NEW Sunshine

新阳光™解题方法

高考数学

解题方法与点拨

只有掌握正确的解题方法 考试才能取得高分

请认准防伪标志

《新阳光解题方法》编委会 编

北京出版社出版集团
北京教育出版社

NEW Sunshine

新阳光

新阳光™解题方法

本书主编：林　风

高考数学

解题方法与点拨

只有掌握正确的解题方法　考试才能取得高分

《新阳光解题方法》编委会　编

总 主 编：李振顺

编　　委：邓　霞　方彦进　张少玉
林　风　郑上殷　林光敏
林建基　范畅和　梁长弟
陶鸿飞　蒋绍红　程保权
蔡光亮

北京出版社出版集团
北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学解题方法与点拨/《新阳光解题方法》编委会编.
—北京：北京教育出版社，2006
（新阳光解题方法）
ISBN 7-5303-5203-2
Ⅰ.高… Ⅱ.新… Ⅲ.数学课—高中—解题—升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 050746 号

新阳光解题方法
高考数学解题方法与点拨
GAOKAO SHUXUE JIETI FANGFA YU DIANBO
《新阳光解题方法》编委会 编
本书主编：林　风
*
北京出版社出版集团
北 京 教 育 出 版 社　出版
（北京北三环中路 6 号）
邮政编码：100011
网　　址：www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新 华 书 店 经 销
北京秋豪印刷有限责任公司印刷
*
880×1 230　32 开本　22.75 印张　890 千字
2006 年 7 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—12 050

ISBN 7-5303-5203-2/G·5122

定价：27.00 元
质量投诉电话：010-58572245　58572393

前言

随着国家基础教育课程改革的深入发展，新的教育理念、新的数学观念正不断丰富和充实着高中数学教学. 本书按照源于教材又高于教材的原则，依据国家教育部颁布的现行高中数学大纲和高考数学大纲进行编写，对高中数学的各个数学知识点以及能力要求进行详细的、全面的分析、指导和阐述.将科学性、系统性、实用性有机地融为一体，将学习功能、辅导功能、应用功能集于一身，旨在使读者在牢固掌握基本知识、基本技能、基本思想方法的基础上举一反三、触类旁通，提高对数学知识、知识体系、思想方法的整体掌握水平，以及灵活运用知识的能力.

本书编写的主要特点

1 视角新颖、与时俱进

本书以新课程标准为依据，以新教改精神为指导，不仅关注知识和技能的介绍，而且注意将知识与技能、方法与过程、态度情感价值观的全面提升有机地融合在一起，力求体现新课程标准提出的“人人学有价值的数学，人人都能获得必需的数学，不同的人在数学上得到不同的发展”. 注意对数学的科学价值、应用价值和人文价值揭示和阐述，促进学生对数学价值的进一步理解，对数学产生积极的态度和兴趣.关注课程改革的新动向，反映数学教学改革新气象，贴近教学，贴近学生，贴近高考，重在工具性、实用性、时效性和思想性.

2 内容充实、科学实用

针对高中数学的要点、重点、难点、疑点、焦点等，分析透彻

简明，精选的范例具有典型性、示范性、思想性、时效性等特点，并难易适中、题型多样、阐述精辟.根据学生学习的特点和需要，每章按照以下四个栏目编写：一、本章要览.根据《高考数学大纲》对本章的高考要求，对本章的知识内容作一个概括性的归纳，力求使读者对知识的理解、掌握和领会比较准确到位.二、学习导航.对本章学习中常见的概念、方法和技巧作比较全面的介绍，着重指出重点、要点、难点、疑点，达到全面深入掌握知识的目的，帮助读者准确领会数学概念，提高解题技能，理解数学思想方法.三、范例精析.本栏目对精选的每个试题通过三个方面进行评析：(1)思路分析，旨在分析解题思路，提供解题策略，指点迷津；(2)过程·方法，按照解题方案，给出详细和规范的解题过程，力求使读者获得对数学学习的实践与体验；(3)点拨指导，反思解题过程，剖析解题过程，总结解题技巧、方法和思想，开启学生思路，发展数学能力.四、高考链接.精选近年来全国以及各省自主命题的优秀试题，力求通过对高考试题的分析、解答、点拨，进一步加深对高考数学大纲的理解，加深对高考各种题型的体验，提高高考应试能力.

