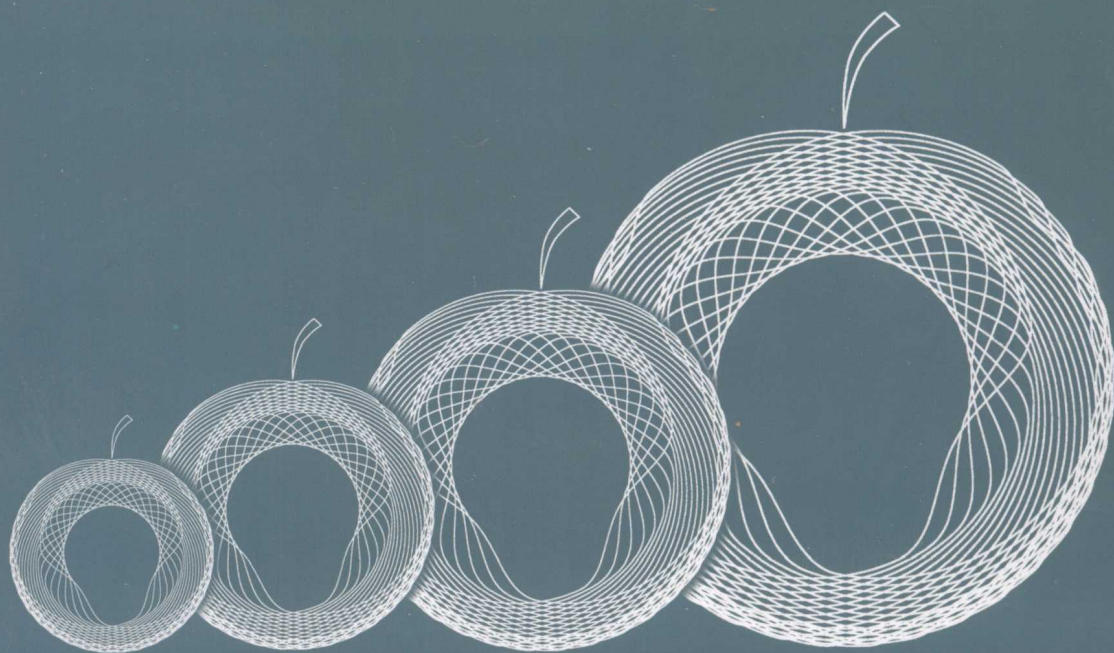


# 数学的思维与发展

王春陵 著



吉林科学技术出版社

# 数学的思维与发展

王春陵 著

吉林科学技术出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学的思维与发展/王春陵著 — 长春: 吉林科学技术出版社, 2006.11

ISBN 7-5384-3371-6

I. 数.. II. 王… III. ①数学—思维方法 ②数学史—研究 IV. 01

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第129150号

## 内 容 简 介

本书从探讨“数学是什么?”开始,给出数学的定义,介绍其特点及数学思维的涵义和特征;数学上常用的逻辑思维方法和几对基本矛盾及思想方法的几次重大突破。接着从多角度、多方位分析、阐述数学发展的基本规律。然后介绍当代数学成果及应用,展望21世纪数学的发展前景,介绍“陈省身猜想”。

本书起点较低,特别注意数学产生背景和直观描述,论证通俗易懂。内容比较丰富,集哲学思想性、数学知识性及历史资料性为一体。本书可以作为大中专学校有关专业的教材,也可以作为数学哲学爱好者和广大科普爱好者的课外读物。

## 书 名: 数学的思维与发展

王春陵 著

责任编辑/成与华 封面设计/郝书文 责任绘图/王海东

责任校正/邢旭 责任印刷/栾廷松 版式设计/奚广英

吉林科学技术出版社出版、发行 社址: 长春市人民大街4646号 邮编: 130021

网址: [www.jlstp.com](http://www.jlstp.com) 电子信箱: [jlkjcbbs@public.cc.jl.cn](mailto:jlkjcbbs@public.cc.jl.cn) 电话: 0431-85635177

(版权所有 翻版必究)

大连业发印刷有限公司印刷

开本: 787X1092 1/16 20.25 印张 453 千字

2006年11月第一版 2006年11月第一次印刷

ISBN 7-5384-3371-6

定价: 29.00元

(如有印装质量问题,可寄本社退换)

