DAXUE

大学

文科数学

WENKESHUXUE

主　编　王章雄
副主编　胡桂华　叶彩儿　余永清

中国人民大学出版社

DAXUE

大学文科数学

WENKESHUXUE

主　　编　王章雄

副 主 编　胡桂华　叶彩儿　余永清

编写人员（按姓氏笔画为序）

王章雄　叶彩儿　余永清　胡桂华

胡慧兰　顾光同　徐群芳

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学文科数学/王章雄主编.
北京：中国人民大学出版社，2007
ISBN 978-7-300-08540-1

Ⅰ. 大…
Ⅱ. 王…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 145750 号

大学文科数学
主编 王章雄

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	版　　次	2007 年 10 月第 1 版
印　　张	13 插页 1	印　　次	2007 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	239 000	定　　价	19.00 元

内容简介

本书是为面向文科类专业的大学生开设《大学文科数学》课程而编写的教材. 全书分为六个部分：数学简史，函数与微积分，线性代数，线性规划，概率论初步，统计初步与统计数学软件介绍. 全书例题丰富，每节之后均配有适当数量的习题，书末附有习题答案与提示，便于教师教学与学生自学.

本书适用于普通高校文史哲、法律及其他文科类专业的本科生，也可供高职层次的经管类和文科专业选用为教材，同时还可作为一些工科类专业的数学教学参考书.

前　言

对于数学教育，人们往往强调其工具功能，即更关注数学与专业的结合. 但是事实告诉我们，如果你从事的工作不直接使用数学的话，那你在大学里所学的数学知识大部分人在毕业后一两年就会基本忘掉. 然而，如果一个人在大学里得到了良好的数学素质的培养，那么不管你将来从事什么样的工作，铭刻于头脑中的数学精神、数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点，都能随时随地发生作用，受益终身. 早在 20 世纪 30 年代末，英国哲学家(同时也是数学家、教育学家)怀特海(A. N. Whitehead)曾经预言："在人类思想领域里具有压倒性的新情况，将是数学地理解问题占统治地位. ”人类社会进入 21 世纪以来，随着科学技术的日新月异，不仅科学本身在数学化，即用数学的思想和方法来构建、解决问题，对整个社会的发展来说，数学化的倾向也在加速进行，怀特海的预言正在变成现实. 1989 年，美国国家研究委员会在一份名为《人人关心数学教育的未来》的专题报告中也写道："数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断，以及运用符号等等. 它们是普遍适用并且强有力的思考方式. 运用这些思考方式的经验构成了数学能力——是当今这个技术时代日益重要的一种智力，它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探察偏见，能估计风险，能提出变通办法. 数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界. ”"从来没有像现在这样，他们需要数学式的思维. ”随着我国改革发展的不断深入，对大学教育也提出了更高更新的要求. 近些年，大学教育中也强化了数学教育的地位，各个学校也陆续开设了《大学文科数学》课程，而且在一些文科专业，根据自身发展的需要，对数学课程的要求还在不断提升. 大学把数学作为文科类各专业必修课，反映了数学教育对人的思维训练的重要性.

作为一门面向文科类各专业开设的基础课程，《大学文科数学》主要目的是培养文科类学生的科学素养，养成良好的思维习惯，提高学生的整体素质，同时还要照顾到文科学生的专业与思维特点. 因此本教材不仅仅在向文科学生传授高深的数学知识，而且旨在培养学生的现代数学意识，提高其理性思维能力，同时向学生展示数学在实际应用中的强大功能，在理性思维训练、实用技术学习和数

学文化欣赏这三者中寻找合适的平衡点. 为贯彻以上指导思想，本书在编写内容上注重基本数学思想的培养，适当降低了理论性与难度；编写风格上淡化了逻辑与技巧，强调实用性和拓展文科学生的高等数学方面的知识面. 在此基础上，本书力争使学生学会欣赏数学文化，领略和体会数学多个分支的思想本质，也能用所学知识解决一些在实际应用中遇到的问题.

