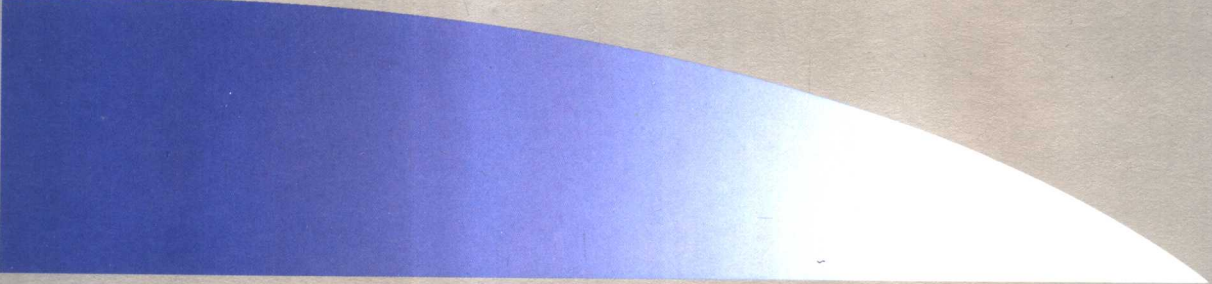


G.R.LIU Y.T.GU 著
王建明 周学军 译
Y.T.GU 校



无网格法理论 及程序设计

**An Introduction to Meshfree Methods
and Their Programming**

**AN INTRODUCTION TO MESHFREE METHODS
AND THEIR PROGRAMMING**

无网格法理论及程序设计



G.R.LIU Y.T.GU 著
王建明 周学军 译
Y.T.GU 校

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

无网格法理论及程序设计=An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming/(新加坡)
刘桂荣,顾元通著;王建明,周学军译. 济南:山东大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-5607-3290-9

- I. 无...
- II. ①刘...②顾...③王...④周...
- III. 计算力学
- IV. 0302

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第137722号

Translation from the English language edition:

An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming

By G. R. Liu and Y. T. Gu

Copyright © 2005 Springer, The Netherlands, being a part of Springer

Science+Business Media

All Rights Reserved

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路27号 邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

山东新华印刷厂印刷

787×1092毫米 1/16 23印张 531千字

2007年3月第1版 2007年3月第1次印刷

印数:1 1000册

定价:68.00元

版权所有,盗印必究

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社营销部负责调换

内容简介

本书以通俗易懂的方式系统而全面地介绍了现有各种无网格法的基本理论及程序设计，使初学者能够极为方便地理解和掌握有关原理及编程技术，并在此基础上更好地完善和发展现有算法或利用它们解决实际问题。该书首先简要介绍了与无网格法有关的数值分析基础理论，然后系统而详细地讲解了现有各种典型无网格方法，如EFG、RPIM、MLPG、LRPIM和MWS的公式形成过程，数值实现技术及程序设计方法。书中附有作者所开发的并已通过大量算例检验过的源程序代码及详细的程序设计和使用说明。利用书中以列表形式所给出的算例输入、输出文件可非常方便地使用这些程序。这些程序已包含了现有各种典型无网格法所涉及的大部分基本技术，在此基础上经必要的扩充或修改可方便地形成各种更为复杂的无网格算法。通过应用这些程序也将有助于读者更有效地学习和掌握无网格法的基本理论。