# 前 言

数学是一门科学，也是一种文化，人们总是从不同的角度来谈论和认识数学，因而产生了不同的流派和思想。本书着重从思维和发展这个角度来探讨数学。

历史证明：在数学永恒的发展中，其本身就存在着自己的思维模式和发展规律，科学的思维能加速数学的发展，而数学的飞速发展也能促使人们在思维上进行创新或革命。

数学作为一切学科的基础，它是一个历史概念。数学可以说是泽被天下，是人类智慧的不竭源泉。

进入21世纪以来，最引人关注的学科有信息科学、生命科学、纳米科学等，这些学科的发展都依赖数学的发展。随着科学技术的迅猛发展，人们对数学的依赖越来越深，应用越来越广泛，它几乎遍及人类活动的每一个领域，为我们提供了不断更新的思维方式和应用技术。数学为其它科学领域提供了定量分析和计算方法，加速了科学向技术的转化；数学为人类提供了科学的手段，用其独到而丰富的思维方式来认知世界、模拟世界，为人们改造世界提供了科学的方法论和唯物主义的世界观。

当代科学认为：在宇宙的构成中，我们能看见的明物质只占了极小一部分，而绝大部分是暗物质和暗能量。我们人类当前只对极小一部分的明物质的部分规律有一定的认识，而对于整个宇宙的认识还是个大未知数。要认识茫茫宇宙，就需要物理、化学、天文等学科和方法，而这些学科和方法是建立在数学的基础之上的。可以形象地说，在微观和宇观尺度中，数学不但是人们认识宇宙的望远镜和显微镜，而且也是人们认识宇宙的“B超”和“CT”。

既然如此，探讨数学的思维和发展就是一个非常重要的课题。

本书共分三个部分：

第一篇是围绕着数学及其思维展开的，共七章（第一～七章）。在这里首先探讨数学的涵义和数学的地位及特征；介绍数学思维、数学思维方法和数学思维的特性，阐述数学理论对科技的前瞻性，数学思维和推理与日常人们所具有的思维习惯和逻辑推理能力是相关联的，数学素质在人们的文化素质中的地位。思维，通常指逻辑思维，从数学中常用的逻辑思维方法开始，去思考和探讨某些数学问题；思维是在社会实践的基础上进行的，认识的真正任务在于经过感觉而到达于思维，用辩证唯物主义观点看待数学发展过程中出现的基本矛

## 2 数学的思维与发展

盾，这些矛盾也促进了数学思维的发展；最后简单地介绍了数学思维方法的几次重大的、革命性的突破。

第二篇是探讨数学发展纵横，共八章（第八～十五章），探讨数学产生与发展过程中的几个基本问题。数学产生于现实世界，数学思维与现实世界的相互作用是数学永恒发展的原动力；数学理论的发展随着社会实践的发展而不断完善；数学是一个有机整体，各个部分是普遍联系和发展的；文章强调数学的特殊性，是相对独立发展的学科，数学自身的矛盾是数学发展的内部动力，以及数学家在数学发展过程中的作用；数学发展过程中也有波折性，充满艰难曲折，给现代人一点启示和借鉴。数学发展纵横之“纵”是指从历史的角度看数学的时代划分及划分标准；之“横”是指数学发展的社会性，人们往往发现：在同一时代，不同的国家和民族就会有相应的数学理论产生及相应的数学应用；从“纵横”交错的过程来看，人们更会发现数学发达中心与经济发达中心在地理位置上总是相吻合的，社会经济高度发展的地域往往是数学中心，因此数学发展观也是历史唯物主义的发展观。文章将对历史上发生过的几次数学“危机”，以及每次危机的出现和化解都推动了数学的发展这样的事实给予介绍，在此基础上探讨数学真理的相对性和数学发展的永恒性。

第三篇是探讨数学的现在和未来，共四章（第十六～十九章）。主要阐述数学在当代的发展，对部分新兴学科加以简介；对现代数学成果及特点给予描述；介绍在知识经济和信息时代的今天，数学更是“无处不在，无所不用”，再加上计算机的普及和应用，使数学的地位得到了极大的提高和更全面的应用；最后是以21世纪数学大国问题为核心，介绍21世纪数学问题和中国发展数学的重要规划及“陈省身猜想”。

笔者认为，要展望21世纪数学的发展谈何容易！但是，如果看到数学在当代的发展、数学对于现实生活的影响、以及已经没有哪个领域能够抵御它的渗透，可以这样说，几乎所有的学科都在悄悄地经历着一场数学化的进程；那么数学，特别是现代数学在理论和应用上提出的许多问题，正是人们要探讨和了解的。因此，笔者的一些拙见，甚至本书所涉及的数学内容和某些相关理论，可能引起大家的兴趣，如果能起到抛砖引玉的作用，并参与到这些问题的讨论中来，这就是本书的真实意图。

