现代数学基础丛书 111

非线性常微分方程边值问题

葛渭高 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是作者近年来研究工作的总结. 在介绍拓扑度理论的基础上, 分别对二阶非线性微分方程边值问题, 带 p-Laplace 算子的二阶方程边值问题, 周期边值问题和高阶微分方程边值问题, 给出了有解性、多解性及解的唯一性的判断依据, 展示了各类问题的研究技巧和方法.

本书适用于大学数学专业高年级学生、研究生、教师及对本方向有兴趣的研究人员.

图书在版编目(CIP)数据

非线性常微分方程边值问题/葛渭高著. —北京: 科学出版社, 2007
(现代数学基础丛书; 111)
ISBN 978-7-03-019046-8

I. 非… II. 葛… III. 非线性—常微分方程—边值问题 IV. O175.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 079869 号

责任编辑: 张 扬 贾瑞娜 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 6 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2007 年 6 月第一次印刷 印张: 29 1/4
印数: 1—3 000 字数: 557 000

定价: 65.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈明辉〉)

《现代数学基础丛书》编委会

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

边值问题是非线性常微分方程理论研究中一个活跃而成果丰硕的领域. 多年来在国家自然科学基金、教育部博士点专项基金及北京理工大学基础研究基金的支持下, 我和我的学生在这一领域中作了探索. 本书是我们主要研究工作的总结.

本书出版的目的是希望为有兴趣研究常微分方程边值问题的青年学子提供一本进入该领域的基本读物. 为此, 本书从基本概念、方法入手, 给出最新结果的论证. 在众多模型的讨论中, 既揭示总体方法的共同性, 又展示具体技巧的多样性, 努力将我们的研究体会融入相关内容之中.

全书分 6 章.

第 1 章概述了常微分方程边值问题研究的进展, 对线性边值问题的共振与非共振情况作了区分, 给出了非共振情况下 Green 函数的计算方法, 讨论了共振情况下线性算子核的维数与约束条件间的联系. 这些讨论, 是为运用算子方法研究非线性常微分方程边值问题做好准备.

第 2 章介绍拓扑度理论, 并由拓扑度理论导出边值问题研究中常用的各种不动点定理和连续性定理, 包括我们所构造的定理及所作的推广. 这些定理构成了以后各章研究具体边值问题所需的理论基础.

第 3 章研究二阶非线性微分方程边值问题, 对上下解方法作了分析, 提供了非线性项变号情况下讨论正解存在性的技巧和方法, 给出了新的结果.

第 4 章讨论带 p-Laplace 算子的二阶微分方程边值问题. 通过引进广义极坐标系, 给出了多解的存在条件; 通过论证算子的全连续性及引进适当的泛函, 得出了正解存在的各类依据; 运用推广的连续性定理, 证明了相关条件下共振边值问题解的存在性和多重性.

第 5 章讨论周期边值问题, 包括周期解问题. 首先对两者的联系作了说明, 证明了适于研究泛函微分方程和迭代微分方程周期解的一些新颖而实用的引理, 并用于对各类方程给出存在周期解的条件.

第 6 章探讨高阶微分方程边值问题. 对高阶边值问题的"降阶"作了论证; 运用上下解方法和不动点定理给出了三阶、四阶微分方程边值问题的有解性条件; 对一般的高阶微分方程边值问题讨论了正解的存在性, 对多种共振边值问题, 给出了有解性条件.

书中的结果绝大部分已发表于国内外学术刊物. 在整理成书时, 对条件的设定、

证明的步骤、结论的表述再次进行了简化、改进或拓广. 但是错漏不当之处在所难免, 敬请专家、读者指正.

在此, 对国家自然科学基金委员会、教育部科技发展中心和北京理工大学科研处一贯的支持, 表示由衷的感谢.