3 系统有序、兼顾教学

本书涵盖现行高中数学教材的内容，按照高考复习的需要共分十三章进行编写，设计合理，使用方便.按知识板块构建的记忆结构网络，以利读者统览高中数学的主干知识，把握知识间的脉络和关系，形成良好的认知结构，力求做到“既见树木，又见森林”，并尽量做到多而不繁，有条不紊，章节分明，条块清晰，语言清新，用词科学，解答规范.本书可供高一、高二、高三的数学教学使用.

本书聘请一流名校第一线高三特、高级教师和教育学院的学科中心组专家撰写，书中收集大量新课改中富有创新理念的新题，许多解题方法新颖独特，其指导亦属佳作.尽管如此，本书错误和不足之处亦所难免，欢迎广大读者提出宝贵意见和建议，我们将在再版中进行修改.

目录

我们生活在受精确的数学定律制约的宇宙之中.

——爱因斯坦

第一章 集合与简易逻辑

一 本章要览

本章的主要内容是:

集合,子集,补集,交集,并集,逻辑联结词,四种命题,充要条件.

本章高考的主要要求是:

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念,了解空集和全集的意义;了解属于、包含、相等关系的意义;掌握有关术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.
2. 理解逻辑联结词"或""且""非"的含义,理解四种命题及其相互关系,掌握充要条件的意义.

近几年的高考题中,集合与简易逻辑的内容多以选择题和填空题的形式出现,含绝对值的不等式与一元二次不等式或以选择题、填空题的形式出现,或以综合题的形式出现,更多的是把它们作为一种数学工具,用以解决其他数学问题.

二 学习导航

本章主要内容是集合的初步知识和简易逻辑知识. 其中,集合的初步知识包括集合的有关概念、简单集合的表示及集合的运算;简易逻辑主要介绍逻辑联结词"或""且""非",四种命题及充要条件. 本章内容是掌握和使用数学语言的基础,是高中数学学习的新起点.

集合是一个不加定义的概念,学习中要结合自己的生活经验和已有的数学知识,深入准确地理解集合的含义. 在解题中熟悉文字语言、集合语言、图形语言各自的特点,进行相互转换并掌握集合语言. 在解决关于集合之间的关系和运算的问题时要运用维恩图.、数轴、二次函数的图象的直观性来帮助分析和理解,提高形象思维能力,进而提高抽象思维能力.

本章涉及的数学问题主要有三类:

1. **第一类**是运用集合的语言符号和"或""且""非"等逻辑联结词来解答有关集合和简易逻辑的基本概念问题.
2. **第二类**是解含绝对值不等式、一元二次不等式以及高次不等式和分式不等式.
3. **第三类**是运用二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的相互关系解决不等

式或方程中的参数问题.

在本章学习中要注意深刻理解、准确掌握集合、元素、子集、交集、并集、补集、命题、充要条件等基本概念和"或""且""非"等逻辑联结词的含义. 学习简易逻辑可以感受到逻辑在数学以及日常生活中的作用,养成言之有理、论证有据的习惯. 在《高中数学课程标准》中明确提出:"数学教育在学校教育中占有特殊的地位,它使学生掌握数学的基础知识、基本技能、基本思想,使学生表达清晰、思考有条理,使学生具有实事求是的态度、锲而不舍的精神,使学生学会用数学的思考方式解决问题、认识世界."

本章学习中要贯穿的数学思想方法主要有函数与方程思想、数形结合思想、等价转化思想、分类讨论思想、正难则反的思想、换元法、配方法、待定系数法、分析法、反证法等.

在学习中要注意以下几点:

(一) 关于集合的应用

集合及其集合的思想方法在数学中有广泛的应用,主要有以下几个方面:

1 求方程(组)、不等式(组)的解或讨论它们是否有解,有多少解等问题,就是求解集,或求各个解集的交、并、补集等问题.

2 求两条曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$的交点坐标,或讨论它们是否有公共点的问题;也就是求方程(组)的解集以及解的交、并、补集等问题.

3 求解若干个数式具有某种共同性质的问题,就是求交集问题;而将一个问题分成若干类解决,最后要求各类结果的并集.

