Banach
空间上的基和框架

李登峰 薛明志 著

科学出版社
www.sciencep.com

Banach 空间上的基和框架

李登峰　薛明志　著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书首先介绍 Banach 空间上级数和各种基的基本内容，然后着重介绍近年来 Banach 空间上框架的一些主要进展．前三章讨论 Banach 空间上收敛级数、无条件收敛级数、绝对收敛基、无条件基等的基本性质；第四至六章是本书的核心部分，重点介绍 Hilbert 空间上 Bessel 点列、Riesz 基的特征刻画和 Hilbert 空间上框架的基本理论和最新研究结果；第七和八章讨论有限维空间上框架的构造、性质和一般 Banach 空间上框架、原子分解的基本理论．

本书读者对象为数学专业高年级本科生、研究生、教师及相关专业的科技工作者．

图书在版编目（CIP）数据

Banach 空间上的基和框架 / 李登峰，薛明志著．—北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-018846-5

Ⅰ．B… Ⅱ．①李… ②薛… Ⅲ．巴拿赫空间 Ⅳ．O177.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 051182 号

责任编辑：赵彦超/责任校对：陈丽珠

责任印制：赵德静/封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年5月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2007年5月第一次印刷 印张：15 1/2

印数：1－3 000 字数：295 000

定价：36.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉）

前 言

1952 年, Duffin R J 和 Schaeffer A C 在研究非调和 Fourier 级数时引入了 Hilbert 空间上的框架的概念. 但在当时乃至以后相当长时间内, 人们并没有对它给以足够的重视. 自从小波分析诞生以来, 尤其在 1986 年 Daubechies I 等发现使用框架可将$L^2(R)$中函数展开成类似于标准正交基展开的级数后, 许多专业人员才开始研究框架及其应用. Daubechies I [10~12]对框架的研究起了极大的推动作用. 近二十年来, 有关框架研究的文献数以千计, 涌现出许多重要成果. 目前, 框架是应用广泛、生气勃勃的一个数学研究方向, 也是图像处理、数字通信等信息学科的重要工具之一.

一般来讲, 框架的研究分为两种类型: 一种是研究具有特殊形式的框架, 例如$L^2(R)$上的 Gabor 框架、小波(仿射)框架等; 另一种是将框架理论作为泛函分析的一个方向来研究. 不管哪种研究类型, 时至今日所取得的大部分研究成果均分散在国内外不同的期刊上, 利用这些成果撰写一本比较系统而完整的专著已成为可能. 本书的核心内容正是由后一种研究类型所取得的最新研究成果组成, 其中也包括作者的一些工作.

要掌握框架的基本理论, 必须熟练运用泛函分析的某些知识. 因此, 我们有意识地增加了泛函分析基本知识、Banach 空间上级数和 Banach 空间上基的内容, 以便读者查阅. 这些内容都是泛函分析中很成熟的部分, 我们在参阅有关著作的基础上, 根据需要进行了一定取舍, 它们构成了前三章的内容. 由于框架与 Bessel 点列、Riesz 基存在密切关系, 所以第四章主要讨论了 Bessel 点列和 Riesz 基的特征刻画.

第五章和第六章的内容是 Hilbert 空间上框架的基本理论和最新研究结果. 它包括下列内容: 框架的特征刻画与表示、框架与算子、框架算法、框架与基的关系、对偶框架、Riesz-Fischer 点列和满足下框架条件点列、包含 Riesz 基的框架和不包含基的框架、Bessel 框架与无条件框架、框架的基本恒等式、框架(Riesz 基、近 Riesz 基和 Riesz 框架)的扰动、框架之间的等价关系和距离、框架的超出量、局部框架、Feichtinger 猜想、框架算子的逆的逼近等.

由于人们发现有限维空间上的框架在信息处理(例如数字通信)中具有很重要的应用, 所以近几年来对有限维空间上的框架研究引起了研究人员的关注. 第七章讨论有限维空间上框架的性质、构造等内容.

将 Hilbert 空间上框架概念拓广到 Banach 空间上是由 Gröchenig K 在 1991 年给出的, 于是 Banach 空间上的框架作为框架理论的一个新的重要分支而得到

发展. 第八章建立了 Banach 空间上框架的基本理论, 包括 Banach 框架和原子分解的性质、Banach 框架和原子分解的扰动、Banach p 框架和 Banach 框架展开等内容.