如有不当之处，敬请广大读者批评指正。

王春陵

2006年10月

# 目 录

## 第一篇 数学及其思维

|                     |    |
|---------------------|----|
| 第一章 数学科学的涵义         | 3  |
| 1.1 数学概念产生及演变       | 3  |
| 1.2 数学科学的定义         | 7  |
| 1.3 数学的归类和比喻        | 12 |
| 第二章 数学科学的特征         | 17 |
| 2.1 高度的抽象性          | 17 |
| 2.2 语言的符号性          | 19 |
| 2.3 严密的逻辑性          | 21 |
| 2.4 内容的辩证性          | 23 |
| 2.5 结构的严谨性          | 25 |
| 2.6 结论的确定性          | 27 |
| 2.7 广泛的应用性          | 28 |
| 2.8 和谐的艺术性          | 28 |
| 2.9 发展的连续性          | 30 |
| 2.10 理论的真理性         | 31 |
| 第三章 数学思维的涵义         | 32 |
| 3.1 思维              | 32 |
| 3.2 数学思维及涵义         | 34 |
| 3.3 数学思维方法          | 42 |
| 第四章 数学思维的特征及作用      | 45 |
| 4.1 数学思维的主要特性       | 45 |
| 4.2 数学与数学思维在科学中的地位  | 49 |
| 4.3 数学思维的功能和贡献      | 50 |
| 4.4 数学思维比数学知识和运算更重要 | 53 |
| 第五章 数学思维中常用的逻辑方法    | 57 |
| 5.1 分析与综合           | 58 |

## 2 数学的思维与发展

|            |                      |           |
|------------|----------------------|-----------|
| 5.2        | 归纳与演绎                | 62        |
| 5.3        | 抽象与概括                | 65        |
| 5.4        | 逻辑的历史的统一             | 70        |
| 5.5        | 其它思维方法               | 73        |
| <b>第六章</b> | <b>数学思维中的几对基本矛盾</b>  | <b>74</b> |
| 6.1        | 未知中的已知               | 74        |
| 6.2        | 变量中的常量               | 77        |
| 6.3        | 曲线中的直线               | 81        |
| 6.4        | 无限中的有限               | 84        |
| 6.5        | 否定中的肯定               | 89        |
| 6.6        | 特殊中与一般               | 92        |
| <b>第七章</b> | <b>数学思维方法的几次重大突破</b> | <b>96</b> |
| 7.1        | 从数字数学到文字数学(从算术到代数)   | 96        |
| 7.2        | 从古典几何学到几何代数化         | 98        |
| 7.3        | 从常量数学到变量数学           | 99        |
| 7.4        | 从精确数学到随机数学           | 101       |
| 7.5        | 从明晰数学到模糊数学           | 102       |
| 7.6        | 从人工证明到数学机械化          | 104       |

## 第二篇 数学发展纵横

|            |                          |            |
|------------|--------------------------|------------|
| <b>第八章</b> | <b>数学产生与现实世界</b>         | <b>109</b> |
| 8.1        | 直接“素材”——数学起源于现实世界        | 109        |
| 8.2        | 数学以演绎推理的形式,能动的反映现实世界     | 114        |
| 8.3        | 数学思维与现实世界的相互作用是数学永恒发展的动力 | 117        |
| <b>第九章</b> | <b>数学理论与社会实践</b>         | <b>120</b> |
| 9.1        | 社会实践对数学理论的产生和发展起了决定性的作用  | 120        |
| 9.2        | 数学理论是随社会实践的发展而不断深化的      | 127        |
| 9.3        | 社会实践需求促进了数学蓬勃的发展         | 128        |
| 9.4        | 现代社会的科学实践中不断地产生了新的数学理论   | 133        |
| 9.5        | 社会生产实践提供了检验数学结论真理性的标准    | 133        |
| <b>第十章</b> | <b>数学是相对独立发展的学科</b>      | <b>135</b> |