全书共分六章，除了包括传统"大学文科数学"的内容，如函数与微积分、线性代数、概率统计初步等方面的内容之外，还从训练思维与实用两方面考虑，简要介绍了线性规划的基本知识及其简单解法，同时增加了数学简史的内容. 编者认为，让文科学生了解一些数学各个分支学科方面的历史进程，有利于他们建立对数学的整体印象，同时增加他们学习数学的兴趣. 另外，为了适应当前计算机在处理实际问题方面的强大功能与快速进展，本书结合数理统计知识的学习，比较详细地介绍了常用数学软件 SPSS 的应用，希望这样的安排能够兼顾到读者对思辩性与实用性、知识性与趣味性的要求. 全书注重通过对大量典型例题的分析和点评，启迪读者加深对有关数学概念和理论的认识，提高分析问题和解决问题的能力. 为了便于读者巩固所学内容，书后附有对每节所留练习题的部分答案与提示. 读者在做题前要把相关的概念和理论搞清楚，不要急于翻阅答案，要养成独立思考的习惯，尽量自己完成解题过程.

本书各章的编写者是：第一章，胡桂华；第二章，胡慧兰、胡桂华；第三章，叶彩儿；第四章，王章雄；第五章，徐群芳；第六章，顾光同. 余永清审查和整理了所有习题的答案，全书由王章雄和胡桂华统稿. 在形成本书之前，浙江林学院理学院部分老师在教学中作为讲义试用，此间他们提出了不少好的建议. 张立溥在讲义的编写过程中也做了很多工作. 中国人民大学出版社副编审潘旭燕为本书的出版付出了辛勤劳动. 在此，对他们表示衷心的感谢.

本教材适用于普通本科语言类、文法类、艺术类、社科类等文科专业，对于非文科类专业也是一本不错的参考教材. 另外，由于各方面的原因，书中定有不少疏漏和不妥，敬请指正！

编者

2007 年春于杭州临安

目　录

第一章　数学及简明数学发展史

著名数学家华罗庚早就说过:“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁……无一不可用数学来表达.”古希腊的毕达哥拉斯学派就把数看作万物之本源；爱因斯坦在谈到数学时说:“数学之所以有高声誉，还有另一个理由，那就是数学给予精密自然科学以某种程度的可靠性，没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的.”数学，是科学的精灵，是科学王宫里最神秘的宫殿. 现代社会中的每个人，无论你从事什么职业，都不可能对数学毫无了解. 要想了解数学，最好先了解一些数学的基本思想和它的发展历史. 本章简要介绍了数学与数学思想以及几何、代数、微积分和概率论等各个分支的发展史，最后还简要介绍了中国数学发展史.

第一节　数学与数学思想

一、什么是数学

“近代科学之父”伽利略认为“宇宙像一本用数学语言写成的大书”. 当有人问第一位诺贝尔物理学奖获得者伦琴“科学家需要什么样的修养”时，他的回答是:“第一是数学，第二是数学，第三是数学”. 数学不仅用于自然科学的各个领域，而且早已渗透到社会科学的每一个领域，尤其在经济和管理中显得更为突出. 在经济和管理中，预测是管理的依据，而数学则是预测的重要武器. 可以说无论是经济学家还是经济管理工作者，不懂数学决不会成为杰出的人才. 人类进入 21 世纪后，数学更是无处不在. 正如英国皇家科学院院士斯图尔特所说:“我们的世界是建立在数学基础之上的. 数学不可避免地融入我们的整个文化之中. 我们并非感受到我们的生活如何强烈地受到数学的影响，原因在于数学总是尽可能地藏在幕后.”纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙. 随着计算机的发展，数学在人类社会的每个领域里的作用和威力是越来越大了.

那数学是什么呢? 简单地说，数学是关于内容与形式相脱离，只从形式上研

究数量关系和空间形式的科学. 例如，数学上的数字乘法在实际问题中可能是男孩的人数再乘上苹果的数目，或者苹果的数目乘上苹果的价钱，等等；数学上的变化率在实际应用中可能是速度或电流等；几何上的线段在实际问题中可能指细棒或拉紧了的绳子，等等. 总之，数学是撇开具体问题的内容和含义，从中抽象它们的共同本质与实质加以研究、概括和总结，从对数量关系或空间形式的研究来表达其自然规律、发现自然规律的奥秘和认识自然规律的学科.

