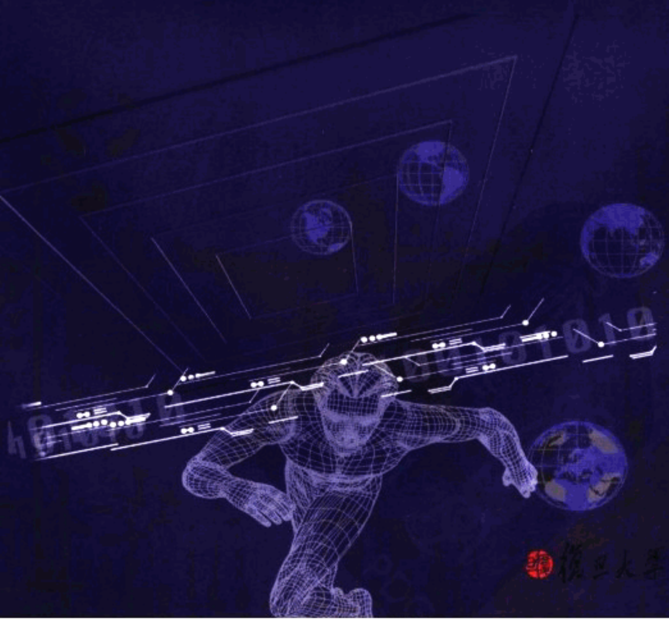
新锐丛书

21世纪高等学校教材

线性代数学习指导

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

主　编　赵雨清　吴建国



复旦大学出版社

内 容 简 介

本书是《线性代数》的配套学习指导用书，根据高等学校基础理论教学"以应用为目的，以必须够用为度"的原则，按照国家教委制定的《线性代数课程教学基本要求》而编写的.

全书共七章，包括 n 阶行列式、矩阵、向量组与矩阵的秩、线性方程组、特征值与二次型、线性空间与线性变换、λ-矩阵. 每章包括三大部分：1. 内容提要（定义、推论、定理等）；2. 典型范例与习题选解；3. 研考题.

本书可作为理工科大学及高等专科院校的数学教材辅导书或参考书，也可供综合性大学和高等师范院校非数学专业及各类成人教育的师生使用.

前　言

数学是一门重要而应用广泛的学科，被誉为锻炼思维的体操和人类智慧之冠上最明亮的宝石. 不仅如此，数学还是各类科学和技术的基础，它的应用几乎涉及所有的学科领域，它对于世界文化的发展有着深远的影响. 高等学校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设也就具有特别重要的意义.

近年来，随着我国经济建设与科学技术的迅速发展，高等教育进入了一个飞速发展时期，突破了以前的精英式教育模式，正逐步发展成为一种在终身学习的大背景下极具创造和再创性的基础学科教育. 高等学校教育教学观念不断更新，教学改革不断深入，办学规模不断扩大，数学课程开设的专业覆盖面也不断增大. 为了适应这一发展需要，经众多高校的数学教师多次研究讨论，联合编写了一套高质量的高等学校非数学类专业的数学系列教材.

本书是《线性代数》的配套学习指导用书，根据高等学校基础理论教学"以应用为目的，以必须够用为度"的原则，按照国家教委制定的《线性代数课程教学基本要求》而编写的. 可作为理工科大学及高等专科院校的数学教材辅导书或参考书，也可供综合性大学和高等师范院校非数学专业及各类成人教育的师生使用.

全书共七章，包括 n 阶行列式、矩阵、向量组与矩阵的秩、线性方程组、特征值与二次型、线性空间与线性变换、λ-矩阵. 书中定义、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性.

每章包括三大部分内容：

一、主要内容

概括基本定义、基本定理和主要内容，突出表现重点、难点，并加以分析.

二、典型范例与习题选解

例题涉及内容广、类型多、技巧性强，旨在提高分析能力，掌握基本概念和理论，开拓解题思路，熟练掌握解题技巧，加深对数学理论知识的理解和应用. 针对《线性代数》教材中的习题，几乎给出了全部的解，方便读者对照和分析.