|             |                                     |            |
|-------------|-------------------------------------|------------|
| 10.1        | 数学学科的特点之一——发展是连续的 .....             | 135        |
| 10.2        | 数学体系结构的完整性也保证它相对独立地发展 .....         | 143        |
| 10.3        | 数学思维的主要特点之一——更高的抽象推动纯粹数学独立地发展 ..... | 145        |
| 10.4        | 数学研究有时往往是数学家个人和数学团体的独立行为 .....      | 146        |
| <b>第十一章</b> | <b>数学是普遍联系与发展的学科 .....</b>          | <b>150</b> |
| 11.1        | 数的概念的联系与发展 .....                    | 150        |
| 11.2        | 形的发展及联系 .....                       | 155        |
| 11.3        | 数学概念间的联系 .....                      | 159        |
| 11.4        | 数学运算之间的联系和转化 .....                  | 165        |
| <b>第十二章</b> | <b>数学发展过程中的波折性 .....</b>            | <b>170</b> |
| 12.1        | 罗马帝国的扩张侵略使古希腊数学衰落 .....             | 170        |
| 12.2        | 落后的社会制度和生产方式扼杀了数学 .....             | 171        |
| 12.3        | 法西斯统治毁灭了数学中心 .....                  | 173        |
| 12.4        | 保守思想束缚数学发展,使之衰落 .....               | 173        |
| 12.5        | 中国古代数学本身的缺陷和希腊数学的局限 .....           | 173        |
| 12.6        | 数学正确认识往往是一个复杂曲折的过程 .....            | 175        |
| 12.7        | 数学史上的遗憾——几个年轻数学家的不幸遭遇 .....         | 177        |
| <b>第十三章</b> | <b>数学发展的历史性与社会性 .....</b>           | <b>179</b> |
| 13.1        | 数学发展的历史分期 .....                     | 179        |
| 13.2        | 数学发展的社会性 .....                      | 183        |
| 13.3        | 数学的历史性与社会性——数学中心的转移 .....           | 188        |
| <b>第十四章</b> | <b>悖论、危机及发展 .....</b>               | <b>194</b> |
| 14.1        | 无理数的产生而引起的危机与解决大大地推动了数的概念的发展 .....  | 195        |
| 14.2        | “无穷小量”的产生促成数学分析建立庞大的体系 .....        | 196        |
| 14.3        | 数学本身的严格基础是什么? .....                 | 200        |
| 14.4        | 哥德尔的不完全定理 .....                     | 205        |
| 14.5        | 数学中的悖论再认识 .....                     | 206        |
| <b>第十五章</b> | <b>数学真理的相对性与发展的永恒性 .....</b>        | <b>210</b> |
| 15.1        | 数学真理性的提出 .....                      | 210        |
| 15.2        | 实践是检验认识区分真理和谬论的唯一标准 .....           | 212        |
| 15.3        | 数学真理的特性及发展 .....                    | 213        |
| 15.4        | 数学思维的模式真理性与现实世界的客观真理性一致 .....       | 220        |

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 15.5 数学发展的永恒性..... | 221 |
|--------------------|-----|

## 第三篇 数学的现在与未来

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 第十六章 现代数学部分新兴学科简介..... | 227 |
|------------------------|-----|

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 16.1 “三论”与系统科学方法..... | 227 |
|-----------------------|-----|

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 16.2 “超新三论”的系统科学理论方法..... | 231 |
|---------------------------|-----|

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 16.3 发展中的新兴学科..... | 235 |
|--------------------|-----|

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 16.4 “数学前沿”三论..... | 237 |
|--------------------|-----|

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 第十七章 现代数学成果及特点..... | 247 |
|---------------------|-----|

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 17.1 20世纪数学学派对现代数学的影响..... | 247 |
|----------------------------|-----|

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 17.2 历史遗留的数学问题的重大进展与突破..... | 251 |
|-----------------------------|-----|

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 17.3 现代数学新的成果及发展..... | 255 |
|-----------------------|-----|

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 17.4 现代数学的某些特点..... | 256 |
|---------------------|-----|

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 17.5 当代数学向所有文化领域的全面渗透..... | 260 |
|----------------------------|-----|

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 17.6 非线性科学与复杂性问题的研究..... | 261 |
|--------------------------|-----|

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 17.7 数学的国际交流与合作日益广泛..... | 262 |
|--------------------------|-----|

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 第十八章 当代数学的全面应用..... | 264 |
|---------------------|-----|

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 18.1 当代数学在几乎所有的自然科学领域都获得了应用..... | 264 |
|----------------------------------|-----|

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 18.2 当代数学在经济活动、金融保险、管理与预测中起了重大作用..... | 268 |
|---------------------------------------|-----|

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 18.3 现代数学对生产技术和工程技术的应用越来越直接..... | 271 |
|----------------------------------|-----|

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| 18.4 核心数学几乎在所有的分支都获应用,最抽象的一些分支也得到直接应用..... | 275 |
|--------------------------------------------|-----|

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 18.5 当代数学广泛地向社会科学、文学艺术等领域广泛地渗透..... | 275 |
|-------------------------------------|-----|

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 18.6 “数字化”时代..... | 277 |
|-------------------|-----|

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 18.7 计算机的应用扩大和延伸了数学家的脑和手..... | 278 |
|-------------------------------|-----|

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 第十九章 21世纪的数学问题及数学大国..... | 284 |
|--------------------------|-----|

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 19.1 21世纪的数学问题..... | 284 |
|---------------------|-----|

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 19.2 中国应当成为数学大国..... | 288 |
|----------------------|-----|

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 19.3 “中国将走向世界数学强国”..... | 292 |
|-------------------------|-----|

|               |     |
|---------------|-----|
| 19.4 结束语..... | 300 |
|---------------|-----|

|         |     |
|---------|-----|
| 后记..... | 303 |
|---------|-----|

|           |     |
|-----------|-----|
| 参考文献..... | 305 |
|-----------|-----|

# 第一篇

## 数学及其思维

(第一章——第七章)