二、数学的特征

数学概念来源于实际，是实际问题的高度概括和高度抽象，因此，抽象性是它的第一个特征；数学思维的正确性和表现在逻辑上的严密性以及它的结论的确定性使得精确性成为它的第二个特征；一切科学、技术及社会的发展都需要数学，应用的广泛性是它的第三个特征.

数学在它的抽象方面的特点还在于：第一，在数学的抽象中只保留着数量关系和空间形式，而舍弃了其他一切. 第二，数学的抽象是经过一系列阶段而产生的；它们达到的抽象程度大大超过了自然科学中的一般抽象. 第三，数学本身几乎完全周旋于抽象概念和它们的相互关系的圈子之中. 如果自然科学家为了证明自己的论断常常求助于实验，那么数学家证明定理只需用推理和计算. 当然，数学家们为了发现自己的定理和方法，也常常利用模型、物理的类比、注意许多单个的十分具体的实例，等等. 所有这些都是理论的现实来源，有助于发现理论和定理，但是每个定理只有当它已从逻辑的推理上严格地被证明了，它才最终地在数学中成立. 如果一个几何学家报告一条他所发现的新定理时，只限于在模型上把它表示出来，那么任何一个数学家都不会承认这条定理是被证明了. 只有当他引用固有的原始性质(或已经被公认的定理)，用推理的方法导出这个定理，数学家们才会承认的. 这样看来，不仅数学的概念是抽象的、思辨的，而且数学的方法也是抽象的、思辨的. 由于数学推理的进行具有严格的精密性，因此，数学结论具有更大的逻辑严格性. 这种推理对于每个只要懂得它的人来说，都是无可争辩和确定无疑的. 数学结论证明的这种精密性和确定性使得数学真理是完全不容争辩的.

由于数学的研究对象——数量关系与空间形式都来自于现实世界，因而数学的概念和结论尽管在形式上具有高度的抽象性，但实质上总是扎根于现实世界的. 生活实践与技术需要始终是数学的真正源泉，反过来，数学对改造世界的实践又起着重要的、关键性的作用. 理论上的丰富提高与应用的广泛深入在数学史上始终是相伴相生，相互促进的.

三、数学思想与数学文化

数学思想是伴随着数学科学的产生而产生的，是从数学内容中抽象概括、再抽象再概括出来的，因而具有高度的包摄性和可迁移性，是对数学科学的理性认识，是数学的精髓和灵魂. 若能领悟到数学思想的存在，则有助于提高分析问题、解决问题的能力，发展创造性思维，有助于形成科学的世界观和方法论. 基本数学思想有：方程的思想、函数的思想、数形结合的思想、分类讨论的思想、转化的思想等.

数学是人类文化最基本的基础之一. 语言和数学，构成了人类文化的有机体.

没有数学的单纯的语言文化，如同有形而无灵魂的雕塑. 所以，在语言产生的最初时代，人类由于语言缺乏灵性，认识和解释世界的层次非常肤浅，那些已经用文字记载下来的丰富多彩的传统文化，由于对事物和自然规律的描述始终处在唯象的阶段，处在从现象到现象的描述过程中，处在经验论的层次上，所以，许多至今看来我们并没有视其为伪科学的思想、观点、理论，在现在的科学殿堂上我们也没有光明正大地、理直气壮地将它们归结为“经典科学理论”. 例如，中国的中医学、气功与经络理论，印度的瑜珈功，等等. 根源在哪里？就是缺乏了数学的理性描述和解释.

而传统的理论对这些领域现象的解释，缺乏数学推理那样的严谨性，以至于发展成了我们俗称的“玄学”. 这类唯象的理论，虽然也可以部分地解释和体现理论的作用(如中医学的五行生克、辨证施治)，但是却始终停留在经验论的基础上，其科学威力实际上大打折扣.