三、研考题

列出历届研究生升学考试中的经典题目和题型，并做出详尽的讲解和分析，帮助读者理清思路，锻炼读者的逻辑思维能力，为准备考研的读者提供训练的精华.

本书由赵雨清、吴建国主编，参加讨论和编写的人员有王志福、汤四平、吴建国、赵雨清、郭安学、聂大陆.由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大使用者提出批评和建议.

编　者

2007 年 1 月

目　录

第一章　n阶行列式

一、主要内容

§1　全排列及逆序数

定义 1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列(简称排列).

定义 2　在一个排列中,如果两个数(称为数对)的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么称它们构成一个逆序(反序).一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.

一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

定义 3　逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

§2　行列式的定义

定义 4　n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示数字 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列,J 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,即求 $n!$ 项之和.每一项是由不同行不同列的 n 个元素相乘.

另外,行列式亦可定义为:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 S 与 T 分别是 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数，或

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{I}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

其中 I 为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数.

§3 对 换

定义 5 排列中，将某两个数对调，其余的数不动，这种对排列的变换叫做对换，将相邻两数对换，叫做相邻对换（邻换）.

主要结论：

(1) 对换改变排列的奇偶性.

(2) 在全部 n 级排列中，偶排列和奇排列各占一半，都是 $\frac{n!}{2}$ 个（$n\geqslant 2$）.

(3) 任意一个 n 级排列都可以经过一些对换变成自然顺序，而且所作对换的次数与这个排列具有相同的奇偶性.

§4 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D'$.

此性质说明行列式中行、列地位的对称性，由此可知行列式中有关行的性质对列也同样成立.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式反号.

推论 若行列式有两行（列）元素对应相等，则行列式为零.

性质 3 行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

第 i 行（列）乘以数 k，记作 $r(i(k))[c(i(k))]$.

此性质称为行列式的单行（列）因子可提性，说明行列式中某行（列）各元

素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4　行列式中若有两行元素对应成比例,则此行列式为零.

性质 5　若行列式的某行(列)的元素都是两个数之和,则此行列式就等于两个新行列式的和.例如:

若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

此性质可以推广到某一行(列)为多组数的和的情形.

性质 6　把行列式某一行(列)的元素乘以数 k,加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

例如,以数 k 乘以第 i 行上的元素加到第 j 行对应元素上,记作 $r[j+i(k)]$,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r[j+i(k)]}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{j1}+ka_{i1}) & (a_{j2}+ka_{i2}) & \cdots & (a_{jn}+ka_{in}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \neq j).$$

§5 行列式的计算

行列式按行(列)展开定理:

行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

综合上述展开定理及其推论得到代数余子式的重要性质:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D & \text{当 } i = j, \\ 0 & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D & \text{当 } i = j, \\ 0 & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

拉普拉斯展开定理 设 D 是一个 n 阶行列式,由 D 中取定的 k 行、k 列交叉处各元素按原相对位置构成的行列式称为 D 的一个 k **阶子式**,记它为 N. 由 D 中去掉 k 阶子式 N 所在行和列后剩下的元素按原相对位置构成的 $(n-k)$ 阶行列式称为 N 的**余子式**,记为 M. 若构成 N 的行指标分别为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$,列指标分别为 $j_1, j_2, \cdots, j_k$,则称

$$A = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}M$$

为 N 的**代数余子式**.

拉普拉斯展开定理 行列式等于其任意 k 行(列)中一切 k 阶子式与其代

数余子式乘积之和.

设行列式 D 中任意 k 行(列)构成的一切 k 阶子式分别为 $N_1,N_2,\cdots,N_s$，它们对应的代数余子式分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_s$，则

$$D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_sA_s.$$

特别地，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \boldsymbol{O} & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

§6　克莱姆法则

克莱姆法则　如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-1}$$

的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中的第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由克莱姆法则可得到以下结论：

(1) 如果线性方程组(1-1) 的系数行列式 $D \neq 0$,则方程组(1-1) 一定有解,且解是唯一的.

