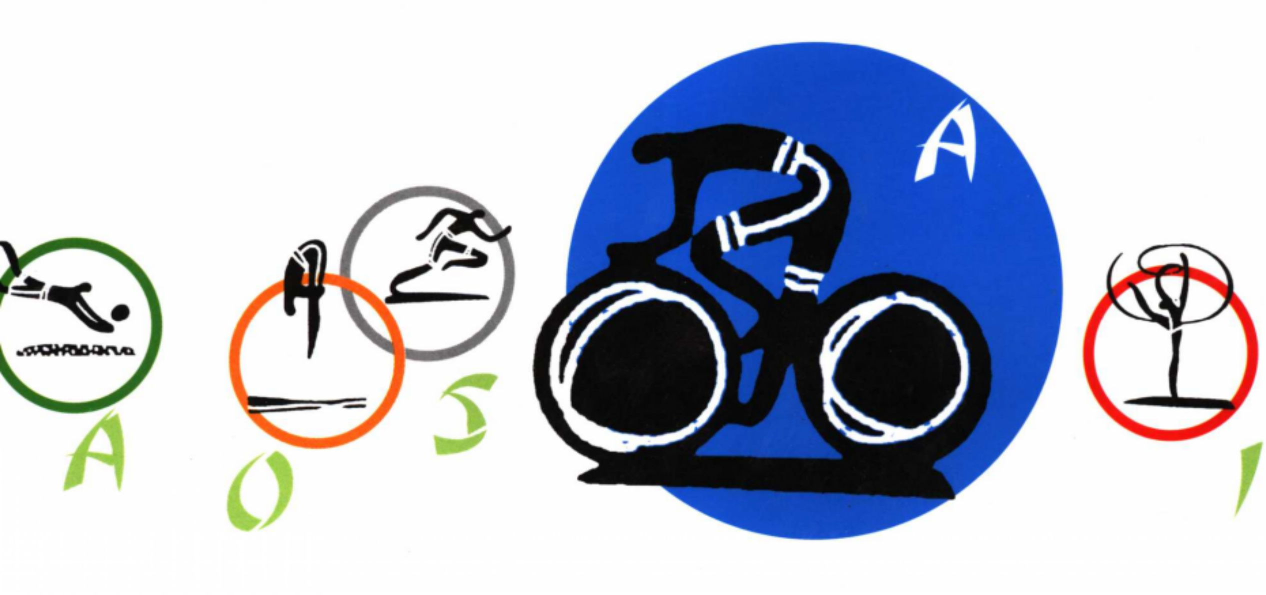
国际奥赛金牌教练＋
国家奥赛命题研究专家
联袂编写

科学技术文献出版社

金牌奥赛高级教程

初二数学

·修订版·



JINPAI AOSAI CONGSHU

金牌奥赛高级教程 **初一数学** ·修订版·

金牌奥赛高级教程 **初二数学** ·修订版·

金牌奥赛高级教程 **初三数学** ·修订版·

金牌奥赛高级教程 **初二物理** ·修订版·

金牌奥赛高级教程 **初三物理** ·修订版·

金牌奥赛高级教程 **初中化学** ·修订版·

ISBN 978-7-5023-4796-3

9 787502 347963 >

定价:25.00元

封面设计 张宇澜

金牌奥赛

金牌奥赛高级教程

初二数学

（修订版）

总主编：耿立志　全国中学奥林匹克竞赛金牌教练
中科国际奥赛研究中心执行主任
国家首批骨干教师、全国特级教师

总审定：王永胜　中学奥林匹克竞赛研究专家
教育部新课程标准研制专家
重点大学教授、博士生导师

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

金牌奥赛高级教程. 初二数学(修订版)/马玲坤等主编. -北京:科学技术文献出版社,2008. 2

(金牌奥赛)

ISBN 978-7-5023-4796-3

Ⅰ. 金… Ⅱ. 马… Ⅲ. 数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 098185 号

出　版　者	科学技术文献出版社
地　　　址	北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话	(010)51501739
图书发行部电话	(010)51501720,(010)51501722(传真)
邮 购 部 电 话	(010)51501729
网　　　址	http://www.stdph.com