还有一些西方传统的科学理论，例如心理学，典型的如弗洛伊德的精神分析，主要的观点也是唯象的.“恋母情结”实际上利用的是人的生理本能起源原理，似乎其中有了一点逻辑推理的意味，结果，就开始经典了. 实际上，生理本能起源说中国也是早就产生了，孔子说：“食、色，性也.”但是中国文化对于逻辑推理却没有得到西方那么系统的发展，西方是从欧氏几何学开始，把理性的数学以及数学的思想方法应用到需要伦理的各个领域. 这也是中国传统文化与西方文化发展在现代出现差距的原因之一.

所以，语言形成了人类文化的形体，而数学则给文化注入了理性的生命，没有数学的文化是没有灵魂的文化.

四、数学与科学

现代科学最典型的特征就是既有血肉——用严谨的实验基础证明唯象的客观

现象的存在，又有灵魂——用逻辑的、数学的严格推理表述内在的原理，因此才体现了不可否认的巨大威力，才被我们公认为经典科学. 但是，这些科学知识的建立，也从来没有排斥猜想和假设，而且正是在对超前的猜想和假设的证明和证伪的过程中，逐步建立了现代经典科学的大厦. 而“有罪推定”的盲目否定态度，同样不可能受到欢迎，也就是没有市场.

我们之所以推崇经典科学，尤其是经典物理学，其重要的原因之一就是：经典科学不但能够较完美地解释我们已经发现的许多客观规律. 还由于其理性地通过数学所做的推理体现了经典科学的强大的超前性、预见性. 因此，我们才可以预见我们暂时还没有发现和证实的许多自然现象和客观规律. 于是，人类生产力的提高出现了跨越式的发展，人类社会出现了大踏步的进步. 那些理论中暂时没有体现出来和被正式发现的被证实的预见到的自然规律很多，“有罪推定”论者在这里是不会使用这个观点的，为什么？这是由于经典科学理论依靠理性的数学工具进行了较严密的推导，用数学论述了经典科学的各种研究论题的内在规律.

数学给科学注入了生命，科学才在现代成为具有强大生命力的理论，发挥着巨大的威力. 所以，数学是现代科学密不可分的重要内容，可以说，没有数学就没有现代经典自然科学. 因此，讨论自然科学，就必然要涉及数学，盲目排斥数学的自然科学论是对自然科学无知的表现.

而对于数学本身，在研究的过程中，猜想从来就是数学世界的瑰宝. 从纯数学的数论中号称数学女皇王冠上的宝石的“哥德巴赫”猜想到被誉为“下金蛋的母鸡”的“费马大定理”，再到频频用到自然科学研究中的数不胜数的各种数学分支，数学已经是科学研究中不可忽略的重要思想武器，推动现代经典科学的发展、进步. 其中猜想和假设正是思想者思维中闪现出来的超前灵感的体现，引导科学工作者开拓新的科学领域. 如果用“有罪推定”推翻这些猜想，数学只有一条路可走：原路徘徊.

总而言之，数学是人类文化的理性、灵魂，是科学思想的理性的部分，有了数学，科学才成为真正有生命的具备了强大威力的文化. 当我们对数学所具备的重要意义有了这样的认识之后，我们爱好数学就有了更深刻的原动力.

五、学习数学的方法

首先要弄清数学概念的特点. 数学的研究对象是现实世界的数量关系和空间形式，这种关系和形式是脱离了事物的具体物质属性的. 因此，数学概念有与此相对应的特点：

（1）数学概念是反映一类事物在数量关系和空间形式方面的本质属性的思维形式，它是排除一类对象物理属性以后的抽象，反映了一类对象在数与形方面内在的、固有的属性，因而它在这一类对象的范围内具有普遍意义.

（2）数学概念是人类对现实世界的空间形式和数量关系的简明、概括的反映，并且都由反映概念本质特征的符号来表示，这些符号使数学有比别的学科更加简明、清晰、准确的表述形式. 这说明在数学的发展中引进恰当的符号来表示概念是非常重要的，这是数学概念的一个重要特点.

（3）数学概念是具体性与抽象性的辩证统一. 数学是高度抽象的，但另一方面，数学概念又是非常具体的，任何一个数学概念的背后都有许多具体内容支撑着. 只有掌握了数学概念的定义，同时又能够举出概念的具体事例，才算真正掌握了数学概念.