作　者

2007 年元月于北京理工大学

目　录

第 1 章　导　　论

1.1　历史背景和发展

给定一个常微分方程

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}), \tag{1.1.1}$$

其中 $f : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, 当需要寻求满足特定条件

$$U(x) = 0 \tag{1.1.2}$$

的解时，就得到常微分方程定解问题，其中 $U : C^{n-1}(I) \to \mathbf{R}$ 与 x 及 x 的直到 $n-1$ 阶导数在 t 的某些给定点上的取值有关，值域在 $\mathbf{R}^n$ 之中. 式 (1.1.2) 称为方程 (1.1.1) 的定解条件. 依据定解条件的不同，可分为不同的定解问题. 当条件 (1.1.2) 仅对解 $x = x(t)$ 及其直至 $n-1$ 阶导数在某一点 $t = t_0$ 处的取值或这些联值间的相互联系加以限定时，就是初值问题；当对解 x 及相关导数在自变量 t 的至少两个点处的值进行限定时，就是边值问题. n 阶常微分方程 (1.1.1) 的定解条件通常由 n 个方程构成. 例如

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

是一个初值问题，而

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

是一个边值问题. 为简单起见，以后用 BVP 表示边值问题，其中的定解条件称为边界条件.

由于常微分方程边值问题是微分方程理论研究中的一个基本问题，因此相关的理论可以追溯到牛顿和莱布尼茨建立微积分学的最初阶段.

虽然牛顿在 1666 年 10 月就将他在微积分研究领域中取得的成果写成了一篇总结性论文[1]，但只在同事中传阅，没有正式发表. 莱布尼茨分别在 1684 年和 1686 年发表了他的第一篇微分学论文[2] 和第一篇积分学论文[3]. 其后，牛顿在他 1687 年出版的力学名著《自然哲学的数学原理》(Philosophiae Nuturalis Principia

Methematica)[4] 中公开了他的研究工作. 就在微积分学创建和发展的日子里，瑞士数学家雅克 · 伯努利 (Jacob Bernoulli) 在 1690 年提出了著名的悬链线问题[5]：一根柔软但不能伸长的绳子自由悬挂于两定点 $A(a,\alpha), B(b,\beta)$，求绳子在重力作用下形成的曲线. 第二年莱布尼茨等给出了问题的解答. 通过对绳子上各点受力情况的分析，建立了常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{1+y^2}\qquad (\lambda\text{与绳长有关}),\tag{1.1.3}$$

定解条件是

$$y(a)=\alpha,\qquad y(b)=\beta,\tag{1.1.4}$$

这是一个二阶微分方程的两点边值问题.

常微分方程边值问题的另一个早期例子是最速降线问题[6]，设质点由 $A(a,\alpha)$ 下降到 $B(b,\beta)$，$\beta<\alpha$，求一条轨线使从 A 到 B 下降的时间最短. 这一问题是雅克 · 伯努利的弟弟约翰 · 伯努利 (John Bernoulli) 在 1696 年向当时的欧洲数学家，尤其可能是向牛顿提出的公开挑战. 之后，牛顿、莱布尼茨及伯努利兄弟等都给出了正确的答案，通过对运动规律的分析，问题归结为求积分

$$J=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)-\alpha}}\mathrm{d}x$$

的最小值，运用变分学原理，又转换为求解

$$\begin{cases} y''=-\dfrac{1+y'^2}{2(y-\alpha)},\\ y(a)=\alpha,\qquad y(b)=\beta, \end{cases}\tag{1.1.5}$$

这是一个常微分方程边值问题.

18 世纪中，由于伯努利兄弟、欧拉 (Lesnard Euler)、法国数学家拉格朗日 (J.L.Lagrange) 等的卓越工作，在一阶及高阶常微分方程的求解上取得了重大进展，给出了各种解法，常微分方程成为新的数学分支[1]. 19 世纪初，法国数学家傅里叶 (J.Fourier) 用分离变量法求解热传导问题，导出了二阶常微分方程的两点边值问题

$$\begin{cases} \varPhi''(x)+\lambda k^2\varPhi(x)=0,\\ \varPhi(0)=\varPhi(l)=0, \end{cases}\tag{1.1.6}$$

