高等院校精品课程建设教材

高等数学

——及其思想方法与实验

GAODENG SHUXUE

JIQI SIXIANG FANGFA YU SHIYAN

吴炯圻　陈跃辉　唐振松　　编著

（上册）

厦门大学出版社

XIAMEN UNIVERSITY PRESS

高等院校精品课程建设教

高等数学

——及其思想方法与实验

（上册）

吴炯圻 陈跃辉 唐振松 编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学——及其思想方法与实验/吴炯圻等编著.—厦门:厦门大学出版社,2007.8
ISBN 978-7-5615-2850-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.吴…　Ⅲ.高等学校　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 127493 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学　邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
厦门昕嘉莹印刷有限公司印刷
2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
开本:787×960　1/16　印张:41.25　插页:4
字数:715 千字　印数:0001～4000 册
定价:48.00 元(上、下册)

内容简介

本书以数学思想方法为指导，阐述微积分学的基本内容、基本方法和有关应用，分为上、下两册。上册（1－6 章）包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用和微分方程；下册（7－11 章）包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数。各章均附有数学实验和思想方法选讲各一节，书末附有各章习题的参考答案。此外，上册书末还附有几种常用曲线、积分表、Mathematica 的使用简介。

本书适用于一般理工科、经济、管理各专业学习高等数学课程的学生，也可供其他专业的师生教学参考。

前　言

本套《高等数学》教材是福建省教育厅高校精品课程立项建设的一个成果，是我校长期开设这门课程的经验总结，凝聚了校内、外许多老师多年辛勤劳动的心血。

全书以数学思想方法为指导，阐述微积分学的基本内容、基本方法和有关应用，分为上下两册。上册(1—6章)包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用和微分方程；下册(7—11章)包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数。各章均附有数学实验和思想方法选讲各一节，书末还附有几种常用曲线、积分表、Mathematica的使用简介与各章习题的参考答案。

本书适用于一般理工科、经济、管理各专业学习高等数学课程的学生(少课时的专业对教材中附上星号*的章节可以选用或不用)，也可供其他专业的师生教学参考。

本书的特点是：

1. 顺应现代教育思想的潮流和教育观念的变革，适合素质教育的推进，突出数学思想方法的作用。在讲授数学的内容时，重视概念引入的背景和应用意识的培养，重视提出问题和解决问题的思路的启发，重视数学思想的渗透与基本数学方法的训练；此外，每章最后一节都结合该章的数学知识有系统地讲解数学思想方法，旨在帮助读者进一步加深对数学原理及其思想方法的理解、适当了解相关的数学历史事件和当今的发展信息，开阔视野、增加学习兴趣。

2. 在教学内容上，在保证达到“高等数学课程教学大纲”要求的前提下，努力吸收当前一些教材改革中的成功举措，融合多所高校先进的教学经验；注意文理渗透，体现微积分基本思想在理、工、经、管等领域中的应用。为了加强应用意识和创新能力的培养，每章附有一节数学实验，用于指导读者通过上机实验，验证公式、建立数学模型、学习计算方法。

3. 继承传统教材结构严谨、逻辑清晰的优点，做到突出重点、抓住关键；尽可能保证理论完整、推理严密，又力求通俗易懂、便于自学；同时还注意考虑到各类读者对这一课程的不同需要。

本书由吴炯圻教授(2003年福建省高等学校教学名师奖获得者)、系副主任

陈跃辉副教授、高等数学教研室主任唐振松副教授编著。具体地，各章的数学实验和思想方法选讲分别由陈跃辉和吴炯圻编写；第 2、3、4、5 和 9 章的编写主要由唐振松负责；第 10、11 章主要由陈跃辉负责；第 1、6、7、8 章及全书的文字统一处理工作主要由吴炯圻负责。

我校副校长李进金教授（2007 年福建省高等学校教学名师奖获得者）对《高等数学》课程建设和本教材的编写非常关心和支持；王桂芳教授、邱宜坪教授和许多同事对本书的早期版本提出了宝贵的意见与建议；李克典教授对本书下册的修改稿提出了许多重要的意见与建议。谨此向他们表示衷心的感谢。

本书较多地参考了李进金教授主编的《高等数学》教材，也参考了国内多部优秀的同类教材。除了在书末列出这些参考文献之外，我们在此向这些文献的作者们致以诚挚的谢意。

同时，我们向支持本书编写、试用和出版的各单位有关领导和广大师生致谢。

限于编著者的学识、水平和能力，书中可能仍有不足与错漏之处，欢迎使用本书的老师和读者不吝指正。

编著者

于漳州师范学院数学与信息科学系

2007. 5. 1

目 录

第一章

函数与极限

函数是微积分的主要研究对象;极限理论和方法是微积分的理论基础和基本工具. 因此,理解与掌握极限思想方法是学好微积分的关键. 本章主要介绍极限和函数的连续性等基本概念及其性质.