图 1-1

图 1-2

图 1-3

# 第一章 数学科学的涵义

在人类的知识领域中, 数学是一门古老而又常新的学科, 经过几千年的漫长发展, 没有哪一门科学能像数学这样长久不衰, 至今还表现出旺盛的生命力。在日常生活和工作中数学往往是人们经常谈论的话题和应用的工具, 有时人们不禁要说, 请问: 什么叫数学呢? 这确实是人人都熟悉而又难以回答的问题, 这是因为数学本身是一个历史性的概念, 它的内涵和外延是随着时代变化而变化。数学是人类社会实践的硕果, 具有明显的社会性和历史性, 同时也有理论的发展而产生的创新性。给数学下一个一劳永逸的定义是不可能的, 因为在其发展过程中不可能有固定的、永恒不变的答案; 数学体系极其庞大、错综复杂、高度抽象, 可以说是包罗万象; 展望未来, 其发展趋势永无止境。如果单纯片面地从某一个角度去定义数学, 是会有失偏颇的。尽管如此, 历代许多专家和学者给出了个自的数学定义, 其结论却是不尽相同, 可以说是仁者见仁, 智者见智。笔者也想做一点探讨, 表明自己的想法——从数学的思维和发展及活动规律、特点这个角度进行阐述。

## 1.1 数学概念产生及演变

数学与人类文明同样古老, 有文明就有数学, 缺乏数学不可能有科学的文明, 数学与文明同生并存。数学中最简单的概念在原始社会就产生了, 数的概念(指自然数)具体产生于什么时代, 至今无法准确回答, 有文字记载的历史不过五六千年, 最早的文字记载中就有了数字。

要认识数学, 就要知道什么是数, 首先追溯一下“数”的来历。“数”字在中国的甲骨文中就已经出现了。《殷墟文字甲编》中有“𠄎”字, 经数学史专家们鉴定为“数”字, 是“数”的出处。它表示结绳记数的象形, 整个字反映了用手结绳的形象, 以后演变成篆文“𠄎”, 以及“𠄎”字, 再看这个字左右边, 左部“婁”字表示一串绳结; 是一根杆子上打了许多结, 上下是散乱的绳头; 右边是汉字“支”的象形字写法, 是手里拿着什么东西的样子。右部“支”(Pu)字的上部为“卜”, 下部“又”(攴)表右手; 合起来, 左部表示“结绳记数”, 右部表示“占卜”。由“𠄎”到“𠄎”, 以后又逐渐演变成为“數”, 今天又简化为“数”字。

“数”字是一个多音字, 念法不同意义也不同, 数(shǔ)一般是表示查点和计算, 数(shù)一般表示数目或几个, 数学上表示事物的量的基本概念, 如整数、实数等, 有时“数”也读(shuò)表示多次的意思。总而言之都和数学有关。

中国西周(公元前11—771年)官学以“六艺”为基本教育内容。所谓“六艺”, 即礼、乐、射、御、书、数, 我国儒家经典《周礼》中就列出这“六艺”。“六艺”中的“数”就是数学, “数”的教育是与“术”紧密相联的, 故称“数术”。西周时6岁开始学数学, 从1到10的数目, 10岁儿童节开始学“计”, 即计算能力的培养。

在西方, 英文的数是 number, 来自拉丁文 numerus, 进一步追溯其词根为 nem —, 表示计数 (to count)、次序 (order)、排列 (arrange)。拉丁文 numerus 又源于希腊文 ἀριθμός。这个希腊文也有数 (shǔ) 和数 (shù) 这两种意思。“数学”一词是来自希腊语, 它意味着某种‘已学会或被理解的东西’或“已获得的知识”, 甚至意味着“可获的东西”, “可学会的东西”, 即“通过学习可获得的知识”, 数学名称的这些意思似乎和梵文中的同根词意思相同。这说明: 东西方古代人们在思维方式上的共同之处。

数学, 在我国古代叫算术、算术, 后来叫算学, 又叫数学。中国古代将数学叫做“算术”, 意指“数学是计算的方法和技术”。它显示出数学定义的雏形。这一点很重要, 它体现我国古代数学家对数学的原始观念, 我国古代数学以算为主, 因而叫“算学”。“算术”一词就因此而来, 在《周髀算经》(约公元前 1 世纪)“算术”名称已经通行。因此, 我国古代的算书多以“算术”或“算经”命名。

算的方法叫算术, 数的方法叫算术, 古代“算”字有三种写法: 算、算、祢, 前两个字有记数、计算的意思。而第三个字在《说文解字》有:“示: 神事也”。汉字“算”的字源及其分析:“算”的一个古体是“祢”, 它由两个示(读 qì)字组成。依《说文解字》知, “示, 神事也”。依甲骨文解释, 其上部“二”表“上”, 下部“小”表示“日, 月, 星”。分明是说“祢”字源出于神事和占星。