E-mail: stdph@istic.ac.cn

策 划 编 辑	科　文
责 任 编 辑	周　玲
责 任 校 对	赵文珍
责 任 出 版	王杰馨
发　行　者	科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印　刷　者	北京高迪印刷有限公司
版 (印) 次	2008 年 2 月第 2 版第 1 次印刷
开　　　本	787×1092　16 开
字　　　数	451 千
印　　　张	19.5
印　　　数	1～8000 册
定　　　价	25.00 元

(京)新登字 130 号

《金牌奥赛——高级教程》编委会

《金牌奥赛——高级教程》

前　言

随着我国中学《新课程标准》的实施，教育改革的力度在不断加大，原有的初级中学奥林匹克竞赛辅导教材越来越不能满足学生学习的需要。应广大教师、家长和学生的要求，由中学新课程标准"十五规划"国家级教育科研项目研究专家主持，由北京、上海、湖南、河北4省市6所著名重点中学的特级教师和奥赛高级教练担任主编，精心编著了《初级中学——金牌奥赛高级教程》丛书。包括数学、物理、化学3个学科，共6个分册，涵盖中考和奥赛的全部重点内容。适应全国各种版本教材。

丛书的特点是：

名师权威编著，内容严谨科学

丛书作者由参加奥赛一线辅导的国家级教练及主持中考命题研究的特级教师组成。根据国家"十五规划"教育科研课题《研究性学习与奥林匹克竞赛的有效整合》的研究成果，参考全国奥林匹克竞赛规程，对最新考试内容进行标准解读与科学诠释。

优化学习方法，突出奥赛热点

丛书主编遵从科学的认知规律，注重学习目标的有效实施，充分挖掘学生的潜能，优化学习方法。善于激活学生的思维，有目的有针对性地精选奥赛典型例题进行剖析，并配套延伸拓展训练题，培养学生的解题方法和技巧，准确把握考试热点。

中考奥赛衔接,打造培优宝典

丛书打破传统教辅书中竞赛与中考分离的模式的束缚,成功地将中考与竞赛结合在一起,采用“1+1”的编写模式,形成了“中考点击”与“奥赛拓展”相关联的独特体系。是全国第一部将奥赛与中考有效整合,并经实践证明既适合奥赛又适合中考的培优宝典。

注重精讲精练,强化高效实战

丛书中每一道试题的编制和确定都经过多道关卡,即从作者编著、主编总纂到编辑审读、状元验题、专家审定,层层把关。因而达到了题题新颖、题题规范、题题经典、题题实战。

愿此书成为初中学子打开著名重点高中的金钥匙!

丛书编委会

2007年12月于清华园

目　录

第一篇　几何部分

第二篇　代数部分

第一篇

几何部分

第一章　三角形

目标菜单

【基础目标】

1. 理解三角形及有关概念，掌握三角形边角关系定理及推论。
2. 理解三角形全等的概念，掌握全等三角形的性质和判定两个三角形全等的方法。
3. 掌握等腰三角形的性质和判定。
4. 掌握直角三角形的性质、勾股定理及其逆定理，掌握线段垂直平分线、角平分线的性质定理及其逆定理。
5. 掌握和应用轴对称及轴对称图形的概念和性质。
6. 理解尺规作图的意义，会作一些简单图形。

【拓展目标】

1. 通过对全等三角形和等腰三角形的学习，学会证明线段相等、角相等以及线段的和、差、倍、分的证明方法。
2. 培养学生的推理论证能力、逻辑判断能力、识图能力和抽象思维能力。
3. 学会基本的几何证题方法和有关的数学思想。
4. 掌握基本作图的原理和技巧，为以后的制图应用奠定基础。