其中 λ 是参数，由于边值问题 (1.1.6) 的解是否存在与 λ 的取值有关，从而导出了特征值的概念. 从 19 世纪 30 年代起，法国巴黎大学教授斯图姆 (Charles Sturm)

和法兰西学院教授刘维尔 (Joseph Liouville) 共同研究二阶常微分方程的两点边值问题. 他们将二阶线性微分方程化为

$$(P(t)x^{'})^{'} + \lambda q(t)x = 0, \qquad p(t), q(t) > 0, \tag{1.1.7}$$

变换后的方程所应满足的边界条件写成一般形式

$$x^{'}(a) - \alpha x(a) = x^{'}(b) + \beta x(b) = 0, \qquad \alpha, \beta \geqslant 0, \tag{1.1.8}$$

现称为斯图姆 - 刘维尔边界条件，他们的研究得到了关于特征值的一系列结果，形成斯图姆 - 刘维尔理论 [7, 8].

20 世纪以来，泛函分析逐渐成为研究常微分方程边值问题的重要理论基础. 事实上，常微分运算和积分运算的共同特征是，它们作用到一个函数后都得出新的函数，可以将这些运算统一抽象为算子. 泛函分析正是在算子概念的基础上发展起来的. 30 年代中期法国数学家勒雷 (J.Leray) 和绍德尔 (J.Schauder) 建立了 Leray-Schauder 度理论 [9,10]. 他们的方法用于研究线性微分、积分、泛函方程时，取得了巨大成功. 尤其是这种理论对常微分方程边值问题的应用，形成了常微分方程拓扑方法或泛函分析方法 [11,12]. 其核心是各类不动点定理的建立和应用.

在泛函分析理论以及实际问题的推动下，常微分方程边值问题的研究在近半个世纪里发展十分迅速. 除了传统的二阶常微分方程两点边值问题之外，开始研究高阶微分方程的边值问题 [13,14]. 并且随着新问题的出现，形成了许多新的研究方向.

首先是奇异边值问题.

1927 年托马斯 [15](L.H.Thomas) 和费米 [16](E.Fermi) 为确定原子中的电动势独立导出了二阶常微分方程的奇性边值问题

$$\begin{cases} x^{''} - t^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = 0, \\ x(0) = 1, \qquad x(b) = 0, \end{cases} \tag{1.1.9}$$

这里所说的奇性，是指 $\lim\limits_{t\to 0^+} x^{''}(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} t^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}(t) = \infty$. 之后对这类边值问题的研究形成了有其独特方法的研究方向，即奇异边值问题 [17,18].

其次是无穷区间上的边值问题.

最早的例子由基德 (R.E.Kider) 给出 [19]. 设半无穷多孔介质在起始时刻 $t=0$ 时充满压力为 P_0 的气体，此时在流出面上的压力突然由 P_0 减到 P_1 且以后一直保持 P_1 压力，这样气体就在介质中产生非稳态流. 对于从 $x=0$ 延伸至 $x=\infty$ 的一维介质，压力与位置及时间的关系为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial P}{\partial x}\right) = A\frac{\partial P}{\partial t},$$

其中 A 是由介质性质确定的常数，压力应满足的初边值条件为

$$\begin{cases} P(x,0) = P_0, & 0 < x < \infty, \\ P(0,t) = P_1, & 0 < t < \infty, \end{cases}$$

引进度量 $z = \dfrac{x}{\sqrt{t}}\left(\dfrac{A}{4P_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ 及量纲一变量

$$W(z) = \alpha^{-1}\left(1 - \frac{P^2(x)}{P_0^2}\right),$$

其中 $\alpha = 1 - \dfrac{P_1^2(x)}{P_0^2}$，就得出无穷区间上的边值问题

$$\begin{cases} W'' + \dfrac{2z}{(1-\alpha W^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} W' = 0, \\ W(0) = 1, \qquad W(\infty) = 0, \end{cases} \tag{1.1.10}$$

对这类问题的一系列研究，形成了无穷区间上的边值问题 [20].