4 许多计数问题(即计算种数、个数、方法数等),计数公式:$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$都要用到集合的交、并、补以及元素个数等知识.

(二) 关于"或""且""非"

"或""且""非"来源于生活用语,但又赋予了更加严格的数学含义.

逻辑联结词"或"一般有两种解释:一是指"不可兼有",即"p或q"是指p或q中的一个,但不是两者. 日常生活用语中,"你做或我做"的含义是"不可兼有",不会理解为你我都去做;二是"可兼有",即"p或q"是指p和q中的任何一个或两者. 数学中"$x\in A$或$x\in B$"中的或指的是:$x\in A$但$x\notin B$;$x\notin A$但$x\in B$;$x\in A$且$x\in B$.

逻辑联结词"且"就是日常生活中的和、与的含义;逻辑联结词"非"就是日常生活用语中的"否定".

(三) 关于充要条件的判断

要正确地判断充要条件,首先要确定条件和结论分别是什么,并掌握正确的判定方法. 一般地,要通过以下方法判断充要条件:

1 从定义出发,利用推出关系

判断条件⇒结论,结论⇒条件,从而根据定义判断条件是结论的什么条件.

即先由条件p出发进行推理,然后由结论q出发进行推理.

(1)若$p\Rightarrow q$,而$q\nRightarrow p$,则p是q的充分但不必要条件,而q是p的必要但不充分条件;

(2)若$p\Rightarrow q$,且$q\Rightarrow p$,则p是q的充要条件(q也是p的充要条件);

(3)若$p\nRightarrow q$,且$q\nRightarrow p$,则p是q的既不充分也不必要条件.

2 根据集合之间的包含关系

判断条件集合、结论集合之间的包含关系.

如果条件p与结论q很容易用集合来描述,则从集合思想考虑比较简单.

设$P=\{p\}$,$Q=\{q\}$,

(1)若$P\subseteq Q$,则p是q的充分但不必要条件,而q是p的必要但不充分条件;

(2)若 $P=Q$,则 p 是 q 的充要条件(q 也是 p 的充要条件);

(3)若 $P\subsetneqq Q$ 且 $Q\subsetneqq P$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

3 根据命题的等价性

根据互为逆否的两个命题同真同假去判断:

$p\Rightarrow q$ 等价于$\neg q\Rightarrow\neg p$;

$q\Rightarrow p$ 等价于$\neg p\Rightarrow\neg q$;

$p\Leftrightarrow q$ 等价于$\neg q\Leftrightarrow\neg p$.

充分条件,必要条件中的"充分""必要"两词与日常用语中的"充分""必要"意义是相近的. 充要条件,也就是日常用语中所说的"等价条件"或"当且仅当".

四 关于命题以及四种命题与充要条件的关系

1 复合命题真假的判断是学习上的难点,应从"真值表""集合""逆命题"等多个角度进行分析.

2 由简单命题构成复合命题,不一定是简单地加上"或""且""非"等逻辑联结词,另外应注意含"或""且""非"等词汇的命题也不一定是复合命题,在进行命题的合成或分解时,一定要检验是否符合复合命题的"真值表",如果不符合,要作语言上的调整.

3 命题的"否定"是学习上的重点,因为这是"反证法"证明的第一步,必须注意. 命题的"否定"与一个命题的"否命题"是两个不同的概念,对命题 p 的否定(即非 p)是否定命题 p 所作的判断,而"否命题"是对"若 p 则 q"形式的命题而言,同时否定它的条件与结论.

4 四种命题与充要条件的关系:

(1)证明原命题成立即证明条件的充分性;

(2)证明逆命题成立即证明条件的必要性;

(3)证明原命题与逆命题同时成立即证明条件的充要性.

五 关于反证法

1 反证法是一种间接证法,它是从结论的反面入手,引出矛盾,从而证明命题成立. 用反证法证明命题"若 p 则 q"时,可能出现以下三种情况:

(1)导出非 p 为真,即与原命题的条件矛盾;

(2)导出 q 为真,即与假设"非 q 为真"矛盾;

(3)导出一个恒假的命题.