备考链接

【中考点击】

1. 知识结构

本章主要内容之间的联系如下：

- 三角形
  - 三角形的概念
    - 定义,有关符号
    - 三角形的主要线段
    - 一般性质
      - 三边的关系
      - 三内角关系
      - 外角和内角关系
    - 三角形的分类
      - 按边长分
      - 按角大小分
  - 全等三角形
    - 全等三角形定义,表示为“≌”
    - 全等三角形的性质
      - 对应角相等
      - 对应边相等
    - 全等三角形的判定
      - 边角边公理(*SAS*)
      - 角边角公理(*ASA*)
      - 角角边推论(*AAS*)
      - 边边边公理(SSS)
      - 直角三角形斜边、直角边公理(*HL*)
    - 角平分线
      - 定理
      - 逆命题、逆定理
  - 特殊三角形
    - 等腰三角形
      - 性质、判定定理
      - 轴对称图形
      - 线段垂直平分线
    - 直角三角形 —— 勾股定理
  - 尺规作图
    - 基本作图
    - 作图题举例

2. 重点、难点

① 理解三角形的概念,三角形的顶点、边、内角、外角、角平分线、中线和高线等概念。

② 理解三角形两边之和大于第三边,两边之差小于第三边的性质,判断已知三条线段能否构成三角形时,一定要注意到任意两条线段的和都大于第三条线段,才能判定这三条线段能构成三角形。(一般可利用两条较小的边与最大的边进行比较)

③ 全等三角形对应的角相等,对应的边相等,对应的角平分线、中线、高线相等,全等三角形面积相等。

④ 写两个三角形全等时,通常要把对应的顶点写在对应的位置上。通常,在两个全等三角形中,相等的边是对应边,相等的角是对应角,对顶角是对应角,公共边是对应边,公共角是对应角,对应角的对边是对应边,对应边的对角是对应角,两个对应角所夹的边是对应边,两个对应边所夹的边是对应角,两个全等三角形中最大的边(或最大的角)是对应边(或对应角)。

⑤ 应用第一个判定公理时,一定要注意:必须是对应的两边及两边的夹角相等。

⑥ 证明两个三角形全等的思路是:首先分析条件,观察已经具备了什么条件;然后以

已具备的条件为基础，根据全等三角形的判定方法，来确定还需要证明哪条边或角对应相等，再设法证明这些边或角相等。

⑦ 全等变换

两个全等三角形的全等形式一般有三种：

● **平移变换**：把图形沿某直线平行移动的变换方式叫做平移变换。

● **对称变换**：将图形沿某直线翻转 180° 变换方式叫做对称变换。

● **旋转变换**：将图形绕某点旋转一定的角度到另一位置的变换方式叫做旋转变换。

⑧ 直角三角形是特殊的三角形。所以，三角形的判定方法对直角三角形同样适用，但要注意：斜边、直角边公理只适用于直角三角形。

⑨ 等腰三角形的性质：

● 等腰三角形的两个底角相等。（等边对等角）

● 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高线互相重合。（三线合一）

● 二倍角性质：顶角的外角是底角的 2 倍，顶角是腰上的高线与底边夹角的 2 倍。

⑩ 等腰三角形的判定：可根据定义，证明两边相等；利用等角对等边；运用三角形中一角的平分线、其对边上的中线和高线三条线段中，任意两条重合，则此三角形为等腰三角形；还可以利用“角平分，等腰成”即角平分线加上平行线一定可以得到等腰三角形。

⑪ 依据等腰三角形的相关知识，可以解决直线的垂直关系，线段相等问题和角相等问题。

⑫ 线段的垂直平分线可以看作是到线段的两个端点距离相等的所有点的集合；角平分线可以看作是到角的两边距离相等的点的集合。它们的区别是：一个是点到点的距离，一个是点到线的距离。