带 p-Laplace 算子或 Laplace-like（拉普拉斯型）算子的微分方程边值问题是二阶微分方程边值问题的推广．这类问题产生于非牛顿流体理论和多孔介质中气体的湍流理论，最早提出的模型 [21,22] 是

$$(\Phi_p(u'))' = q(t)f(t,u,u') \tag{1.1.11}$$

及边界条件

$$u(0) = a, \qquad u(1) = b \tag{1.1.12}$$

或

$$u'(0) = a, \qquad u(1) = b, \tag{1.1.13}$$

其中 $\Phi_p(s) = |s|^{p-2}(p > 1)$ 称为 p- 拉普拉斯算子 (p-Laplacian operator) 或拟线性算子 (quasilinear operator)．智利数学家较早地研究了此类边值问题 [23]，并很快引起数学界的重视，取得了一系列研究成果 [24,25]，成为一个经久不衰的研究热点.

经典的二阶常微分方程边值问题，无论是周期边界条件还是 Sturm-Liouville 边界条件，定解条件都是在给定区间的两端施加限制. 鉴于边界条件的离散化，从 20 世纪 80 年代中期开始研究二阶常微分方程的多点边值问题 [26,27]，也就是所给的两个定解条件涉及端点间其他点上的函数值，例如

$$\begin{cases} u'' + f(t,u,u') = 0, \\ u(0) = u(1) - \alpha u(\xi) = 0 \end{cases} \tag{1.1.14}$$

就是一个二阶常微分方程的三点边值问题. 以此类推就有四点边值问题, n 点边值问题. 常微分方程多点边值问题也常被称为常微分方程非局部边值问题 [28].

与此同时, 常微分方程的脉冲效应也引起了人们的重视 [29,30], 这种脉冲效应造成微分方程的瞬时改变, 因此可以认为是微分方程和差分方程的相互结合. 保加利亚数学家对此作了大量的研究 [31,32]. 在常微分方程边值问题中结合脉冲效应, 就得到常微分方程脉冲边值问题, 例如

$$\begin{cases} x'' + f(t,x,x') = 0, \qquad t \neq t_k, k = 1, \cdots, m, \\ \Delta x(t_k) = J_k(x(t_k, x'(t_k))), \\ \Delta x'(t_k) = J_k(x(t_k, x'(t_k))), \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{1.1.15}$$

其中 $0 < t_1 < \cdots < t_m < 1$. 在这类边值问题中, 脉冲周期边值问题 [33,34] 研究得比较早也比较充分.

除了以上提到的研究方向外, 在方程中引进时滞而得到时滞边值问题, 边界条件为相关点上函数的非线性约束情况都有一系列研究工作 [35,36].

1.2 常微分方程线性边值问题

常微分方程线性边值问题是研究非线性边值问题的基础.

1.2.1 线性边值问题的分类

设

$$Lx = x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t) x^{(n-i)}, \tag{1.2.1}$$

$$U(x) = [U_1(x), U_2(x), \cdots, U_n(x)]^{\mathrm{T}}, \tag{1.2.2}$$

其中 $U_i(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_{ikj} x^{(j)}(\alpha_k), i = 1, 2, \cdots, n$,

$$a = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{m-1} = b, \qquad m \geqslant 1.$$

又设 $\eta = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]^{\mathrm{T}}$, $f(t)$ 是已知函数, 则

$$\begin{cases} Lx = f(t), \\ U(x) = \eta \end{cases} \tag{1.2.3}$$

是线性边值问题的一般形式, 它由微分方程和边界条件两部分构成. 在古典意义下研究边值问题 (BVP)(1.2.3), 要求式 (1.2.1) 中的 a_i 及 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 即

$$f \in C[a,b], \qquad a_i \in C[a,b], i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.2.4}$$

这时求得的解 x 满足 $x \in C^n[a,b]$.