本书可作为力学、机械、土木、航空航天等专业高年级本科生、研究生选修无网格法课程的教材，也可供该类专业教师、工程技术人员和科研人员参考。

作者介绍



G.R. Liu 博士于1991年在日本Tohoku大学获博士学位；在美国西北大学完成博士后研究。现为新加坡国立大学工程科学先进计算中心(ACES)主任，新加坡计算力学学会会长，新加坡国立大学机械工程系教授。他还在国内外许多学术组织中任职。目前已发表了300多篇学术文章，其中包括200余篇国际期刊论文；6本专著，其中包括畅销书《Mesh Free Method: moving beyond the finite element method》和《Smooth Particle Hydrodynamics—a meshfree particle method》。他是国际学术期刊“International Journal of Computational Methods”的主编，同时还是多家学术期刊的编委会成员。他于1998年荣获“杰出大学学者奖”，1999年获得国家级“国防技术奖”，在CrayQuest 2000年全国大赛中荣获“银奖”，于2002和2003连续两年荣获“杰出教师”称号，2003年获得“工程教育家奖”，2004年获得“计算力学领域APCOM奖”。他所研究的领域涉及计算力学、无网格法、纳米级计算、微观生物系统计算、复合材料中的振动与波传播、复合材料及智能材料力学、反问题以及数值分析等。

Y.T. Gu 博士分别于1991年和1994年在中国大连理工大学获得学士学位和硕士学位，于2003年在新加坡国立大学(NUS)获得博士学位。现为新加坡国立大学机械工程系研究学者。已完成一系列涉及无网格法的研究项目，并发表40多篇学术文章，其中包括20余篇国际期刊论文。他所研究的领域涉及计算力学、有限元分析及建模、无网格法、边界元法、机械工程、船舶与海洋工程、微机电系统(MEMS)计算、高性能计算技术、结构静态及动态分析等。



译者序

译者于2005年9月至2006年8月在新加坡国立大学机械工程系工程科学先进计算中心(ACES)作访问学者。在此期间有幸拜读了该中心主任G.R. Liu教授的这本新书《An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming》(2005, Springer), 感觉这确是一本具有鲜明特点和极高学术价值的著作, 对本人的学术研究帮助很大, 故觉得很有必要将该书译成中文, 介绍给国内广大读者。

始于20世纪90年代中期的无网格法由于突破了传统有限元法基于网格划分的限制, 在分析高速撞击、金属加工成型、动态裂纹扩展、流固耦合等涉及特大变形、网格畸变和自适应分析等问题方面具有突出优势, 现已成为国内外计算力学界的研究热点。

目前对无网格法的研究仍处于起步阶段, 近期反映无网格法研究成果的国内外学术论文虽不少, 但系统而全面地介绍并总结现阶段所取得的学术成果的专著并不多。就本人所知, 到目前为止这样的专著仅6本, 分别为该书作者G.R. Liu教授所著的《Mesh Free Method: moving beyond the finite element method》(2002)、《Smooth Particle Hydrodynamics—a meshfree particle method》(2003)和读者手中的这本书, Atluri教授所著的《The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method》(2002)和《The meshless method (MLPG) for domain & BIE discretizations》(2004), 以及清华大学张雄教授所著的《无网格法》(2004)。

译者认为本书具有以下几个方面的突出特点:

——系统而全面地反映了以原作者为首的学术团队近年来在无网格法研究领域所取得的一系列创新性学术成果。置身于这个学术团队中, 使我切身感受到该团队多年来在原作者的带领下, 针对无网格法领域中亟待解决的众多基础性技术难题进行的大量艰苦而细致的探索性研究, 以及取得的一系列具有广泛学术影响的创新性成果, 其中许多最新研究成果在书中均作了详细介绍。这些内容包括: 整个第7章的“基于局部弱式和配点的无网格法(MWS)”, 径向基点插值形函数(RPIM)以及无网格全局或局部弱式法(RPIM, LRPIM)、强式法(RPCM)和弱-强式法(MWS-RPIM)中的应用, 强式法中施加导数边界条件的特殊处理技术以及解决强对流问题中不稳定性的措施等。

——该书中附有原作者团队所开发的并已通过大量算例检验过的程序源代码, 以及详细的程序设计和使用说明。利用书中以列表形式所给出的算例输入、

输出文件可非常方便地使用这些程序。这些程序已包含了现有各种典型无网格法所涉及的大部分基本技术，读者经过认真研读和应用这些程序可进一步加深对这些理论和算法的理解和掌握。而更为重要的是在此基础上经读者必要的扩充或修改可方便地形成各种更为复杂的无网格算法而应用于实际模拟计算。