【奥赛拓展】

1. 证明两个线段相等的一般方法

① 证明线段所在的两个三角形全等。

② 在同一个三角形中证明等角对等边。

③ 证明线段的垂直平分线。

④ 借助中间的等量进行等量代换。

⑤ 利用等式的性质证线段的和、差、倍、分。

2. 证明两个角相等的一般方法

① 证明角所在的两个三角形全等。

② 在同一个三角形中证明等边对等角。

③ 利用平行线间的同位角、内错角。

④ 利用角平分线的判定定理。

⑤ 借助中间的等量进行等量代换。

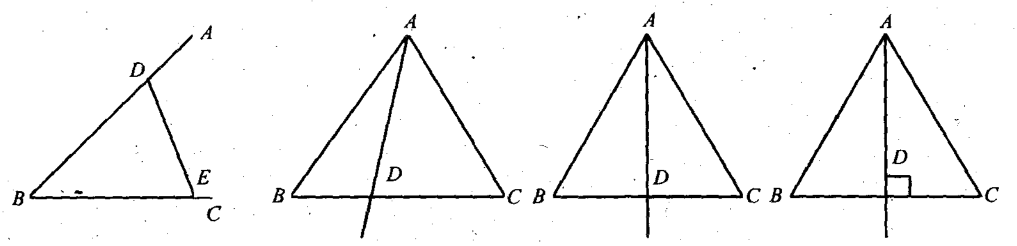
⑥ 利用等式的性质证角的和、差、倍、分。

3. 证明线段的和的方法一般是延长法,证明线段的差的方法一般是截取法。

题型扫描

【基础示例】

例 1 下列说法中正确的是(　　)



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

A. 如图(a),由 AB、BC、DE 三条线段组成的图形是三角形

B. 如图(b),已知 $\angle BAD = \angle CAD$,则射线 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线

C. 如图(c),已知点 D 为 BC 边中点,则线段 AE 为 $\triangle ABC$ 的中线

D. 如图(d),已知 $\triangle ABC$ 中,$AD \perp BC$ 于 D,则线段 AD 为 $\triangle ABC$ 的高

分析:A. 由三角形的定义知:AB、BC、DE 没有按首尾顺次相接,故不是三角形。

B. 三角形的角平分线是线段而不是射线,故错误。

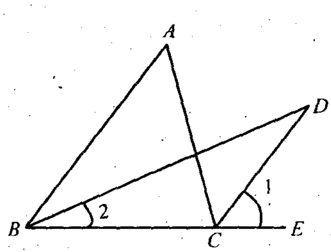
C. 三角形的中线是指以三角形的一个顶点和它的对边中点为端点的线段,应为 AD,E 不是 BC 中点,故错误。

D. 满足三角形的高线定义。

答案:D

例 2 已知:BD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线,CD 为 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACE$ 的平分线,它与 BD 的延长线交于 D。

求证:$\angle A = 2\angle D$



分析:已知 BD、CD 分别为 $\triangle ABC$ 的内角、外角平分线,可利用外角与内角的关系证题。可得 $\angle D = \angle 1 - \angle 2$,$\angle A = \angle ACE - \angle ABC = 2(\angle 1 - \angle 2)$,所以,$\angle A = 2\angle D$,问题得证。

证明:$\because$ BD、CD 分别为 $\angle ABC$、$\angle ACE$ 的平分线(已知)

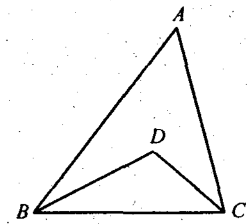
$\therefore \angle ACE = 2\angle 1$,$\angle ABC = 2\angle 2$(角平分线定义)

$\because \angle A = \angle ACE - \angle ABC$,$\angle D = \angle 1 - \angle 2$(三角形的一个外角等于和它不相邻的

两内角和)

$\therefore \angle A = 2\angle 1 - 2\angle 2 = 2(\angle 1 - \angle 2) = 2\angle D$

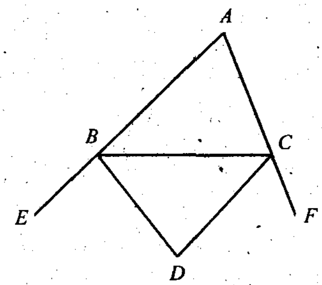
说明:由结论得:三角形的一个外角平分线与一个内角平分线相交所成的角等于第三个内角的一半。