§1.1 函　数

本节主要复习中学已经学习过的函数概念和它的基本性质. 在这之前,先简要介绍集合论和拓扑学中的一些基本概念. 实际上,这两门学科已经成为现代数学的基础.

§1.1.1 集合

1. 集合的基本概念与运算

集合(简称为集)是数学的一个基本概念,在现代数学中起着非常重要的作用. 当研究范围明确时,**集合**通常理解为具有某种性质的事物的全体. 集合中的每一个事物都被称为该集合的一个**元素**. 某事物 a 与集合 E 具有下列两种关系之一:

(1)a 是 E 的元素,记作 $a \in E$;(2)a 不是 E 的元素,记作 $a \notin E$.

由有限个元素组成的集合,可将它的元素一一列举出来. 这种表示法称为**枚举法**. 例如,由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A,记作

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

对于一般的集合,通常采用**性质描述法**表示:设 E 是具有性质 P 的元素 x 的全体所组成的集合,就记作

$$E = \{x \mid x\text{ 具有性质 }P\}\text{ 或 }E = \{x \mid P(x)\}.$$

通常,以 **Z**、**Q**、**R** 和 **C** 分别表示整数集、有理数集、实数集和复数集.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x \in A$,则必有 $x \in B$,就称 A 是 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

如果 $A \subseteq B$ 与 $A \supseteq B$ 同时成立,则称 ***A* 与 *B* 相等**,记作 $A = B$. 例如,设有集合 $A = \{-1, -2\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$,则 $A = B$. 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq$

B,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A \subset B$. 例如 $\boldsymbol{Q} \subset \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$. 如集合

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing.$$

规定空集是任意集 A 的子集,即 $\varnothing \subseteq A$.

集合的基本运算有并、交、差.

设 A 和 B 是两个集合,由 A 和 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的**并**,记为 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的**交**,记为 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的**差**,记为 $A \backslash B$,即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

如果在某个过程中,我们所研究的对象同属于某一个集合 S,那么这个集合称为**全集**或**基础集**. 本书在一般情况下用实数集 $\mathbf{R}$ 当全集.

一般地,设 A 是全集 S 的子集,那么 S 中不属于 A 的元素全体组成的集合称为 A 的余集,记为 $\overline{A}$,即

$$\overline{A} = S \backslash A.$$

例如,对于全集 $\mathbf{R}$,子集 $A = \{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$ 的余集就是

$$\overline{A} = \mathbf{R} \backslash A = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geqslant 1\}.$$

2. 邻域、开集、闭集、区间

对于实数 a 及正数 δ,数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为 a 的(以点 a 为中心、以 δ 为半径的)**δ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即 $U(a,\delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$. 如图 1-1-1 所示.

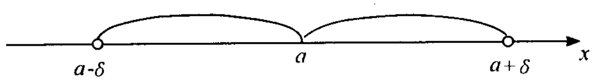

图 1-1-1

数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$. 当不强调 δ 的大小时,a 的 δ 邻域和 δ 去心邻域分别简称为 a 的**邻域**和**去心邻域**,并分别记作 $U(a)$ 和 $\mathring{U}(a)$.

设 a 与 b 是两个不同的实数,且 $a < b$,数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},$$

其中 a 与 b 称为开区间 (a,b) 的**端点**.

因此,邻域是一个以 a 为中心的开区间,即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$.

数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

其中 a 与 b 称为闭区间 $[a,b]$ 的**端点**.

又,数集 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 均称为**半开区间**,a 与 b 称为它们的端点.

以上这四种区间都称为**有限区间**,数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**.

类似地,我们可以定义五类无限区间:

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$,

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$.