——该书以简明易懂的方式，详尽而细致地讲解了现有各种典型无网格法的基本概念、公式形成、算例研究、数值实现和程序设计等问题；内容涉及构造各类型的无网格形函数，基于全局弱式、局部弱式、强式（配点）和弱—强式的各种典型无网格方法，以便于读者，特别是初学者较快地学习和掌握无网格法的主要内容。值得一提的是，书中给出了大量有关计算参数的推荐值，这些参数包括径向基函数的形状参数，支持域、影响域和局部积分域尺寸参数等，这些参数通常没有理论上的最佳值，往往是与所分析的问题和所采用的算法密切相关的。这些参数推荐值是原作者团队经过大量算例研究而取得的，这对于广大读者合理选择这些参数将具有极其宝贵的指导作用。

本人翻译该书的想法得到了原作者 G.R. Liu 教授的大力支持和帮助，他不仅提供了包括电子文档在内的全部原文资料，而且在翻译过程中对个别专业术语的翻译给予了具体的指导。该书的第二作者 Y.T. Gu 博士对译稿进行了认真的审核和校对，为该书的翻译能忠实地体现原著的思想提供了保证。本人的硕士研究生黄乐健同学完成第 5 章的翻译。山东大学出版社为此书的顺利出版提供了多方支持，译者在此向他们表示衷心的感谢。

最后需要感谢的是国家留学基金委，是其给本人提供了在新加坡国立大学作访问学者的机会及在新加坡期间工作和生活的全部费用。如果没有这段经历，此书可能不会问世。

由于译者水平有限，在对原著的理解和表述上难免有不足和不当之处，热切希望读者和同行专家批评指正。

序

有限差分法 (FDM) 求解微分方程已有几个世纪的历史了。FDM 对形状简单的问题非常有效, 且在更加高效、更加适应性强的有限元法 (FEM) 问世前被广泛采用。FEM 被广泛用于求解复杂形状的问题。当前我们正不断开发和利用一些更强有力的数值技术以期更方便、更准确地获得更加复杂系统的近似解。无网格法就是近十年来取得显著发展的这样一种技术, 也是本书的主题内容。

现已发展的数种无网格方法分别适用于不同领域。到目前为止, 已有 3 本有关无网格法的专著问世。

◎ 《Mesh Free Method: moving beyond the finite element method》, 作者 G.R. Liu (2002)。该书系统地阐述了无网格法的基本理论及原理, 重点介绍了弱式形式的无网格法; 并详细介绍了现有主要无网格方法, 以及它们在固体力学 (实体、梁、板、壳等) 和流体力学中的广泛应用。

◎ 《The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)》, 作者 Atluri 和 Shen (2002)。该书详细地介绍了无网格局部 Petrov-Galerkin 法 (MLPG) 及其各种变化形式, 并详尽阐述了这些 MLPG 原理和其应用。

◎ 《Smooth Particle Hydrodynamics—a meshfree particle method》, 作者 G.R. Liu 和 Liu (2003)。该书详细论述了无网格粒子法; 重点介绍了光滑粒子流体动力学 (SPH) 方法和它的一些变化形式。还着重介绍了利用 SPH 法解决流体力学中的穿透和爆炸问题, 并提供了解决流体力学的通用程序源代码。

读者可能要问本书的写作目的以及它与上述其他专著的区别, 特别是与 G.R. Liu (2002) 所著的上述第 1 本书的区别。

上述第 2、3 本书分别涉及特殊的无网格法, 显然与本书所涉及的内容截然不同。G.R. Liu (2002) 所著的上述第 1 本书是正式出版的第一本全面介绍各种主要无网格方法的专著。此书全面系统地介绍了相对较为成熟的基于弱式的各种无网格方法以及在包括实体、梁、板、壳和流体等各方面的广泛应用。此书的起点要求相对较高, 要求具备较强的力学和数值模拟方面的背景知识。另外, 由于受篇幅的限制, 书中的某些地方阐述不够详细, 没有提供程序源代码。