知识扩展:

(1) 三角形的两个内角平分线相交所成的角等于 90° 加上第三角的一半。

如右图,BD、CD 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$,则有:$\angle BDC = 90° + \angle A/2$



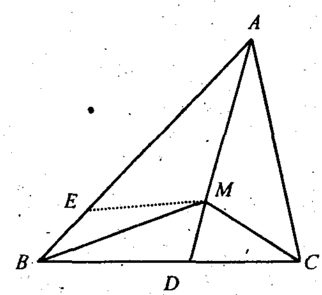
(2) 三角形的两个外角平分线相交所成的角等于 90° 减去第三角的一半。

如右图,BD、CD 分别平分 $\angle EBC$、$\angle FCB$,则有:$\angle BDC = 90° - \angle A/2$

(请同学们参照例题自己证明)

例 3　已知:AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,$AB > AC$,M 在 AD 上。

求证:$MB - MC < AB - AC$



分析:此题要证明的是线段的不等关系,证明线段的不等关系应利用三角形的三边关系,而三角形的三边关系的定理和推论叙述的分别是两边和或差与第三边的不等关系,根据求证应选择推论"三角形两边之差小于第三边"。所以,应将右边的"$AB - AC$"用一条线段表示出来,表示线段的差应采取"截取法"即在较长的线段上截取较短的线段。所以,在 AB 边上截取 $AE = AC$,得 $BE = AB - AC$。在 $\triangle EBM$ 中可知,$MB - ME < BE$,故证明 $ME = MC$ 则此题得证。

证明:在 AB 边上截取 $AE = AC$,连接 ME。

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线(已知)

$\therefore \angle EAM = \angle CAM$(角平分线定义)

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle ACM$ 中

$$\begin{cases} AE = AC(\text{辅助线作法}) \\ \angle EAM = \angle CAM(\text{已证}) \\ AM = AM(\text{公共边}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEM \cong \triangle ACM(SAS)$

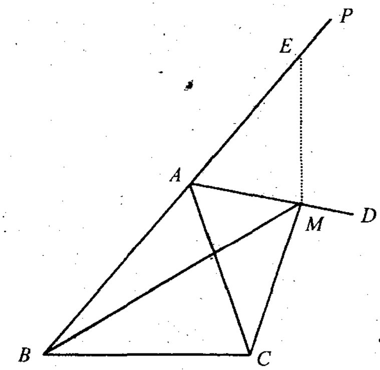
$\therefore ME = MC$(全等三角形的对应边相等)

在 $\triangle EBM$ 中,$MB - ME < BE$(三角形两边之差小于第三边)

$\therefore MB - MC < AB - AC$

说明:证明线段的不等关系一般采用的是三角形的三边关系,若是和的大小关系则采用三边关系定理,若是差的关系则采用三边关系推论。

思考:已知,AD 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线,M 在 AD 上。

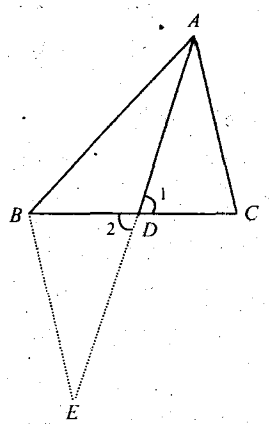


求证:$MB + MC > AB + AC$

(提示:相对于例题,该题要求证明的是线段和的不等关系,应选择三边关系定理,将 $AB + AC$ 用一条线段表示出来,表示两边之和应采用"延长法"即在一条线段的延长线上截取另一条线段。如在 BA 的延长线上截取 $AE = AC$,证明 $MC = ME$ 即可)

小结:当题目中有角平分线时,常考虑在角的两边截取相等的线段,构造全等三角形。该辅助线的作法可称为"截长补短法":截长法是在较长的线段上截取一条较短线段,补短法则是延长较短的线段与较长线段相等。