在非古典意义下研究 BVP(1.2.3), 其中的微分方程理解为

$$Lx = f(t), \qquad \text{a.e.} t \in [a,b]$$

时, 通常只要求

$$f \in L^p[a,b], \qquad a_i \in L^p[a,b], \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.2.5}$$

这时求得的解 x 满足 $x \in W^{n,p}[a,b]$.

不论是在古典意义下还是非古典意义下, BVP(1.2.3) 中如果 $f(t) \equiv 0, \quad \eta = 0$, 则称为线性齐次边值问题, 否则称为线性非齐次边值问题. 非齐次边值问题中, 如果

$$f(t) \not\equiv 0, \qquad \eta = 0 \tag{1.2.6}$$

或

$$f(t) \equiv 0, \qquad \eta \neq 0, \tag{1.2.7}$$

又称为半齐次边值问题. 其中, 当式 (1.2.6) 满足时, 称为第一类半齐次边值问题, 当式 (1.2.7) 满足时, 称为第二类半齐次边值问题.

设 $x_0(t), \hat{x}(t), \overline{x}(t)$ 分别是

$$\begin{cases} Lx = 0, \\ U(x) = 0, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

$$\begin{cases} Lx = f(t), \\ U(x) = 0 \end{cases} \tag{1.2.9}$$

和

$$\begin{cases} Lx = 0, \\ U(x) = \eta \end{cases} \tag{1.2.10}$$

的解, 令

$$x(t) = x_0(t) + \widehat{x}(t) + \overline{x}(t), \tag{1.2.11}$$

可得 $Lx = f(t), U(x) = \eta$ 的解. 因此 BVP(1.2.3) 的有解性等价于 BVP(1.2.9) 和 BVP(1.2.10) 的有解性.

1.2.2 线性边值问题有解的条件

设 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 是 $Lx=0$ 的 n 个线性无关解，$\forall x(t)=\sum\limits_{l=1}^{n}c_l x_l(t)$，有

$$\begin{aligned}U_i(x)&=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}a_{ikj}x^{(j)}(\alpha_k)\\&=\sum_{l=1}^{n}c_l\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}a_{ikj}x_l^{(j)}(\alpha_k)\\&=\sum_{l=1}^{n}c_l U_i(x_l).\end{aligned}$$

因此，设 $x(t)=\sum\limits_{l=1}^{n}\bar{c}_l x_l(t)$ 是 BVP(1.2.10) 的解，代入方程 (1.2.10) 的边界条件，有

$$\begin{pmatrix}U_1(x_1)&\cdots&U_1(x_n)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ U_n(x_1)&\cdots&U_n(x_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{c}_1\\ \vdots\\ \bar{c}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},\tag{1.2.12}$$

故 BVP(1.2.10) 有解的条件是

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}U_1(x_1)&\cdots&U_1(x_n)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ U_n(x_1)&\cdots&U_n(x_n)\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}U_1(x_1)&\cdots&U_1(x_n)&\eta_1\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ U_n(x_1)&\cdots&U_n(x_n)&\eta_n\end{pmatrix}.\tag{1.2.13}$$

设 $\widehat{x}(t)$ 是 BVP(1.2.9) 中微分方程的一个特解，则其通解是

$$x(t)=\sum_{l=1}^{n}\widehat{c}_l x_l(t)+\widehat{x}(t),\tag{1.2.14}$$

代入方程 (1.2.9) 中的边界条件，得

$$\begin{pmatrix}U_1(x_1)&\cdots&U_1(x_n)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ U_n(x_1)&\cdots&U_n(x_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{c}_1\\ \vdots\\ \widehat{c}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-U_1(\widehat{x})\\ \vdots\\ -U_n(\widehat{x})\end{pmatrix}\tag{1.2.15}$$

有解的条件是

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}U_1(x_1)&\cdots&U_1(x_n)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ U_n(x_1)&\cdots&U_n(x_n)\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}U_1(x_1)&\cdots&U_1(x_n)&U_1(\widehat{x})\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ U_n(x_1)&\cdots&U_n(x_n)&U_n(\widehat{x})\end{pmatrix}.\tag{1.2.16}$$