第 1 本书出版后, 其第一作者收到了许多建设性的建议, 包括要求提供程序源代码和对一些基础性问题给出更详尽的阐述。因此本书希望作为第 1 本书的补充, 向读者更详细地阐述无网格法的基本原理, 同时详细介绍程序实现中所涉及的问题并提供程序源代码。本书将仅涉及较基本的无网格弱式方法, 但对基于强

式和弱-强式的无网格方法将给予充分地论述。表 0.1 中列出了本书与 G.R. Liu (2002) 所著第 1 本书之间的关系。由此可见两者间的重复内容很少, 为互补的关系。作者期望本书对那些开始涉足该领域的学者、工程师及学生顺利开展他们的研究及深入探索无网格技术有所帮助。

因此本书的写作目的是尽可能详细地讲解无网格法的基本原理, 对一些典型的无网格方法如 EFG、MLPG、RPIM 和 LRPIM 作着重阐述, 同时对这些方法的数值计算及编程技术也进行了详细说明。另外对无网格配点(强式)法进行了详细论述。本书还提供了大量的经过测试的无网格方法程序源代码, 并可通过所附带的算例展示这些程序源代码的功能及应用。这些程序源代码是作者基于现有的 FEM 和标准的数值分析技术所开发的。这些程序覆盖了无网格技术的大部分内容, 并且可以非常容易地扩展到其他更复杂的无网格算法。

提供这套源程序是为了使读者不仅更易于理解、掌握现有的无网格方法, 而且将有助于读者在此基础上开发、完善自己的无网格算法。书中的所有程序源代码均是基于 MS Windows 和 MS Developer Studio 97 (Visual FORTRAN Professional Edition 5.0.A), 在微机上开发和调试的。通过稍微修改, 这些程序也可在其他系统或平台下运行, 如 UNIX 系统的工作站。在我们的研究团队中, 这些程序就经常在 Windows 和 UNIX 两个系统间相互移置而没有发生过任何技术问题。

表 0.1 本书与 G.R. Liu (2002) 所著无网格法专著的关系

主 题	G.R. Liu (2002) 所著专著		本 书	
	内 容	源程序	内 容	源程序
加权残量法	简单	NA	通过 1D 算例详细阐述	NA
弱式	详细	NA	简单	NA
无网格形函数	重点介绍 MLS、PIM 和 RPIM	无	重点介绍 MLS、PIM、WLS、RPIM 和 Hermite 型	提供
全局弱式无网格法	详细介绍 EFG、PIM 和 RPIM	无	详细介绍 EFG 和 RPIM	提供
局部弱式 Petrov-Galerkin 无网格法	详细介绍 MLPG、LPIM 和 LRPIM	无	详细介绍 MLPG 和 LRPIM	提供
无网格配点法	无	无	详细介绍各种技术	无
弱-强式无网格法	无	无	详细介绍 MWS-MLS 和 MWS-RPIM	提供
边界型无网格法	详细介绍 BPIM 和 BRPIM	无	无	NA
耦合方法	详细介绍 EFG/BEM 和 MLPG/FEM/BEM	无	无	NA
SPH	详细介绍流体力学问题	无	无	NA
固体力学中的应用	1D 和 2D 固体	无	1D、2D 和 3D 固体	部分提供

续表

主 题	GR Liu (2002) 所著专著		本 书	
	内容	源程序	内容	源程序
应用在梁、板、壳结构	有	无	无	NA
应用在流体力学问题	详细介绍 SPH、MLPG 和 LRPIM	无	在 MWS 的应用中详细介绍	无
材料非线性问题	有	无	无	NA
几何非线性问题	无	NA	在 RPIM 的算例中介绍	无
强对流问题	无	无	详细介绍利用强式无网格法求解 1D 和 2D 问题	无
MFree2D [®]	详细介绍使用方法及相关技术	无	无	NA

