_I A$, 且 $x \notin \complement_I B$, 知 $x \notin \complement_I A \cup \complement_I B$, 故 B 中式子错误.

答案选 B.

点评: 本题考查了阅读和理解能力, 同时考查了做选择题的一般技巧——排除法.

4. (2006 年全国 I·理) 设集合 $M=\{x \mid x^2 - x < 0\}$, $N=\{x \mid |x| < 2\}$, 则 ().

A. $M \cap N = \emptyset$

B. $M \cap N = M$

C. $M \cup M = M$

D. $M \cup N = R$

点评: 本题主要考查了集合的交集运算及补集的思想, 在处理条件不等式的端点值时, 应注意等号问题.

5. (2006 年上海·理) 已知集合 $A=\{-1, 3, 2m-1\}$, 集合 $B=\{3, m^2\}$. 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m =$ _____.

点评: 本题综合考查了补集和全集的概念及性质, 解决此类问题可画 Venn 图, 由几何直观帮助解题, 也可取特殊集合求解.



同步巩固练习

A 组

1. (2006 年江西·文) 已知集合 $P=\{x \mid x(x-1) \geq 0\}$,

$Q=\{x \mid \frac{1}{x-1} > 0\}$, 则 $P \cap Q$ 等于 ().

A. $\emptyset$

B. $\{x \mid x \geq 1\}$

C. $\{x \mid x > 1\}$

D. $\{x \mid x \geq 1 \text{ 或 } x < 0\}$

2. (2006 年陕西·理) 已知集合 $P=\{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$,

集合 $Q=\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x - 6 \leq 0\}$, 则 $P \cap Q$ 等于 ().

A. $\{2\}$

B. $\{1, 2\}$

C. $\{2, 3\}$

D. $\{1, 2, 3\}$

3. (2006 年湖北·文) 集合 $P=\{x \mid x^2 - 16 < 0\}$, $Q=\{x \mid$

$x=2n, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 $P \cap Q =$ ().

A. $\{-2, 2\}$

B. $\{-2, 2, -4, 4\}$

C. $\{-2, 0, 2\}$

D. $\{-2, 2, 0, -4, 4\}$

4. (2006 年重庆·理) 已知集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A =$

$\{2, 4, 5, 7\}$, $B=\{3, 4, 5\}$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) =$ ().

A. $\{1, 6\}$

B. $\{4, 5\}$

C. $\{2, 3, 4, 5, 7\}$

D. $\{1, 2, 3, 6, 7\}$

5. (2006 年北京·文) 设集合 $A=\{x \mid 2x+1 < 3\}$, $B=\{x \mid -3 < x < 2\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ().



- A. $\{x|-3 < x < 1\}$ B. $\{x|1 < x < 2\}$
C. $\{x|x > -3\}$ D. $\{x|x < 1\}$
- 6 (2006年上海·文) 已知 $A = \{-1, 3, m\}$, 集合 $B = \{3, 4\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m =$ _____.
- 7 (2003年上海春招) 已知集合 $A = \{x|x \leq 2\}$, $B = \{x|x \geq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 8 (2004年湖北·文) 设 $A = \{x|x = \sqrt{5k+1}, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x|x \leq 6, x \in \mathbb{Q}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

B组

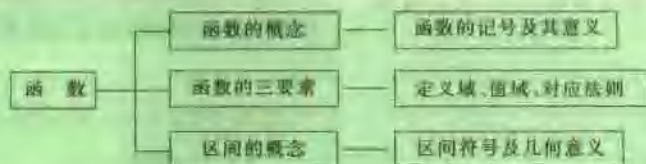
- 1 (2006年江西·理) 已知集合 $M = \{x|\frac{x}{(x-1)^3} \geq 0\}$, $N = \{y|y = 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $M \cap N =$ ().
A. $\emptyset$ B. $\{x|x \geq 1\}$
C. $\{x|x > 1\}$ D. $\{x|x \geq 1 \text{ 或 } x < 0\}$
- 2 (2006年安徽·理) 设集合 $A = \{x||x-2| \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y|y = -x^2, -1 \leq x \leq 2\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B)$ 等于 ().
A. $\mathbb{R}$ B. $\{x|x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$
C. $\{0\}$ D. $\emptyset$
- 3 (2002年全国) 设集合 $M = \{x|x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x|x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 ().
A. $M = N$ B. $M \subseteq N$
C. $M \supseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$
- 4 (2004年全国) 已知集合 $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{x|x = 2a, a \in M\}$, 则集合 $M \cap N$ 等于 ().
A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 2\}$

1.2 函数及其表示

1.2.1 函数的概念



主干知识梳理



1. 函数的概念

设 A, B 是非空数集, 如果按照某个确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的任意一个数 x , 在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作 $y = f(x), x \in A$.

2. 函数的三要素

对于函数 $f: A \rightarrow B$, 自变量 x 的取值集合 A 叫做函数的定义域; 与 x 对应的 y 的值叫做函数值, 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域.

定义域、值域与对应关系常被称为函数的三要素, 定义域与对应关系决定值域, 定义域和对应关系都相同的两函数也相同.

3. 区间的概念

设 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $a < b$, 则闭区间 $[a, b] = \{x|a \leq x \leq b\}$, 开区间 $(a, b) = \{x|a < x < b\}$, 左闭右开区间 $[a, b) = \{x|a \leq x < b\}$, 左开右闭区间 $(a, b] = \{x|a < x \leq b\}$.

4. $f(x)$ 与 $f(a)$ 的区别与联系

$f(a)$ 表示当 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值是一个常量, 而 $f(x)$ 是自变量 x 的函数, 在一般情况下, 它是一个变量, $f(a)$ 是 $f(x)$ 的一个特殊值, 如一次函数 $f(x) = 3x + 4$, 当 $x=8$ 时, $f(8) = 3 \times 8 + 4 = 28$ 是一个常数.

5. 函数的定义域

函数的定义域是自变量 x 的取值范围, 是构成函数的重要组成部分. 如果没有标明函数定义域, 则认为定义域是使函数解析式有意义的或使实际问题有意义的 x 的取值范围, 但要注意, 在实际问题中, 定义域要受实际意义的制约.