其中部分区间在数轴上表示如图 1-1-2.

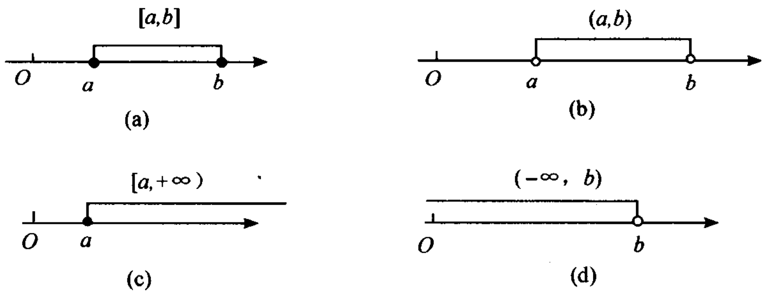

图 1-1-2

对 (a,b),$(-\infty,b)$,$(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,+\infty)$ 这四类区间做进一步的分析发现,它们中的任何一点 x_0 都至少存在一个邻域 $U(x_0)$ 使得 $U(x_0)$ 整个被包含于 x_0 所在的区间. 一般地,设 E 是 $\mathbf{R}$ 的一个子集,若对任意 $x_0\in E$ 都存在 $U(x_0)\subset E$,则称 E 是一个**开集**. 因此,这四种区间都是开集,特别,开区间和邻域 $U(a)$ 都是开集.

又,设 F 是 $\mathbf{R}$ 的一个子集,若存在开集 E 使得 $F=\mathbf{R}\backslash E$,则称 F 是一个**闭集**. 这就是说,闭集是开集的余集;反之,开集也是闭集的余集. 于是,闭区间 $[a,b]$,$(-\infty,b]$ 和 $[a,+\infty)$ 都是闭集.

邻域、开集和闭集都是拓扑学的重要概念. 在第八章我们还会进一步介绍.

§1.1.2　函数的基本概念

1. 函数的定义

在生产、生活或科学技术领域中，我们会遇到两种类型的量：一种是在一定条件下保持不变的量，称为**常量**，如每天的时间总量 T 都是 24 小时，地面上重力加速度 $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，T 和 g 是常量；另一种是在一定过程中变化着的量，称为**变量**，如运动的路程及花费的时间，一天之中的气温等.

在某个过程中，往往同时出现两个或多个变量，它们不是孤立地在变化，而是互相联系着地在变化. 下面考察几个例子：

例 1　正方形的面积 S 与它的边长 a 之间的关系可用 $S = a^2$ 来表示，即对任意的 $a \in [0,\infty)$，面积 S 都相应地有一个确定的值.

例 2　一个物体作匀加速直线运动，出发后 t 秒时所走过的路程 s 可按如下公式确定：

$$s = \frac{1}{2}at^2,t \in [0,T]\text{(其中 } a \text{ 是加速度，} T \text{ 是最大运动时间).}$$

例 3　漳州是水仙花的故乡. 漳州市郊区农民近六年生产花卉出口创汇日益增加. 某村各年出口创汇的数量如下表所示：

年度	2001	2002	2003	2004	2005	2006
创汇金额(万元)	20	102	210	380	590	880

以上三个例子都反映了两个变量之间的联系，当其中一个变量在某个数集内取值时，另一个变量在另一数集内有唯一的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系反映了函数概念的实质. 人们对此进行抽象和推广，得到如下定义.

定义　设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集，若对 D 中的每一个 x，按照对应法则 f，实数集 $\mathbf{R}$ 中有唯一的数 y 与之相对应，我们称 f 为从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个**函数**，记作

$$f:D \to \mathbf{R}.$$

上述 y 与 x 之间的对应关系记作 $y = f(x)$，并称 y 为 x 的**函数值**，D 称为函数的定义域，数集 $f(D) = \{y \mid y = f(x),x \in D\}$ 称为函数的**值域**. 若把 x，y 看成变量，则 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

那么，定义域 D 就是自变量 x 的取值范围，而值域 $f(D)$ 是因变量 y 的取值范围. 特别，当值域 $f(D)$ 是仅由一个实数 C 组成的集合时，$f(x)$ 称为**常值函数**. 这时，$f(x) = C$，也就是说，我们把常量看成特殊的因变量.