(2) 如果线性方程组(1-1) 无解,或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零($D = 0$).

(3) 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1-2}$$

的系数行列式不等于零,则齐次线性方程组(1-2) 没有非零解.

(4) 如果齐次线性方程组(1-2) 有非零解,则齐次线性方程组(1-2) 的系数行列式必为零.

基本要求:掌握行列式的定义,熟知行列式的性质,并能熟练地运用它们;理解行列式的展开定理以及余子式、代数余子式的概念,能熟练地按行(列)展开行列式;会利用行列式的定义、性质,展开定理和用数学归纳法证明一些简单问题;掌握计算 n 阶行列式的一般方法,了解计算行列式的一些常用技巧,能熟练地计算一些简单的 n 阶行列式;了解某些典型类型行列式的计算方法和结论;理解克莱姆法则,并能够应用它来解线性方程组和简单的几何问题.

重点与难点:n 阶行列式的计算是本章的重点. n 阶行列式的定义与计算是本章的难点.

二、典型范例与习题选解

(一) 排列的逆序数的计算

求排列的逆序数的方法:设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为 n 个自然数的一个排列,如果比 j_i 小且排在 j_i 后面的数有 t_i 个,($i = 1,2,\cdots,n$),则 j_i 这个元素的逆序数是 t_i,全体元素的逆序数的总和就是这个排列的逆序数,即 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$.

例 1.1 计算下列排列的逆序数,并讨论其奇偶性:

(1) $n(n-1)\cdots 21$;

(2) $2k1(2k-1)2\cdots(k+1)k$.

解　(1) $$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{(n-1)+1}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

显然,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,这个排列是偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,这个排列是奇排列.

(2) $$\tau(2k1(2k-1)2\cdots(k+1)k)=(2k-1)+(2k-3)+(2k-5)+\cdots+1=\frac{(2k-1)+1}{2}\cdot k=k^2.$$

显然,当 k 为奇数时,这个排列是奇排列;当 k 为偶数时,这个排列为偶排列.

例 1.2　选择 j 与 k,使

(1) $24j157k98$ 为偶排列;

(2) $1j25k4897$ 为奇排列.

解　(1) 在排列 $24j157k98$ 中缺数码 3,6,若令 $j=6,k=3$,得 246157398,此排列逆序数为 9,故为奇排列.但由于对换改变排列的奇偶性,故将上面排列中的 6 与 3 对换,即取 $j=3,k=6$,得 243157698 为偶排列.

(2) 方法同上,当 $j=3,k=6$ 时,$1j25k4897$ 即 132564897 为奇排列.

例 1.3　假设 n 个数码的排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数是 k,那么,排列 $i_n,i_{n-1},\cdots,i_2,i_1$ 的逆序数是多少?

解　因 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中任意一对数 i_p,i_q 在排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 与 $i_n,i_{n-1},\cdots,i_1$ 中的前后位置恰好相反,所以如果数对 i_p,i_q 在排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中构成一个逆序,在排列 $i_n,i_{n-1},\cdots,i_1$ 中就不构成逆序,从而每一数对 i_p,i_q 在这两个排列中的逆序数的和为 1.

由于在 n 级排列中不同的数对 i_p,i_q 共有 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ 个,而每一 n 级排列的逆序数又是 C_n^2 个数对所成的逆序数的和.故排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数与排列 $i_n,i_{n-1},\cdots,i_1$ 的逆序数的和为$\frac{n(n-1)}{2}$.于是,如果排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数为 k,则排列 $i_n,i_{n-1},\cdots,i_1$ 的逆序数为$\frac{n(n-1)}{2}-k$.

（二）行列式的计算与证明

1. 利用行列式的定义计算或证明行列式

例 1.4 利用行列式的定义计算下列各行列式：

(1) $D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(2) $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解 (1) 由行列式的定义知

$$D_5 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

因为 $a_{11} = a_{14} = a_{15} = 0$，所以非零元素中 j_1 就只能取 2，3.