无论如何, “算术”这个名称在汉代已经通行。正式的使用, 是《九章算术》一书, 它的涵义是指当时的数学全体, 与现代算术的意义不同。还有就是我国古代数学书名不是算术、算经、算法等, 就是缀术、算术、历象术等, 很少用数学作书名的。宋、元两代、中国古代数学发展达到高峰, 南宋大数学家秦九韶 (1202 — 1261)《数书九章》(1247 年)也叫《数学大略》在序言中说:“尝从隐君子受数学。”而朱世杰 (公元 1300 前后)的著作之一叫做《算学启蒙》(1299 年)。

这样, 数学、算学并用一直延续了几百年。直到 70 多年前 (1933) 科学名词审定委员会成立时, 就两个词的统一问题进行讨论, 意见分歧很大, 没有统一结果。1939 年 6 月, 有关部门进行民意测验, 两种意见各半。最后, 当时的国民教育部决定用“数学”, 而不用“算学”。主要理由是: 不仅“数”字历史悠久, 而且在高等教育中“数理”一词已通用, 1939 年 8 月教育部通令全国一律使用“数学”, 并以此为英文 mathematics 的译名。这样在 20 世纪 30 年代末数学、算学等才确定统一叫数学。

mathematics 来源于拉丁文 mathematica, 又源于希腊文 μαθηματικά (μαθημικά)。来自古希腊数学家毕达哥拉斯 (Pythagoras) (约公元前 580 — 前 500)。亚里士多德提出, “数学”一词的专门化使用是源于毕达哥拉斯的想法, 但没有任何资料表明对于起源于爱奥尼亚的自然哲学有类似的思考。但是对于毕达哥拉斯学派来说, 数学是一种“生活的方式”。事实上, 从公元 2 世纪的拉丁作家格利乌斯 (Gellius) 和公元 3 世纪的希腊哲学家波菲利 (Porphyry) 以及公元 4 世纪的希腊哲学家扬布利科斯 (Lamblichus) 的某些证词中看出, 似乎毕达哥拉斯学派对于成年人有一个“一般的学位课程”, 其中有正式登记者和临时登记

者。临时成员称为“旁听者”，正式成员称为“数学家”。这里“数学家”仅仅表示一类成员，而并不是他们精通数学。这样，毕达哥拉斯学派的精神经久不衰。在18世纪，数学史的先驱作家蒙托克莱（Montucla）说，他已听说了关于古希腊人首先称数学为“一般知识”，这一事实有两种解释：一种解释是，数学本身优于其它知识领域；而另一种解释是，作为一般知识性的学科，数学在修辞学，辩证法，语法和伦理学等等之前就结构完整了。蒙托克莱接受了第二种解释。他不同意第一种解释，因为在普罗克洛斯关于欧几里得的评注中，或在任何古代资料中，都没有发现适合这种解释的确证。然而19世纪的语源学家却倾向于第一种解释，而20世纪的古典学者却又偏向第二种解释。但我们发现这两种解释并不矛盾，即说明了很早就有了数学这门课，且数学的地位及优越性是无与伦比的。

在几千年数学发展的历史中，数学已不是当初的数（shǔ）数（shù）和计算，而是成长为一棵根深叶茂分枝众多的大树。为了准确地描述它，许多哲学家和数学家们从不同角度和不同方面作出了很多解释。“数学”一词，从它诞生以来，随着岁月的推移其涵义也在不断的变化，直到现在仍在变化之中，不同的时代赋予它不同涵义。对数学是什么？尤其对数学的本质认识论问题，不同时代的哲学家和数学家都从认识论角度提出不同的理论和观点，但随着数学的发展又暴露出他们认识的片面性或局限性。

数学到底是什么？一位美国数学家曾作过一个不完全的统计：自古以来，“数学”就有200多种不同的定义，这些不同的定义，反映了人们对数学发展过程中的本质和特征的不同认识阶段。有人说：数学是定义的科学，的确如此。

公元前6世纪前，数学主要是关于“数”的研究，在这个时期中国、古埃及、巴比伦、印度等地区发展起来的数学，主要是计数、初等算术与算法，几何学则可看作是应用算术。

到公元前6世纪，古希腊数学的兴起，突出了对“形”的研究。以毕达哥拉斯（Pythagoras）为代表的古希腊学派认为“万物皆数”，数学是对“数”的研究。

公元前4世纪古希腊学者亚里士多德（Aristotes，前384—前322）说“数学是量的科学”。其中“量”的涵义是模糊的，他并没有说明，也很难详尽说明，显然不能单纯理解为“数量”。

直到16世纪，英国哲学家培根（F.Bacom，1561—1626）将数学分为“纯粹数学（pure mathematics）”与“混合数学”（mixed-mathematics）。这里“混合数学”相应于应用数学。所谓的“纯粹数学”他定义为：“处理完全与物质和自然公理相脱离的量的科学”。他认为数学为一种使人“机敏精细”的学问。