2 用反证法证题的关键是"反设",对一些特殊结论的反设见下表:

原结论词	大于($>$)	小于($<$)	都是	都不是	至少 n 个	至多 n 个
反设词	不大于($\leqslant$)	不小于($\geqslant$)	不都是	至少有一个是	至多 $n-1$ 个	至少 $n+1$ 个

原结论词	有无穷多个	存在唯一的	对任意 p,使…恒成立
反设词	只有有限多个	不存在或至少存在两个	至少有一个 p,使…不成立

3 反证法证题的难点是如何引出矛盾,用反证法证明命题"若 p 则 q"时,引出矛盾的形式有下面三个方面:

(1)由假设结论 q 不成立,经过推理论证得到条件 p 不成立,即与原命题的条件矛盾,这种情况实际上是证明了命题的"逆否命题"正确;

(2)由假设结论 q 不成立,经过推理论证得到结论 q 成立,即由"非 q 为真"推出了"q 为真",形成了自相矛盾;

(3)由假设结论 q 不成立,经过推理论证得到一个恒假命题,即与某个"公理、定义、定理、性质"矛盾,或与某个显然的概念、结论矛盾.

但在实际应用时,究竟如何引出矛盾必须根据命题本身的数学内容进行探索,有时很难事先估计如何引出矛盾或是否能用反证法证明成功,正是由于这些难点,所以在高考中反证法出现的较少.

三 范例精析

例1 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$,$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$,那么 $M\cap N$ 为( )

A. $x=3,y=-1$　B. $(3,-1)$　C. $\{3,-1\}$　D. $\{(3,-1)\}$

思路分析

注意集合 M、N 的元素是实数对,以及交集运算的结果仍是集合.

过程·方法

$\because$ 集合 M、N 中的代表元素为有序实数对 (x,y),且 $M\cap N$ 运算结果是集合,经检验,只有答案 D 正确,

$\therefore$ 应选 D.

点拨指导

解答集合问题的首要任务是要明确集合的元素,因此 A、C 显然是错误的;其次要注意集合的交、并、补的运算结果是封闭的,即仍是集合,因此 B 是错误的.

例2 若 $P=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $P\cap Q$ 等于( )

A. P　B. Q　C. $\varnothing$　D. 无法计算

思路分析

分别求 P、Q 集合中对应的函数的值域.

过程·方法

P、Q 的代表元素都是 y,分别表示函数 $y=x^2$,$y=x^2+1$ 的值域,由 $P=\{y\mid y\geqslant 0\}$,$Q=\{y\mid y\geqslant 1\}$,知 $Q\subsetneqq P$,即 $P\cap Q=Q$,

$\therefore$ 应选 B.

点拨指导

明确 P、Q 两个集合的元素是数,而不是点坐标,否则容易错解为 $P\cap Q=\varnothing$.

例3 设全集为 U,在下列条件中,是 $B\subseteq A$ 的充要条件的有( )

①$A\cup B=A$,②$\complement_U A\cap B=\varnothing$,③$\complement_U A\subseteq\complement_U B$,④$A\cup\complement_U B=U$.

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

思路分析

利用维恩图,数形结合求解.

过程·方法

判断集合之间的关系时,常常借助维恩图,通过作图可以容易得出①、②、③、④都是正确的.

∴ 应选 D.

点拨指导

本题是关于 $B\subseteq A$ 的一些等价命题,熟悉这些结论对提高解题速度很有帮助.

例4 如果集合 $M=\{a^2,a+1,-3\}$,$N=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,若 $M\cap N=\{-3\}$,则 a 的值是(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

思路分析

根据 $M\cap N=\{-3\}$,得 $-3\in M$, $-3\in N$,解方程即可.

过程·方法

由题意 $a-3=-3$　①,或 $2a-1=-3$　②,或 $a^2+1=-3$　③,解①得 $a=0$,这时 $M\cap N=\{-3,1\}$ 不合题意,舍去. 解②得 $a=-1$,解③无解.

∴ 应选 A.

点拨指导

解含参数的集合问题时,对解得的参数要代入检验,检查其是否符合已知条件以及是否符合集合元素的互异性.

例5 集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则(　　)

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

思路分析

借助列举法加以筛选.

过程·方法

分别令 $k=\cdots,-1,0,1,2,3,\cdots$,得

$M=\left\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\cdots\right\}$,$N=\left\{\cdots,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\cdots\right\}$,易见 $M\subsetneqq N$.