由定义可知，例 1 的对应关系确定了一个定义在$[0,+\infty)$上以 a 为自变量

的函数；例2确定了一个定义在$[0,T]$上以t为自变量的函数；例3则确定了一个定义在数集$\{2001,2002,2003,2004,2005,2006\}$上以年份为自变量的函数.

几点说明：

(1) 为了使用方便，我们将符号“$f:D\to\mathbf{R}$”记为“$y=f(x)$”，并称“$f(x)$是x的函数(值)”. 当强调定义域时，也常记作

$$y=f(x),x\in D.$$

(2) 函数$y=f(x)$中表示对应关系的符号f也可改用其他字母，例如“φ”，“F”等等. 这时函数就记为$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，等等.

(3) 用$y=f(x)$表示一个函数时，f所代表的对应法则已完全确定，对应于点$x=x_0$的函数值记为$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$.

例如，设$y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$，它在点$x=0$，$x=-2$的函数值分别为

$$y|_{x=0}=f(0)=\sqrt{4-0^2}=2,y|_{x=-2}=\sqrt{4-(-2)^2}=0.$$

(4) 从函数的定义知，定义域和对应法则是函数的两个基本要素，两个函数相同当且仅当它们的定义域和对应法则都相同.

(5) 在实际问题中，函数的定义域可根据变量的实际意义来确定；但在解题中，对于用表达式表示的函数，其省略未表出的定义域通常指的是：使该表达式有意义的自变量取值范围.

例 4 求函数$y=\sqrt{2x-1}+\log_{10}(1-x)$的定义域.

解 要使函数式子有意义，x必须满足$\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\1-x>0\end{cases}$，于是，所求函数的定义域为

$$D=\left\{x\mid \frac{1}{2}\leqslant x<1\right\}.$$

2. 函数的表示法

(1) **解析法**

当函数的对应法则用数学式子表出时，这种表示函数的方法称为解析法. 如

$$y=x^2-2x+3,x>1;y=\frac{1}{1-x^2},|x|<1.$$

都是解析法表示的函数，这将是我们今后表达函数的主要形式. 又如

例 5 设x为任一实数. 不超过x的最大整数称为x的整数部分，记为$y=[x]$，则$\left[\frac{3}{4}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\pi]=3$，$[-2]=-2$，$[-4.6]=-5$. 这个函数称为**取整函数**.

一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式表示，如：

例 6　$y=\begin{cases} x^2 & x\in(0,+\infty) \\ \dfrac{1}{2} & x=0 \\ 1-x & x\in(-\infty,0) \end{cases}$.

例 7　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

例 8　$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0. \\ 1 & x>0 \end{cases}$

易知,对于任何实数 x,都有 $x=(\operatorname{sgn}x)|x|$ 成立.这个函数称为**符号函数**.

像例 6、7、8 这种形式的函数,称为**分段函数**.

(2) **列表法**

若函数 $y=f(x)$ 采用含有自变量 x 的值与它在函数 $f(x)$ 中对应值的表格来表示,则称这种表示函数的方法为**列表法**.如上述例 3 及通常所用的三角函数表、对数表等等,都是用列表法表达函数的例子.

(3) **图像法**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,那么对于任意取定的 $x\in D$,其函数值为 $y=f(x)$.这样,以 x 为横坐标、y 为纵坐标,就在 xOy 平面上确定了一点 (x,y).当 x 遍取 D 上的每一个数值时,就得到平面点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\},$$

称其为函数 $y=f(x)$ 的**图像**.采用图像给出函数的方法称为**图像法**.图 1-1-3、图 1-1-4 与图 1-1-5 就是用图像法分别表示的取整函数、绝对值函数和符号函数.