伽利略（Galileo, Galilei, 1564—1642）的名言“数学是上帝用来书写宇宙的文字”。

17世纪，笛卡儿（R.Descartes，1596—1650）对数学的看法有微妙的变化，他认为“凡是以研究顺序（order）和度量（measure）为目的科学都与数学有关”。

恰恰是笛卡儿，数学发生了重大的转折，整个17、18世纪，数学家们关注的焦点是运动与变化，牛顿与莱布尼茨制定了微积分之后，数学成为研究数量、形以及运动与变化的学问。从这之后，许多人给数学下定义：

法国数学家拜节·庞斯称 (Poncelet, Jean-victor, 1788 — 1867): 数学为得出必然结论的科学。

英国数学家怀特海 (A.N.Whitehead, 1861 — 1947) 称数学是对于“一切类型的形式的、必然和演绎的推理”的研究。

19 世纪晚期, 集合论的创始人康托尔 (G.Cantor, 1845 — 1918) 给出数学某些特征: “数学是绝对自由发展学科, 它只服从明显的思维。就是说它的概念必须摆脱自相矛盾, 并且必须通过定义而确定地、有秩序地与先前已经建立和存在的概念相联系”。

20 世纪初, 英国哲学家罗素 (Bertrand A.W.Russell, 1872 — 1970) 给出这样定义: “纯粹数学完全由这样一类论断组成, 假定某个命题对某些事物成立, 则可推出另外某个命题对同样这些事物也成立。这里既不管第一个命题是否确实成立, 也不管使命题成立的那些事物究竟是什么, 这样, 数学可以定义为这样一门学科, 我们永远不知道其中所说的是什么, 也不知道所说的内容是否正确”。它的说法从极端的角度强调了数学的自身需要与逻辑方面, 它尽管很有名, 但却很难被人们接受为数学的客观定义。(李文林《数学史概论》第二版第 8 页)

这样 20 世纪初, 英国哲学家罗素等逻辑学派认为: 数学是逻辑的一部分, 数学可以作为逻辑的派生理论。

1900 年, 伟大的数学家希尔伯特 (David Hilbert, 1862 — 1943) 在巴黎大会说“只要一门科学分支能提出大量的问题, 它就充满了生命力”, “数学研究也需要自己的问题”。他还说“据我看来, 数学家们在他们这门科学各分枝的问题提法, 方法和概念中所经常感觉到那种令人惊叹的相似性和仿佛事先有所安排的协调性。其根源就在于思维与经验之间这种反复出现的相互作用”。后来, 作为形式主义学派领袖人物的希尔伯特认为数学是: 无实在含义的形式游戏。

20 世纪 30 年代, 法国的布尔巴基学派 (Bourbakian) 回答说“数学至少纯数学, 就是研究各种结构的一门学问”。

20 世纪 50 年, 前苏联数学家们试图修正恩格斯定义, 认为: “现代数学就是各种量之间的可能, 一般说各种变化着的量的关系和相互联系的数学”。这个量却被赋予丰富的现代定义, 它不仅包括了现实世界的各种空间形式与数量关系, 而且包括了一些抽象的空间形式和数量关系。

在我国, 早在 20 世纪 50 年代, 中国数学家关肇直 (1919 ~ 1982), 根据现代数学对象的新特点提出, 现代数学研究的是“量的关系”。

胡世华教授从质与量的对立统一出发, 说明“现代数学是研究纯粹的量的科学”; 批判用“质与结构的对立”代替“质与量的对立”观点。胡国定教授则从化归的角度说明, “数学对象是纯粹的量”。丁石孙教授则认为: “数学的研究对象是客观世界的和逻辑可能的数量关系和结构关系”。

前苏联数学家柯尔莫哥洛夫 (A.I.Kolmogorov, 1903 — 1987) 在区分数学对象发展的几

个阶段时指出“①数学是作为关于数、量、几何图形的科学；②数学是作为关于量的变化及几何的映象的科学；③数学作为关于一切普遍性、抽象化的数量形式及其空间形式的科学”。

20 世纪 80 年代开始，又出现了<sup>①</sup>对数学定义做出符合时代的修正的新尝试，主要是一批美国学者把数学简单地定义为关于“模式”（patten）的科学：“[数学]这个领域已被称作模式的科学（science of pattern），其目的是揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性”。

这里用“模式”代替“量”，所谓的“模式”有着极广泛的内涵，包括了数的模式，形的模式，运动和变化的模式，推理与通信的模式，行为的模式，……，而这些模式可以是现实的，也可以是想象的；可以是定量的，也可以是定性的。这个定义也引起一些数学家的认同和接受

高隆昌等认为数学是“能对大自然中任意对象予以符号化、量化和形式语言化，从而进行逻辑演算，以揭示大自然规律的科学”。（高隆昌，胡勋玉《数学纵横[M]》成都：四川教育出版社，1992）