∴ 应选 B.

点拨指导

本题也可以根据集合元素的性质求解，即 $M=\left\{x\left|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right.\right\}=\left\{x\left|x=\frac{(2k+1)\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$N=\left\{x\left|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right.\right\}=\left\{x\left|x=\frac{(k+2)\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，只要对 $\frac{2k+1}{4}$ 和 $\frac{k+2}{4}$ 进行比较就知道应选 B.

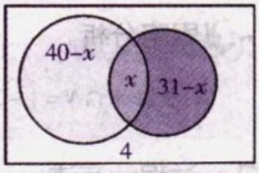
例6 已知 50 名学生参加跳远和铅球两项检测，跳远和铅球两项及格的分别是 40 人和 31 人，两项检测均不及格的有 4 人，那么两项检测都及格的人数是(　　)

A. 35　　B. 25　　C. 28　　D. 15

思路分析

利用维恩图求解.

过程·方法



如图，画出维恩图知，$31+40+4-50=25$.

点拨指导

此类有关集合计数的问题，也可以利用计数公式 $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$ 求解. 推广到三个集合有如下公式：$\text{card}(A\cup B\cup C)=\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(B\cap C)-\text{card}(A\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap C)$.

例7 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x\mid ax=1\}$，若 $B\subsetneqq A$，则实数 a 的值构成的集合 M 是(　　)

A. $\left\{-1,0,\frac{1}{3}\right\}$　B. $\{-1,0\}$　C. $\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$　D. $\left\{\frac{1}{3},0\right\}$

思路分析

分别就 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 两种情况进行求解.

过程·方法

∵ 当 $a=0$ 时，$B=\varnothing\subsetneqq A$；

当 $a\neq0$ 时，由 $B\subsetneqq A$ 知 $\frac{1}{a}\in\{3,-1\}$，即 $a=\frac{1}{3}$，或 $a=-1$.

∴ 应选 A.

点拨指导

本题容易出现的失误是误认为 $a\neq0$，因此产生漏解的情况.

例8 集合 $A=\{x|y=\sqrt{2x-x^2}\}$，$B=\{y|y=2^x(x>0)\}$，则 $A\cap B$ 等于（　　）

A. $(1,2]$　B. $[0,2]$　C. $(0,1)$　D. $(0,1]\cup(2,+\infty)$

思路分析

注意 A、B 两个集合的元素是正确解题的保证.

过程·方法

$\because$ A 的元素是 x，B 的元素是 y，

$\therefore A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y|y>1\}$，

$\therefore A\cap B=\{x|1<x\leqslant 2\}$.

$\therefore$ 应选 A.

点拨指导

求解集合问题应当首先明确集合的元素是什么，它具有什么性质，不能只顾其形而不知其质.

例9 已知集合 $M=\left\{x\;\middle|\;x=\cos\dfrac{n\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$P=\left\{x\;\middle|\;x=\sin\dfrac{(2m-3)}{6}\pi,m\in\mathbf{Z}\right\}$，则 M 与 P 满足（　　）

A. $M\subset P$　　B. $M=P$　　C. $M\supset P$　　D. $M\cap P=\varnothing$

思路分析

可从理解集合 M 与 P 的意义入手. 若视 n、m 为自变量，则 M、P 分别表示函数 $x=\cos\dfrac{n\pi}{3}$，$x=\sin\dfrac{(2m-3)\pi}{6}$ 的值域，问题转化为判断这两个函数值域的关系.

过程·方法

因为函数 $x=\cos\dfrac{n\pi}{3}$，$x=\sin\dfrac{(2m-3)\pi}{6}$ 的最小正周期均为6，所以分别取 $n,m=0,1,2,3,4,5$，得 $M=\left\{1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-1\right\}$，$P=\left\{-1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right\}$

所以 $M=P$.

应选 B.

点拨指导

本题的实质就是判断两个函数的值域是否相同，如何求这两个函数的值域呢？如果分别取整数 n、m 的几组值，用列举法写出集合的所有元素，可能会产生判断失误. 我们知道，函数在它的一个周期内的函数值的集合就是该函数的值域，因而求两个函数的值域就很容易了. 本题也可以从化简解析式入手. 如果经过化简，它们的解析式相同，定义域也相同，那么它们的值域必相同，读者不妨利用这条思路试一试.