NA: 未提供。

本书提纲

第 1 章

介绍并讨论加权残量法，并由加权残量法导出各种数值算法。通过一维算例检验其功效。对固体力学及弱式的基本原理及理论也作了介绍。

第 2 章

无网格法概述。介绍了无网格法的发展背景、分类及基本求解过程。

第 3 章

构造无网格插值 / 近似形状函数的原理及理论。重点对 MLS、PIM、WLS、RPIM 以及 Hermite 型形函数的构造进行了系统的阐述。提供了计算 MLS 和 RPIM 形函数的两个标准子程序源代码。

第 4 章

详细介绍了全局弱式无网格法 EFG 和 RPIM 的计算公式。提供了 EFG 和 RPIM 的标准程序代码。

第 5 章

详细介绍了局部弱式无网格法 MLPG 和 LRPIM 的计算公式。提供了 LRPIM 的标准程序源代码。

第 6 章

系统地论述了无网格配点法的计算公式。详细论述了强式法所涉及的稳定性及精度等问题。重点阐述了导数边界条件对计算的影响。

第 7 章

详细推导并论述了基于局部弱式与配点相结合的无网格法，并提供了标准程序源代码。

本书适合于高年级本科生、研究生、工程及科技领域的相关科研人员阅读参考。读者可以是希望学习无网格法并利用无网格法解决实际应用问题的初学者、科研人员或工程师。虽然本书不需他们已具备有限元的知识，但具备有限元基础将确实有助于理解和掌握许多无网格法的基本概念及分析过程。另外，具备一定固体力学基础知识将是必要的。利用所提供的程序进行解题练习将是学习并掌握这些无网格算法的最有效途径。

致 谢

作者书中所涉及的无网格法领域的研究工作深受 T. Belyschko 教授、N. Atluri 教授等其他学者研究成果的影响。没有他们对该领域所作的杰出贡献，本书将无法面世。

我们的许多同事和学生对本书的完成给予了很多支持并作出了多方面的贡献。作者对此表示衷心的感谢。特别要感谢 X. Liu、Y. L. Wu、K. Y. Dai、L. Yan 和 G. Y. Zhang 等，书中的许多算例是由他们提供的；此外他们也在工程科学先进计算中心（ACES）开展了许多涉及无网格法的项目研究。还要特别感谢 Y. Liu、Bernard Kee 和 Jerry Quek 等，他们阅读了本书厚厚的初稿并提供了一些很好的建议。

作者衷心感谢 Gladwell 教授，他的一些建设性意见和建议使得该书更易于阅读。

最后作者衷心感谢新加坡 A*STAR 和新加坡国立大学所提供的项目经费支持。作者及其团队所承担的研究项目很多与本书内容有关。

G.R. Liu

Y.T. Gu

目 录

第1章 预备知识	1
1.1 数值模拟	1
1.2 固体力学基本理论	3
1.2.1 三维固体基本方程	3
1.2.1.1 应力分量	3
1.2.1.2 应变—位移方程	4
1.2.1.3 本构方程	4
1.2.1.4 平衡方程	5
1.2.1.5 边界条件和初始条件	5
1.2.2 二维固体基本方程	6
1.2.2.1 应力分量	6
1.2.2.2 应变—位移方程	7
1.2.2.3 本构方程	7
1.2.2.4 平衡方程	7
1.2.2.5 边界条件和初始条件	8
1.3 强式及弱式	8
1.4 加权残量法	9
1.4.1 配点法	10
1.4.2 子域法	11
1.4.3 最小二乘法	11
1.4.4 力矩法	12
1.4.5 Galerkin 法	12
1.4.6 算 例	13
1.4.6.1 使用配点法	14
1.4.6.2 使用子域法	14
1.4.6.3 使用最小二乘法	15
1.4.6.4 使用力矩法	15
1.4.6.5 使用 Galerkin 法	15
1.4.6.6 使用更多项数的近似解	16
1.5 固体的全局弱式	19