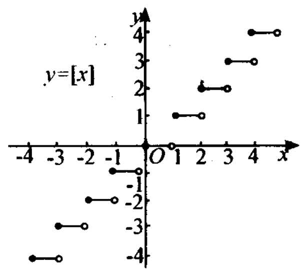

图 1-1-3

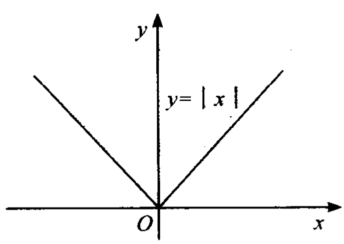

图 1-1-4

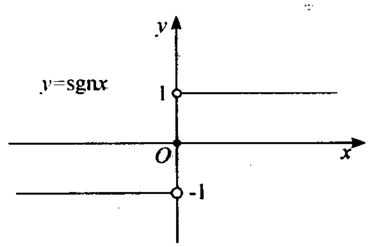

图 1-1-5

§1.1.3 函数的基本性质

1. 函数的有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在某一实数集 D_1 上有定义(即 D_1 是 $f(x)$ 的定义域 D 的子集),若存在常数 M(或 m) 使得不等式

$$f(x)\leqslant M(\text{或 } f(x)\geqslant m)$$

对所有 $x\in D$,都成立,则称函数 $y=f(x)$ 在 D_1 上**有上界**(或**有下界**),同时称 M 为 $f(x)$ 在 D_1 上的一个**上界**(或 m 为 $f(x)$ 在 D_1 上的一个**下界**).若 $f(x)$ 在 D_1 既有上界又有下界,则称 $f(x)$ 在 D_1 上**有界**,或 $f(x)$ 在 D_1 上是**有界函数**,否则,则称函数 $f(x)$ 在 D_1 上**无界**,或称在 D_1 上函数 $f(x)$ 是**无界函数**.

如三角函数 $y=\sin x,y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的,因为对所有实数 x,有 $|\sin x|\leqslant 1,|\cos x|\leqslant 1$. 函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$无界(没有上界),在区间$[-1,1]$上有界. 函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 在开区间$(0,1)$上无界(没有下界),但在区间$(1,3)$有界.

由定义可知,函数 $f(x)$ 在 D_1 上有界当且仅当存在一个常数 $K>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant K,x\in D_1.$$

2. 函数的单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在某一实数集 D 上有定义,若对于任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时恒有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调增加**;

(2) $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调减少**.

单调增加与单调减少的函数统称为**单调函数**.

注 把(1)中的条件改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**不减**;把(2)中的条件改为 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 成立时,则称 $f(x)$ 在 D 上**不增**.不增与不减的函数统称为**广义单调函数**.本书主要涉及单调函数(也称为“严格单调函数”),把广义单调函数可能具有的类似性质留给读者自行探讨.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的,但在$(-\infty,0]$上是单调减少的;在整个定义域$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

定义 设实数集 D 满足:$x\in D$ 当仅当 $-x\in D$,则称 D 是一个**对称集**.设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是一个对称集,若 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=f(x),x\in D,$$

则称函数 $f(x)$ 是**偶函数**；若 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x),x\in D,$$

则称函数 $f(x)$ 是**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1-1-6)，奇函数的图像关于坐标原点对称(图 1-1-7).

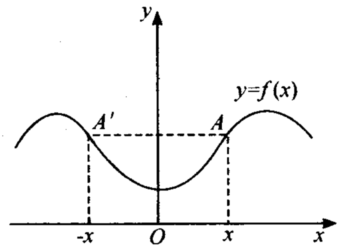

图 1-1-6

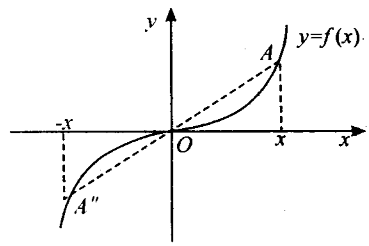

图 1-1-7

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$ 是偶函数，而函数 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

4. 函数的周期性

定义　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为集 D，若存在一个非零的数 T，使得对于任意 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$ 且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，同时称 T 为 $f(x)$ 的**周期**.

显然，若 T 为 $f(x)$ 的一个周期，则 $2T,3T,4T,\cdots$ 也都是它的周期，故周期函数有无限多个周期. 若在周期函数 $f(x)$ 的所有正周期中有一个最小者，则称这个最小者为函数 $f(x)$ 的**最小正周期**. 通常所说的周期就是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x,\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的函数.

并非每一个周期函数都有最小正周期. 如，对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷(Dirichlet) 函数：

$$f(x)=D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases},$$

任意有理数都是它的周期，但它没有最小正周期.

§1.1.4　反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的. 我们不仅需要研究变量 y 随变量 x 变化而变化的情况，有时也要研究变量 x 随变量 y 变化而变化的状况. 例如，自