因为 $a_{41} = a_{44} = a_{45} = 0$，所以非零元素中 j_4 就只能取 2，3.

同理，j_5 也只能取 2，3.

又因为 j_1, j_4, j_5 各不相同，故 $a_{1j_1}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$ 中至少有一个要取 0，于是有 $D_5 = 0$.

(2) D_n 中只有 n 个非零元素，且分布在不同行不同列，因此在行列式定义中的 $n!$ 项中只有一项不为零，故

$$D_n = (-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,3,2,1,n)} a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{n-1,1} a_{nn},$$

又 $\tau(n-1, n-2, \cdots, 3, 2, 1, n) = (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 + 0$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

故 $$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!.$$

此题还可以利用行列式的展开定理进行计算，见例 1.18(3).

例 1.5 已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

试求 $f(x)$ 中 x^4 的系数.

解 $f(x)$ 中含 x 为因子的元素有

$$a_{11}=-x,a_{21}=x,a_{23}=2x,a_{32}=x,$$
$$a_{35}=3x,a_{44}=x,a_{52}=-7x.$$

因而,含 x 为因子的元素 a_{ij_i} 的列下标只能取:

$$j_1=1;j_2=1,3;j_3=2,5;j_4=4;j_5=2.$$

于是,含 x^4 的项中元素 a_{ij_i} 的列下标只能取 $j_1=1,j_2=3,j_3=2,j_4=4$ 与 $j_2=1,j_3=5,j_4=4,j_5=2$;相应的五元排列只有 13245 与 31542,含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{\tau(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,$$
$$(-1)^{\tau(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4,$$

故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

例 1.6 证明:在一个 n 阶行列式中,如果等于零的元素个数大于 n^2-n,那么这个行列式等于零.

证 因为 n 阶行列式中共有 n^2 个元素,等于零的元素的个数大于 n^2-n,则不等于零的元素的个数小于 n. 又因为行列式的 $n!$ 项中,每项都是取自不同行不同列的 n 个元素之积,所以这 n 个元素中至少有一个为零. 因而每一项均为零,故行列式等于零.

小结 对于含零元素较多的行列式可用定义进行计算或证明,因行列式的项中有一因数为零时,该项的值为零,故只需求出所有非零项即可. 常用下述两种方法求出所有非零项:

(1) 求出位于不同行,不同列的非零元素乘积的所有项(如例 1.4(2),例 1.6,教材习题一,5).

(2) 求出非零元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 级排列,即可求出行列式的所有非零项(如例 1.4(1),例 1.5).

2. 利用行列式的性质计算或证明行列式

这是计算或证明行列式的重要方法,关键是要根据行列式的特点,灵活运

用性质.这需要多观察、多思考、多练习,注意从范例中得到启发.

例 1.7 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$;

(2) $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

解 (1) 把行列式的每一列都写成两列之和,利用性质(5)把行列式拆成 2^3 个行列式,其中 6 个都有两列元素成比例,因而为零,只留下两个行列式,故

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (a^3+b^3)(3xyz - x^3 - y^3 - z^3).$$

(2) $n=1$ 时,$D_1 = a_1 + b_1$;

$n=2$ 时,$D_2 = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$;

$n>2$ 时,利用性质(5)把 D_n 拆成 2^n 个行列式的和,其中每个行列式均含有成比例的两列,因此 $D_n = 0$.

综上,
$$D_n = \begin{cases} a_1 + b_1 & n = 1, \\ (a_1 - a_2)(b_2 - b_1) & n = 2, \\ 0 & n > 2. \end{cases}$$

另解 $n>2$ 时,

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1}+b_1 & a_{n-1}+b_2 & \cdots & a_{n-1}+b_n \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

将 D_n 的第 1 到 $n-1$ 行的每一行都减去它下面的相邻行后,得