S T R U C T U R E C O N T E N T S

1.6	固体的局部弱式	21
1.7	讨论及评述	22
第2章	无网格法概述	23
2.1	为何采用无网格法	23
2.2	无网格法定义	24
2.3	无网格法求解过程	24
2.4	无网格法分类	27
2.4.1	根据公式导出方法分类	28
2.4.1.1	基于弱式的无网格法	28
2.4.1.2	基于配点技术的无网格法	29
2.4.1.3	基于弱式和配点技术相结合的无网格法	29
2.4.2	根据函数近似方法分类	29
2.4.2.1	基于移动最小二乘近似的无网格法	29
2.4.2.2	基于积分形式近似函数的无网格法	29
2.4.2.3	基于点插值法的无网格法	30
2.4.2.4	基于其他近似方法的无网格法	30
2.4.3	根据域表示法分类	30
2.4.3.1	域型无网格法	30
2.4.3.2	边界型无网格法	30
2.5	发展展望	31
第3章	构造无网格形函数	33
3.1	引言	33
3.1.1	无网格插值/近似技术	33
3.1.2	支持域	35
3.1.3	平均节点间距的确定	35
3.2	点插值方法	37
3.2.1	多项式基点插值法(PIM)形函数	37
3.2.1.1	传统多项式基PIM	37
3.2.1.2	加权最小二乘(WLS)近似	40
3.2.1.3	Hermite型加权最小二乘近似	42
3.2.2	径向基点插值(RPIM)形函数	45
3.2.2.1	传统RPIM	45
3.2.2.2	Hermite型RPIM	49

3.2.3	构造传统 RPIM 形函数的源程序	52
3.2.3.1	程序设计的相关问题	52
3.2.3.2	程序结构和数据结构	54
3.2.3.3	RPIM 形函数算例	55
3.3	移动最小二乘 (MLS) 形函数	60
3.3.1	MLS 形函数公式	60
3.3.2	权函数的选择	63
3.3.3	MLS 形函数的性质	66
3.3.4	形成 MLS 形函数的源程序	67
3.3.4.1	程序设计的相关问题	67
3.3.4.2	程序结构及数据结构	69
3.3.4.3	MLS 形函数算例	69
3.4	采用无网格形函数的插值误差	71
3.4.1	平面拟合	74
3.4.2	复杂表面拟合	74
3.5	评述	77
附录	77
源程序	83
第 4 章	基于全局弱式的无网格法	100
4.1	引言	100
4.2	无网格径向基插值法	101
4.2.1	RPIM 公式	101
4.2.2	数值计算	106
4.2.2.1	数值积分	106
4.2.2.2	刚度矩阵的性质	108
4.2.2.3	施加本质边界条件	108
4.2.2.4	RPIM 的相容性	109
4.3	无单元 Galerkin 法	110
4.3.1	EFG 公式	110
4.3.2	Lagrange 乘子法施加本质边界条件	111
4.4	源程序	114
4.4.1	程序设计的相关问题	114
4.4.1.1	支持域及影响域	114
4.4.1.2	背景网格	115