例10 下列各命题中,是真命题的有( )

A. 若 $A\cap B=\varnothing$,则 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$

B. 两条对角线相等的四边形是正方形

C. 若 $A\cup B=U$(U 为全集),则 $A=U$ 或 $B=U$

D. 如果一个角的两边分别垂直于另一个角的两边,那么这两个角互补或相等

思路分析

根据相关的集合性质、平面几何知识进行判断.

过程·方法

考虑选项 A,若 $A\cap B=\varnothing$,必须有 $A=\varnothing$ 且 $B=\varnothing$ 或 A、B 中含有的元素完全不相同,所以排除 A;

考虑选项 B,两条对角线相等的四边形也可以是矩形,所以排除 B;

考虑选项 C,当 $A\cup B=U$ 时,$A\neq U$ 且 $B\neq U$ 成立,所以可排除 C.

故本题应选 D.

点拨指导

判断命题的真假要从定义、定理、性质出发.

例11 若命题 p 的否命题为 r,命题 r 的逆命题为 s,则 s 是 p 的逆命题 e 的( )

A. 逆否命题　B. 逆命题　C. 否命题　D. 原命题

思路分析

将命题写成若 A 则 B 的形式.

过程·方法

设 p 为"若 A 则 B",则 r、s、e 分别是"若 $\neg A$ 则 $\neg B$","若 $\neg B$ 则 $\neg A$","若 B 则 A",

$\therefore s$ 是 e 的否命题.

$\therefore$ 应选 C.

点拨指导

判断四种命题之间的关系一般要将命题写成"若 A 则 B"的形式,并根据命题之间的推出关系得出正确的结论.

例12 若命题甲是命题乙的充分非必要条件,命题丙是命题乙的必要非充分条件,命题丁是命题丙的充要条件,则命题丁是命题甲的( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

思路分析

命题的充要条件可以通过命题间的推出关系加以判断.

过程·方法

因为甲是乙的充分非必要条件,故甲能推出乙,乙不能推出甲,因为丙是乙的必要非充分条件,故乙能推出丙,丙不能推出乙,因为丁是丙的充要条件,故丁能推出丙,丙也能推出丁,由此可知,甲能推出丁,丁不能推出甲,即丁是甲的必要不充分条件.

∴ 应选 B.

点拨指导

对于多个命题的充要条件的判断,只要正确写出它们的推出关系链,问题就容易解决了.

例13 对于[0,1]上的一切 x 值,$a+2b>0$ 是 $ax+b>0$ 恒成立的(　　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不是充分条件也不是必要条件

思路分析

判断 $a+2b>0$ 和 $ax+b>0$ 之间的推出关系.

过程·方法

取 $x=0$ 代入 $ax+b>0$,得 $b>0$,若 $a+2b>0$,则 $ax+b=b>0$ 不一定成立;另一方面,若 $ax+b>0$ 恒成立,则当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$a+2b>0$.

∴ 推出关系是“$\Leftarrow$”,但“$\nRightarrow$”,

∴ 应选 B.

点拨指导

“充分条件”和“必要条件”是数学中重要的概念之一,由于“充分条件与必要条件”是四种命题的关系的深化,它们之间存在着密切的联系,故在判断命题的条件的充要性时,可考虑“正难则反”的原则,即在正面判断较难时,可转化应用该命题的逆否命题进行判断. 一个结论成立的充分条件可以不止一个,必要条件也可以不止一个.

例14 如图所示,小圆点表示网络的结点,结点之间的连线表示它们有网络相连,连线标注的数字表示该段网络单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息,信息可以分开沿不同的线路同时传递,则单位时间内传递的最大信息量是(　　).

A. 26　　B. 24　　C. 20　　D. 19

思路分析

注意理解单位时间内传递的最大信息量的实际意义和数学内涵,若将其与

道路的车流量相对照就容易找到解题方向了.