由于我们的兴趣使然, 本书没有包括子空间框架、伪框架、外框架、斜框架、G 框架等框架的推广内容.

本书作者多年从事框架理论的研究和教学, 本书即是在授课讲义的基础上经不断修改整理而成. 本书的出版得到了国家自然科学基金（No. 10671062）、河南省自然科学基金（No. 0611053200）、河南省教育厅自然科学基金（No. 2006110001）、河南大学应用数学研究所项目基金和商丘师范学院重点学科“基础数学”、“应用数学”基金的资助. 在此一并表示感谢. 感谢作者的研究生杨利军、程俊芳、李保滨所做的大量工作,也感谢河南大学、商丘师范学院领导和同仁的大力支持.

因能力与兴趣的局限, 我们虽勉力为之, 但本书内容难免有错误和不妥之处. 诚挚欢迎同行的批评指正!

李登峰　薛明志

2006 年 12 月

目　　录

第一章　泛函分析基本知识

本章回顾书中要用到的泛函分析中基本定义和定理 [1~3]. 假定读者熟悉线性空间, 并假设线性空间的数域是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$, 通常用 $\mathbb{F}$ 表示这两个域中任一个, $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$.

§1.1　Banach 空间

为方便, 本节均认为数域为复数域. 若为实数域, 从上、下文可知.

定义 1.1.1　设 X 为线性空间. 如果 $\forall\, x\in X$, 都有一实数 $\|x\|$ 与之相对应, 且满足

(1) $\|x\|\geqslant 0$;

(2) $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;

(3) $\|cx\|=|c|\ \|x\|,\ c\in\mathbb{F}$;

(4) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

则称 X 为赋范线性空间, $\|x\|$ 称为 x 的范数. 一般将赋范线性空间记为 $(X,\|\cdot\|)$. 如果仅有 (1), (3), (4) 成立, 则称 $\|\cdot\|$ 为一个半范数.

一般情况下, 赋范线性空间 X 的范数是清楚的. 但有时为了强调起见, 常常写成 $\|\cdot\|_X$.

定义 1.1.2　假设 X 为赋范线性空间, $x\in X$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 X 中的点列.

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x-x_n\|=0$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 以范数收敛于 x. 在这种情形下, 写作 $x_n\to x$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$;

(2) 如果 $\lim\limits_{m,n\to+\infty}\|x_m-x_n\|=0$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的 Cauchy 列;

(3) 容易证明, 每一个收敛点列一定是 Cauchy 列, 但反之不真. 如果 X 的每个 Cauchy 列是 X 的收敛点列, 则称 X 为完备的. 完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

定义 1.1.3　假设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Banach 空间 X 的点列.

(1) 如果 $\inf\{\|x_n\|\,|\,n\in\mathbb{N}\}>0$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为下有界;

(2) 如果 $\sup\{\|x_n\|\,|\,n\in\mathbb{N}\}<\infty$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为上有界;

(3) 如果对所有 $n\in\mathbb{N}$, $\|x_n\|=1$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为就范的.

定义 1.1.3 中的有界也称为范数有界. 例如, 若 $x_n \to x$, 则 $\|x_n\| \to \|x\|$. 因此所有收敛点列均是上有界点列.

最典型也是最简单的 Banach 空间例子就是 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$. 在 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 上存在许多种范数, 特别可选择下列范数的任何一种

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < +\infty, \\ \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}, & p = +\infty, \end{cases}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 我们常说的 Euclid 范数就是 $p = 2$ 时的 $\|x\|_p$, 即

$$\|x\| = \|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 1.1.4 假设 $(X, \|\cdot\|)$ 和 $(X, |||\cdot|||)$ 均为赋范线性空间. 如果存在常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得 $\forall x \in X$, 有

$$c_1\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant c_2\|x\|,$$

那么称范数 $\|\cdot\|$ 和 $|||\cdot|||$ 等价.

显然, 如果 $\|\cdot\|$ 和 $|||\cdot|||$ 等价, 那么它们具有相同的收敛判别法, 即

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |||x - x_n||| = 0.$$

$\mathbb{C}^n$ 上任何两个范数都等价. 实际上, 有限维线性空间上任何两个范数均是等价的.

例 1.1.5 设可测集 $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$.