4.4.1.3	施加本质边界条件方法	115
4.4.1.4	径向基函数(RBFs)中的形状参数	115
4.4.2	程序说明及数据结构	116
4.5	二维固体算例—悬臂梁	120
4.5.1	MFree_Global.f90 的使用	122
4.5.2	参数的影响	127
4.5.2.1	RPIM 法参数的影响	128
4.5.2.2	EFG 法参数的影响	131
4.5.3	收敛性比较	133
4.5.4	效率比较	133
4.6	三维固体算例	134
4.7	几何非线性问题算例	136
4.7.1	钢坯墩粗模拟	136
4.7.2	悬臂梁大变形模拟	138
4.7.3	固支—固支梁大变形模拟	138
4.8	MFree2D [®]	138
4.9	评述	140
附录		141
源程序		151
第5章	基于局部弱式的无网格法	171
5.1	引言	171
5.2	局部径向基点插值法	172
5.2.1	LRPIM公式	172
5.2.2	数值计算	177
5.2.2.1	局部域类型	177
5.2.2.2	刚度矩阵的性质	177
5.2.2.3	检验(权)函数	178
5.2.2.4	数值积分	178
5.3	无网格局部PETROV-GALERKIN法	179
5.3.1	MLPG公式	179
5.3.2	施加本质边界条件	180
5.3.3	MLPG和LRPIM计算效率的共性	181
5.3.3.1	与FEM的比较	181
5.3.3.2	与全局弱式无网格法的比较	181

5.4	源程序	181
5.4.1	程序设计的相关问题	181
5.4.2	程序说明及数据结构	182
5.5	二维固体算例—悬臂梁	186
5.5.1	MFree_local.f90 的使用	187
5.5.2	参数影响研究	191
5.5.2.1	LRPIM 中参数的影响	191
5.5.2.2	MLPG 中参数的影响	195
5.5.3	收敛性比较	197
5.5.4	效率比较	199
5.6	评述	199
	附录	200
	源程序	211
第 6 章	无网格配点法	232
6.1	引言	232
6.2	导数边界条件处理技术	233
6.3	一维问题的多项式点插值配点法	234
6.3.1	一维系统方程的配点公式	234
6.3.1.1	问题描述	234
6.3.1.2	采用无网格形函数的函数近似	234
6.3.1.3	系统方程离散化	235
6.3.1.4	Dirichlet 边界条件的离散化	235
6.3.1.5	仅含 Dirichlet 边界条件的离散系统方程	235
6.3.1.6	含 DBCs 的离散系统方程	236
6.3.2	一维问题的数值算例	240
6.4	采用无网格法处理对流—扩散问题的稳定性	248
6.4.1	节点加密	249
6.4.2	扩大局部支持域	250
6.4.3	完全迎风支持域	250
6.4.4	自适应迎风支持域	252
6.4.5	偏支持域	253
6.5	二维问题的多项式点插值配点法(PPCM)	253
6.5.1	二维问题的 PPCM 公式	254
6.5.2	数值算例	255

6.6	二维问题的径向基点插值配点法(RPCM)	259
6.6.1	RPCM公式	259
6.6.2	RPCM求解二维Poisson方程	259
6.6.3	RPCM求解二维对流—扩散问题	260
6.6.3.1	稳态对流—扩散问题	260
6.6.3.2	线性动态对流—扩散问题	264
6.7	二维固体的RPCM	267
6.7.1	Hermite型RPCM	268
6.7.2	采用规则网格(RG)	272
6.8	评述	276
第7章 基于局部弱式和配点的无网格法		278
7.1	引言	278
7.2	无网格配点法和局部弱式法	278
7.2.1	无网格配点法	278
7.2.2	无网格局部弱式法	279
7.2.3	无网格配点法与局部弱式法的比较	279
7.3	二维静力学公式	280
7.3.1	思路	280
7.3.2	局部弱式	281
7.3.3	离散系统方程	281
7.3.4	数值计算	284
7.3.4.1	刚度矩阵的性质	284
7.3.4.2	局部域类型	284
7.3.4.3	数值积分	284
7.4	源程序	284
7.4.1	程序设计的相关问题	285
7.4.2	程序说明	285
7.5	程序验证算例	286
7.6	二维弹性静力学数值算例	291
7.6.1	含导数边界条件的一维桁架构件	291
7.6.2	标准分片试验	291
7.6.3	高阶分片试验	293
7.6.4	悬臂梁	295
7.6.5	带孔的无限板	297