过程·方法

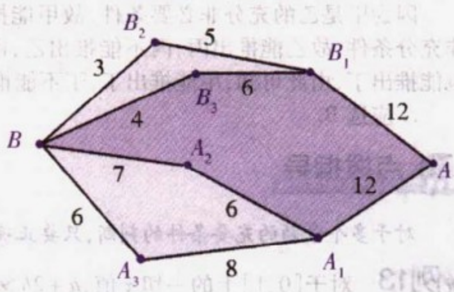
如图,由 $A \to B$ 有 4 条线路,每条线路单位时间内传递的最大信息量是:

(1) $A \to B_1 \to B_2 \to B$: 3

(2) $A \to B_1 \to B_3 \to B$: 4

(3) $A \to A_1 \to A_2 \to B$: 6

(4) $A \to A_1 \to A_3 \to B$: 6



故 4 条线路在单位时间内传递的最大信息量总共是 $3+4+6+6=19$.

故应选 D.

点拨指导

本题注意考查结合网络图形观察图形、分析问题和逻辑推理能力以及解决问题的能力. 在解题时,容易进入误区,得到 $A \to A_1 \to A_2 \to B$: $12+8+6=26$,误选 A,错因是没有看懂题中要求"从 A 向 B 单位时间内传递的最大信息量"的含义.

例15 (福州高三质检)设数集 $M=\left\{x \middle| m \leqslant x \leqslant m+\frac{3}{4}\right\}$,$N=\left\{x \middle| n-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant n\right\}$,且 M、N 都是集合 $\{x|0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 的子集,如果把 $b-a$ 叫做集合 $\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$ 的"长度",那么集合 $M \cap N$ 的"长度"的最小值是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

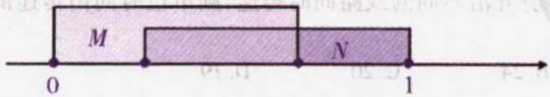
思路分析

用数轴来刻画集合 M,N 之间的关系就容易解题了.

过程·方法

如图,集合 M 的"长度"是 $\frac{3}{4}$,集合 N 的"长度"是 $\frac{1}{3}$,由 M、N 是集合 $\{x|0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 的子集,可知当且仅当 $M \cup N=\{x|0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 时,$M \cap N$ 的"长度"最小,最小值为 $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-1=\frac{1}{12}$.

$\therefore$ 应选 C.



点拨指导

创新意识:要求对新颖的信息、情境和设问,能够选择有效的方法和手段收集信息,

综合与灵活地应用所学的数学知识、思想和方法，进行独立的思考、探索和研究，提出解决问题的思路，创造性地解决问题（摘自《高中数学考试大纲》）. 集合的“长度”是本题中“新定义”的数学概念，通过设置新的问题情境可以有效地考查数学阅读能力、灵活应变、探索创新能力.

例16 （杭州高三质检）设 $I=\{1,2,3,4\}$，A 与 B 是 I 的子集，若 $A\cap B=\{1,3\}$，则称 (A,B) 为一个“理想配集”，那么符合此条件的“理想配集”的个数是（规定 (A,B) 与 (B,A) 是两个不同的“理想配集”）（　　）

A. 4　　B. 8　　C. 9　　D. 16

思路分析

理解“理想配集”的定义，从个例如元素 2 展开讨论，其余就可以依此类推.

过程·方法

元素 1,3 既在 A 中，也在 B 中. 考虑元素 2，有 3 种可能：

①$2\in A,2\notin B$；

②$2\notin A,2\in B$；

③$2\notin A,2\notin B$. 再考虑 4，也有 3 种可能，

故共有 9 种可能.

∴ 应选 C.

点拨指导

数学思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括，蕴涵在数学知识发生、发展和应用的过程中，迁移并广泛应用于相关的问题和学科中. 因此高考命题常常通过创设新的数学知识情景来考查考生对数学思想和方法理解和掌握的程度. 本题通过“理想配集”问题，要求考生能够将“理想配集”用排列组合的语言“翻译”过来，进行各种语言、符号的解读，转化是解答这类“即时定义”的数学问题的关键.

例17 设集合 $M=\left\{m\in\mathbf{Z}\,\middle|\,m=\dfrac{6}{3-n},n\in\mathbf{Z}\right\}$，则集合 M 中所有的元素之和等于______.

思路分析

根据 $3-n$ 是 6 的因数，一一求出 M 的元素.

过程·方法

$\dfrac{6}{3-n}$ 的值为 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$，

∴ 所有元素的和为 0，

∴ 应填 0.