（4）数学概念具有很强的系统性. 前面已指出，数学概念往往是“抽象之上的抽象”；先前的概念往往是后续概念的基础，从而形成了数学概念的系统. 公理化体系就是这种系统性的最高反映.

其次是要深刻理解和掌握并会应用数学概念. 理解数学概念是学习数学的关键，只有理解了数学概念和原理，才能牢固地掌握数学知识，才能灵活地、举一反三地、融会贯通地、具有创造性地应用数学知识. 学习数学知识切勿只停留在表面上，形式地记住数学概念的某个要领的词句，套用公式、法则，不知道概念的本质属性，不知道公式的来龙去脉，知其然，不知其所以然，无法变通；那是学不好数学的. 数学是思维的体操，数学学习要求具有较强的抽象和概括能力，因而数学学习中的理解较之一般性的理解有更高的要求. 数学学习中的理解应解释为对已学东西的意义不断地加以更新、改造、整理和重组的过程，为形成更合理的结构，从整体内部进行正、逆向交叉，跳跃式的联系，从总体中认识局部的、孤立的概念之间的内部联系，通过表象的更新，新联系的建立，旧联系的调整或抛弃来影响总体或局部结构的进化，甚至得以革新，形成联系更丰富、更紧密、更融会贯通的知识网络. 数学中的理解学习应是学习者先认识数学对象的外部表征，构建相应的心理表象，然后在建立新旧知识联系的动态过程中，打破原有的认识平衡，将数学对象的心理表象进行改造、整理、重组，重新达到新的平衡，以便提炼出数学对象的本质特征及规律；也就是说用已有的知识来理解未知的知识，把所学的知识进行比较，加强新旧知识的联系，以促进数学知识的系统化，把抽象的知识形象化、直观化，从而达到对数学知识的理解.

一般地，对数学概念的理解有下面三个层次的体现：

第一，能用自己的语言来正确地表述数学概念、公式、法则等数学知识，能依据自己已有的数学知识和经验去对教师所讲的内容做出解释，能够根据数学内容来提出问题和回答问题.

第二，能否进行实际操作是对数学知识确切理解的主要标志. 实际操作是指根据所学的数学知识，进行判断、运算、推理、证明等. 在这一过程中，通过建立新旧知识的动态联系，打破原有的认知平衡，将数学对象的心理表象直接纳入认知结构.

第三，能否进行具体运用是衡量是否达到对数学知识深刻理解的重要标志. 具体运用是能综合运用所学的数学知识解决相关的数学问题. 实际上，具体运用的过程也是对数学对象的心理表象进行改造、整理、重组，达到新的平衡，以便提炼出数学对象的本质特征及规律，从而对数学知识加以运用.

其中，后一个体现的理解层次比前一个更体现其理解深刻性. 总之，能否把语言表述、实际操作和具体运用三者结合起来，是全面理解数学知识的标志. 这种结合越好，表明理解越深.

六、数学分支学科

数学是一个庞大的家族，加之其历史悠久，经过千百年来的不断发展，使得其内容极其丰富，分支学科众多. 其中除了比较经典的，如几何学(主要包括欧氏几何、非欧几何、解析几何、微分几何、代数几何、投影几何、拓扑学、分形几何等)、代数学(主要包括算术、初等代数、高等代数、数论、抽象代数等)、函数与分析学(主要包括微积分学、实变函数论、复变函数论、泛函分析、偏微分方程、微分方程等)、概率统计、数理逻辑等学科之外，还有一些比较现代的新兴学科，如模糊数学、运筹学、计算数学、突变理论等. 下面几节将对应用比较广泛的几何、代数、微积分、概率统计等学科的发展历程做较为详细的介绍.

习题 1.1

1. 什么是数学？数学的特征是什么？
2. 数学与科学的关系是什么？
3. 数学有哪些主要分支？

第二节 几何学的发展简史

“几何”这个词在汉语里是“多少”的意思，但在数学里“几何”的含义就完全不同了.“几何”这个词的词义来源于希腊，原意是土地测量，或叫测地术.