(1) 如果 $1 \leqslant p < +\infty$, 定义

$$L^p(\mathbb{E}) = \left\{ f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C} \,\middle|\, \int_{\mathbb{E}} |f(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

$L^p(\mathbb{E})$ 是 Banach 空间, 其范数为 $\|f\|_{L^p(\mathbb{E})} = \left(\int_{\mathbb{E}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$;

(2) 如果 $p = \infty$, 定义

$$L^\infty(\mathbb{E}) = \{ f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C} | f(x) \text{ 在 } \mathbb{E}\text{上本性有界} \},$$

$L^\infty(\mathbb{E})$ 也是 Banach 空间, 其范数为

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{E})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{E}} |f(x)| = \inf\{M \geqslant 0 | |f(x)| \leqslant M \quad \text{a.e.}\};$$

(3) 定义 $C(\mathbb{E})=\{f:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{C}|f$ 在 $\mathbb{E}$ 上连续 $\}$.

如果 $\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{R}$ 的紧子集, 那么 $\mathbb{E}$ 上任何连续函数一定有界. 对 $f\in C(\mathbb{E})$, 定义 $\|f\|_{C(\mathbb{E})}=\sup\limits_{x\in\mathbb{E}}|f(x)|$, 则 $(C(\mathbb{E}),\|\cdot\|_{C(\mathbb{E})})$ 为 Banach 空间.

注意到, 对连续函数来说, $|f(x)|$ 的上确界与 $|f(x)|$ 的本性有界一致, 所以 $C(\mathbb{E})$ 可以作为 $L^\infty(\mathbb{E})$ 的子空间 (这里强调的是范数一致).

例 1.1.6 假设 $c=\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$, 即 c 为复数数列.

(1) 如果 $1\leqslant p<+\infty$, 定义

$$\ell^p(\mathbb{N})=\left\{c=\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\middle|\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^p<+\infty\right\},$$

$\ell^p(\mathbb{N})$ 为 Banach 空间, 其范数为

$$\|c\|_{\ell^p}=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

(2) 如果 $p=\infty$, 定义

$$\ell^\infty(\mathbb{N})=\{c=\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}|\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{为有界数列}\},$$

$\ell^\infty(\mathbb{N})$ 为 Banach 空间, 其范数为

$$\|c\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}=\sup_n|c_n|;$$

(3) 定义 $c_0(\mathbb{N})=\{c=\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}|\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=0\}$. 显然, $c_0(\mathbb{N})$ 为 $\ell^\infty(\mathbb{N})$ 的子空间, 从而 $c_0(\mathbb{N})$ 在 $\ell^\infty(\mathbb{N})$ 的范数下为 Banach 空间.

定理 1.1.7(Hölder 不等式) 固定 p, $1\leqslant p\leqslant+\infty$. 定义 p': $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, 其中约定 $\dfrac{1}{\infty}=0,\dfrac{1}{0}=\infty$.

(1) 如果 $f\in L^p(\mathbb{E}),g\in L^{p'}(\mathbb{E})$, 那么 $fg\in L^1(\mathbb{E})$, 且

$$\|fg\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}},\tag{1.1}$$

特别, 当 $1<p<+\infty$ 时, 式 (1.1) 等价于

$$\int_{\mathbb{E}}|f(x)g(x)|dx\leqslant\left(\int_{\mathbb{E}}|f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{E}}|g(x)|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}};\tag{1.2}$$

(2) 如果 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p(\mathbb{N})$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^{p'}(\mathbb{N})$, 那么 $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1(\mathbb{N})$, 且

$$\|\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1}\leqslant\|\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}\ \|\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^{p'}},\tag{1.3}$$

特别, 当 $1 < p < +\infty$ 时, 式 (1.3) 等价于

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n b_n| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.4}$$

注意到, 如果 $p = 2$, 则 $p' = 2$, 因此有

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}, \quad \|\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} \leqslant \|\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}\|\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}. \tag{1.5}$$

式 (1.5) 通常称为 Cauchy-Schwarz 不等式. $L^2(\mathbb{E})$ 和 $\ell^2(\mathbb{N})$ 是两个典型的 Hilbert 空间例子. 式 (1.5) 在一般 Hilbert 空间中也成立 (见定理 1.2.3 (1)).

现在转向讨论由 X 上范数 $\|\cdot\|$ 诱导出的拓扑.

定义 1.1.8 假设 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间.