2000 年，我国夏林水在《论数学的本质》（哲学研究 2000（9））一文中认为：数学是一门演算的科学。引起很大的争议。

2004 年，郝宁湘与郭贵春认为：“数学是人类为了有效地认知、控制和利用自然界及其客体而创造的一种抽象的、逻辑可能的形式结构或模式。”（科学技术与辩证法 2004 年 2 月 Science, Technology and Dialectics）同样也引起很大的争议。

当然，给出数学定义的哲学家和数学家很多，在这里不一一列举。

## 1.2 数学科学的定义

然而，在 20 世纪以前有关数学的各种定义中，最权威而又为数学界和哲学界都共同接受的定义则是恩格斯的，这是恩格斯在 19 世纪 70—80 年代的著作《反杜林论》中提出的，即大家所熟悉的“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”。这也最经典的，我们印象最深的数学定义。

1988 年出版的《中国大百科全书·数学》卷首列出“数学”条目：“数学是研究现实世界中数量关系和空间形式，简单地说，是研究数和形的科学”。

20 世纪 90 年代初出版的《汉语大词典》定义为：数学是研究现实世界的空间的形式和量的关系的科学。

20 世纪 90 年代末出版的大型工具书《辞海》也给出类似定义。数学 研究现实世界的空间形式和数量关系的科学。

当代许多学者和专家认为现代数学的发展，已经超出“数”和“形”的范围，日趋抽象化，以至于不再有任何原始计数和简单图形的踪影。数学应该是形式、模式、关系和结构等。但是我们认为所谓形式、模式、关系、结构、模型等仅是数学的思维方式，属于方法论的问题，而不是数学的本质。

恩格斯给出的数学定义本质是什么？什么是数学的本质？从以下几个方面谈起：

### （一）数学是“一种研究思想事物的抽象的科学”

应该承认，恩格斯关于数学对象的论述，是对19世纪70年代以前数学所作的概括（严格地说，研究的数学只是十七、八世纪的资料），在那个时代，许多数学领域刚诞生，非欧几何等在数学家中间才得到承认，群论才形成，集合论刚诞生，数理逻辑仅仅是萌芽状态等等。历史在前进，新的东西层出不穷，到现在，代数、几何及数学分析等又有巨大的发展，数学的外延也不断地扩大，产生了许多新的学科，因此现代数学不仅研究一般意义下的数量关系和空间形式，而且还要研究各种可能的变化着“量”的关系和各种形式。但是恩格斯对数学还有这样的论述。

恩格斯在《自然辩证法》中还有这样一句话：“只是在数学——一种研究思想事物（虽然它们是现实的摹写）的抽象的科学——中，才有抽象的同一性及其与差异的对立，而且甚至在这里也不断地被扬弃。”（恩格斯《自然辩证法》北京：人民出版社1971第192页）我们认为这一句话揭示了数学的研究对象和学科性质，对上述的定义作了更广泛的概括和解释，包含这样几个方面：

第一，肯定了数学是现实的摹写：也就是说数学产生于现实世界，由于现实世界在不断变化之中，人们对它的认识也在不断地深化，数学也是如此，并且随着社会实践发展而发展。

第二，强调了数学的研究对象是“思想事物”。“思想事物”含义广泛，除了数量关系和空间形式外，可以包括思维形式、模式、关系和结构等。数学定义应该反映数学研究的对象及其本质属性，恩格斯所说的现实世界已不仅限于物质世界，也包括我们内部的精神世界，否则的话就不称其为“思想事物”。体现在当代，是“思想事物”，使现代数学在人文、社会科学中得到越来越广泛的应用。

第三，数学是“一种研究思想事物的抽象的科学”，也可以这样说，数学定义就是对“一种思想事物”的研究，即研究现实世界的数与形的“思想事物”，是抽象的科学，抽象性是数学一个最根本的属性。并且“有抽象的同一性及其与差异的对立”。差异就是矛盾，事物的发展往往是内部矛盾斗争的结果。这种数与形的抽象科学也是在变化的。

第四，由于数学具有“抽象的同一性及其与差异的对立”的特征。“而且甚至在这里也不断地被扬弃”。“扬弃”简单地说：就是保留合理的，去掉不合理的。数学产生及发展的过程也是扬弃。我们只有站在辩证唯物主义的哲学高度上，才能够认识清楚数学的本质（反映现实世界的数量关系和空间形式的科学）不是固定不变的，也就是说其内涵不断加深，外延不断拓广的。

数学是“一种研究思想事物的抽象的科学”，这句话告诉我们：数学是抽象的科学，且是“一种研究思想事物”的科学。“抽象”是它的特性，“一种研究思想事物”的科学。说明了数与形的广泛性。也避免了对数学作经验主义的界定。从哲学的高度分析现代数学的本质特征，可以发现：恩格斯关于“数学是什么”的论断并未过时，在现代我们可以赋予它新的