简单地说，几何学是研究“空间”与“移动”的学问. 这里的“空间”指的是正统的“几何空间”，包括各种具体或抽象的几何图形，甚至是整个宇宙空间的几何构造；而“移动”则是这些几何空间的表现，例如：平移、旋转、对称、波动等等. 因此，几何学可以说是真实世界与抽象世界的舞台与演员的演出. 而数学家笛卡儿（Descartes，1596—1650）曾说：“人类心智与生俱来有完美、空间、时间和运动等观念.”不论是实际生活上为了丈量与计算的需要，还是对于宇宙空间的好奇与探索，抑或是对于“美”的追求，自从人类开始生活在地球上，几何概念的演进便未曾停歇. 而几何学的发展，也使人类开始真正认识我们所生存的宇宙空间.

几何学研究的主要内容为讨论不同图形的各类性质，它可以说是与人类生活最密不可分的. 远自巴比伦、埃及时代，人们已知道利用一些图的性质来丈量土地，划分田园，但是并没有把它当作一门独立的学问来看，只把它当作人类生活中的一些基本常识而已. 真正认真地去研究它，则是从古希腊时代才开始的. 于是，我们将几何学的发展，大致地分为以下几个阶段.

一、古希腊的几何学的发展

古希腊所发展的几何学是所有近代数学的原动力. 若要了解整个数学的架构，必定要先了解古希腊几何学的发展. 我们可将其分为三个阶段：

(1)启蒙期

主要人物有泰利斯(Thales)、毕达哥拉斯(Pythagoras)、尤多沙斯(Eadoxus)、帕拉图(Plato)、亚里士多德(Aristotle)等.

泰利斯为古希腊天文学与几何学之父，他曾正确地预测日食的时间. 他率先开始对一些几何图形做系统的研究. 毕达哥拉斯也是一位音乐家，他发明了毕氏音阶，以他名字命名的毕氏定理为几何学中的重要定理. 以他为首的学派称为毕氏学派，该学派认为“数”是宇宙万物的基础. 尤多拉斯创立了穷尽法. 所谓穷尽法就是“无穷地逼近”的观念，主要构想是为了求圆周率 π 的近似值. 所以从理论上说，尤多拉斯是微积分的开山祖师. 尤多拉斯的另一贡献是对比例问题做系

统的研究. 帕拉图把逻辑学的思想方法引入了几何，使原始的几何知识受逻辑学的指导，逐步向系统和严密的方向发展. 他在雅典给他的学生讲授几何学，已经运用逻辑推理的方法对几何中的一些命题做了论证. 亚里士多德是柏拉图的学生，是形式主义的奠基者，被公认是逻辑学的创始人，其逻辑思想为日后将几何学整理在严密的逻辑体系之中开辟了道路.

(2) 巅峰期

这个时期的重要人物有欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)、阿波罗尼阿斯(Apollonoius)等.

欧几里得是一位真正把几何总结成一门具有比较严密理论的学科的杰出的希腊数学家. 在他之前，尽管已经有了十分丰富的几何知识，但这些知识仍然是零散的、孤立的、不系统的. 他深知帕拉图的一些几何原理，因此非常详尽地搜集了当时所能知道的一切几何事实，按照帕拉图和亚里士多德提出的关于逻辑推理的方法，加以整理，写成了数学史上早期的巨著——《几何原本》(*Elements*). 这本书是有史以来第一本数学教科书，也是最畅销的. 之后数学的每一分支都是由这本书出发的. 从欧几里得发表《几何原本》到现在，已经过去 2 000 多年，尽管科学技术日新月异，但目前初中所学的平面几何学，内容仍以《几何原本》这本书为主. 这本书的一个优点是浅显易读. 欧几里得本身并没有什么重大的数学突破，它是一个数学的集大成者. 这本书直到明朝中叶以后才传入中国. 阿基米德生于西西里岛，曾留学埃及亚历山大城，是世界数学史上三大最著名的数学家之一，成果不计其数. 他对几何学的发展也做了不少贡献. 阿波罗尼阿斯与阿基米德是同时代的人，他最大的贡献是对于圆锥曲线的研究，这对于以后的解析几何，以至于微积分的创立有直接的影响.