例 4　**已知**:如右图,AD 为 $\triangle ABC$ 的中线。



求证:$AB + AC > 2AD$

分析:要证 $AB + AC > 2AD$,仍是线段不等的关系,采用三角形三边关系定理,需将 $2AD$ 用一条线段表示,即加倍延长 AD。

证明:延长 AD 至 E,使 $DE = AD$,连接 BE。

$\because AD$ 为 $\triangle ABC$ 的中线(已知)

$\therefore BD = CD$(中线定义)

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle EBD$ 中

$$\begin{cases} CD = BD(\text{已证}) \\ \angle 1 = \angle 2(\text{对顶角相等}) \\ AD = ED(\text{辅助线作法}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle EBD(SAS)$

$\therefore CA = BE$(全等三角形对应边相等)

$\because$ 在 $\triangle ABE$ 中,$AB + BE > AE$(三角形两边之和大于第三边)

$\therefore AB + AC > 2AD$.

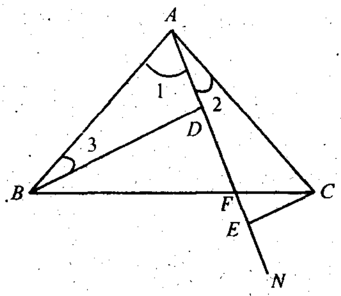
说明:当题目中有线段中线时,常常加倍延长中线构造对顶全等三角形,实现等量代换。

例 5　**已知**:在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,$\angle BAC = 90°$,过 A 的任一条直线 AN,交 BC

于 F,过点 B 作 $BD \perp AN$,垂足为 D,过点 C 作 $CE \perp AN$,垂足为 E。

求证: $DE = BD - CE$

分析: 题中要证 $DE = BD - CE$,而 $DE = AE - AD$,所以,只要证明 $BD = AE$,$AD = CE$ 即可,这样问题就变成了证明 $\triangle ABD \cong \triangle CAE$。



证明: $\because \angle BAC = 90^\circ \quad BD \perp AN$(已知)

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ \quad \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$

$\therefore \angle 2 = \angle 3$

$\because BD \perp AN \quad CE \perp AN$(已知)

$\therefore \angle BDA = \angle AEC = 90^\circ$(垂直定义)

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CAE$ 中

$\begin{cases} \angle BDA = \angle AEC(\text{已证}) \\ \angle 2 = \angle 3(\text{已证}) \\ AB = AC(\text{已知}) \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE(AAS)$

$\therefore BD = AE, AD = CE$(全等三角形对应边相等)

$\therefore DE = BD - CE$

注意: 在一个三角形中,有多个垂直关系时,通常利用"同角(等角)的余角相等"的性质证明问题。

例 6　已知: 点 A、B、C 在同一直线上,以线段 AB、BC 为边在直线的同侧作等边三角形 ABD 和等边三角形 BCE,连接 AE、DC。

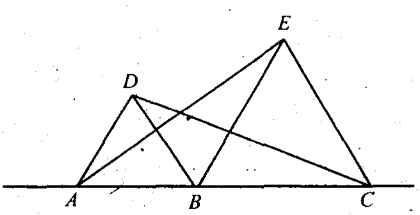
求证: $AE = DC$

分析: 观察图形可以看到:AE、DC 分别在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DBC$ 中,因此,证 $AE = DC$,实际上就是证明 $\triangle ABE \cong \triangle DBC$。

证明: $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 是等边三角形

$\therefore AB = BD \quad BE = BC$

$\angle ABD = \angle CBE = 60^\circ$(等边三角形的三边相等,三个内角都等于 60°)



$\therefore \angle ABE = \angle DBC$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DBC$ 中

$\begin{cases} AB = BD(\text{已证}) \\ \angle ABE = \angle DBC(\text{已证}) \\ BE = BC(\text{已证}) \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DBC(SAS)$

$\therefore AE = DC$(全等三角形对应边相等)

思考: 在此图中,若 DC 与 AE 交于点 M,AE 与 BD 交于点 H,CD 与 BE 交于点 F,连接 HF。则还存在哪些结论?并证明你的结论。