(3) 衰退期

自阿基米德及阿波罗尼阿斯之后，希腊数学已渐渐走入衰退期. 在这中间，仍有几位值得一提的人物. 克罗狄斯·托勒密将三角函数发扬光大，并由此将天文学炒热. 帕布斯可说是这个时期末的代表人物. 在此期间数学遭受了许多灾难. 大的有：(ⅰ)罗马人的来临，使得希腊数学遭到破坏. 罗马人都很实际，他们设计完成了很多工程，但是却拒绝去深思熟虑地使用数学原理. 罗马的皇帝也不热衷于支持数学家. 希腊在公元前 14 世纪完全被罗马征服. 当时托勒密王朝的末代君主为克利奥派翠亚(埃及艳后). 她与凯撒很好，凯撒为了帮助她解决与她的兄弟的纷争，放火烧了亚历山大港的战舰，结果大火无法控制，将亚力山大图书馆也烧掉了. 大概有数以百万计的图书及手稿全部付之一炬. 这一次损伤，消耗了希腊数学不少元气. (ⅱ)基督教的兴起，使得希腊数学面临第二次浩劫. 因为

他们反对教会外的研究，并且嘲弄数学、天文学及物理学．基督徒被迫禁止参与希腊研究，以防止受到污染．所以又有成千上万的希腊书籍被毁．(ⅲ)回教徒征服亚历山大城后连最后的一些图书都被烧掉，当时的回教徒有一句话，说：若是这些书的内容在《可兰经》中已有，则我们不必去读它．若在《可兰经》中没有，则更不应该去读它．所以全部图书付之一炬．此时，一些学者都移居君士坦丁堡，寄托于东罗马帝国之下．虽然仍感到基督徒的不友好气氛，但是相对较安全，使得知识的库存又慢慢增加，直到 14 世纪文艺复兴时才又发扬光大起来．

二、解析几何学的发展

解析几何学(analytic geometry)由法国数学家笛卡儿和费马(Fermat)等人创立，其思想是借助坐标系，用代数方法研究几何对象之间的关系和性质，是几何学的一个分支，亦叫坐标几何．其思想来源可上溯到公元前 2000 年．

美索不达米亚地区的巴比伦人已能用数字表示点到另一个固定点、直线或物体的距离，已有原始坐标的思想．公元前 4 世纪，古希腊数学家门奈赫莫斯(Menaechmus)发现了圆锥曲线，并对这些曲线的性质做了系统的阐述．公元前 200 年左右，阿波罗尼阿斯在他的《圆锥曲线论》中，全面论述了圆锥曲线的各种性质，其中采用过一种“坐标”：以圆锥体底面的直径为横坐标，过顶点的垂线为纵坐标，加之所研究的内容，可以看作是解析几何的萌芽．到 16 世纪末，法国数学家韦达(F. Viète)提出了用代数方法解几何问题的想法，他的思想给笛卡儿很大的启发．此外开普勒发现行星运动的三大定律，伽利略研究抛射体运动轨迹，都要求数学从运动变化的观点研究和解决问题，这些研究促进了解析几何学的创立．

1637 年笛卡儿出版了一部哲学著作——《科学中正确运用理性和追求真理的方法论》，书中有三个附录，其中之一是《几何学》(共 3 卷)．这是笛卡儿唯一的数学论著，阐述了他关于解析几何的思想，后人把它作为解析几何的起点．书中第一次出现变量与函数的概念，他所谓的变量是指长度变化、方向不变的线段，还指连续经过坐标轴上所有点的数字变量，因此，他试图创建一种几何与代数互相渗透的学科．在卷Ⅰ中他将几何问题化为代数问题，提出几何问题的统一作图法，将线段与数量联系起来，设立方程，根据方程的解所表示的线段间的关系进行作图．在卷Ⅱ中他将平面上的点与一种斜坐标确定的数对联系起来，进一步考虑含两个未知数的二次不定方程，指出它代表平面上的一条曲线，并依据方程的次数将曲线分类．这样，一个代数方程可以通过几何直观方法去处理，反之可以用代数方法研究曲线的性质，体现了具有某种性质的点之间有某种关系，构成解析几何的基本思想．