(1) 给定 $x \in X, \varepsilon > 0$. 以 x 为中心, 以 ε 为半径的开球定义为 $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$;

(2) 给定 $U \subset X$. 如果 $\forall x \in U$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(x) \subset U$, 则称 U 为 X 中的开集;

(3) 给定 $E \subset X, x \in X$. 如果存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, 使得 $x_n \to x$, 则称 x 为 E 的极限点 (或者聚点);

(4) 给定 $E \subset X$. 如果 $X \setminus E$ 为开集, 则称 E 为闭集. 等价地, E 为闭集当且仅当 E 包含它的所有极限点, 即若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ 且 $x_n \to x$, 则 $x \in E$;

(5) 给定 $E \subset X$. E 的闭包 $\overline{E}$ 定义为包含 E 的最小闭集, 等价地, $E = E \cup \{E$ 的极限点 $\}$;

(6) 给定 $E \subset X$. 如果 $\overline{E} = X$, 则称 E 在 X 中稠密.

定理 1.1.9 假设 V 是 Banach 空间 X 的子空间, 那么 V 在 X 范数下为 Banach 空间当且仅当 V 为 X 的闭子集.

例 1.1.10 假设 $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ 是紧子集, 那么 $C(\mathbb{E})$ 为 $L^\infty(\mathbb{E})$ 的闭子空间. 如果 $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, 则下列两个子集均是 $L^\infty(\mathbb{R})$ 的闭子空间

$$C_b(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),$$

$$C_0(\mathbb{R}) = \Big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \Big| f\text{连续且} \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0\Big\}.$$

定义 1.1.11 如果赋范线性空间 X 包含一个可数稠密子集, 则称 X 为可分的.

例 1.1.12 $L^p(\mathbb{E})$ 和 $\ell^p(\mathbb{N})$ 均为可分的 $(1 \leqslant p < +\infty)$. 但 $p = +\infty$ 时, 两者均不是.

定义 1.1.13 假设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为赋范线性空间 X 的点列.

(1) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的有限线性扩张集定义为

$$\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\sum_{n=1}^{N}c_nx_n\,\middle|\,N>0,c_1,c_2,\cdots,c_N\in\mathbb{F}\right\};$$

(2) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的闭线性扩张集定义为 $\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的闭包, 用 $\overline{\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ 来表示;

(3) 如果 $\overline{\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}=X$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中完全.

§1.2 Hilbert 空间

Hilbert 空间是特殊的 Banach 空间.

定义 1.2.1 假设 H 为线性空间. 如果对任意 $x,y\in H$, 有一个复数 $\langle x,y\rangle$ 满足下列条件:

(1) $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}$ 且 $\langle x,x\rangle\geqslant 0,x\in X$;

(2) $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$;

(3) $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$;

(4) $\langle ax+by,z\rangle=a\langle x,z\rangle+b\langle y,z\rangle,z\in H$.

那么称 $\langle x,y\rangle$ 为 x 与 y 的内积, 相应地, 称 H 为内积空间. 如果 $\langle x,y\rangle=0$, 则称 x 与 y 正交, 记作 $x\perp y$. 对内积空间 H, 可证 $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ 定义 H 上一个范数, 称作由内积诱导出的范数. 因此, 内积空间一定是赋范线性空间. 如果 H 完备, 则称 H 为 Hilbert 空间. 所以, Hilbert 空间一定是 Banach 空间.

线性空间 H 上可以定义许多内积. H 上两个内积等价定义为两个内积诱导出的范数等价.

例 1.2.2 (1) $L^2(\mathbb{E})$ 是 Hilbert 空间, 其内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{E}}f(x)\overline{g(x)}dx,\quad f,g\in L^2(\mathbb{E});$$

(2) $\ell^2(\mathbb{N})$ 是 Hilbert 空间, 其内积为

$$\langle\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n\overline{b}_n,\quad\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2(\mathbb{N}).$$

前面所说, 式 (1.5) 在一般 Hilbert 空间也成立, 即

定理 1.2.3 假设 H 为 Hilbert 空间, $x,y\in H$. 那么

(1) $|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|$, 称为 Cauchy-Schwarz 不等式;

(2) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$, 称为平行四边形法则;

(3) 如果 $x \perp y$, 则 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, 称为勾股定理;

(4) $\|x\| = \sup\limits_{\substack{y \in X \\ \|y\|=1}} |\langle x, y\rangle|$.

正交点列是很有用的, 因此有

定义 1.2.4　假设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Hilbert 空间 H 的点列.

(1) 如果 $\forall m \neq n, \langle x_m, x_n\rangle = 0$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个正交点列;

(2) 如果 $\forall m, n \in \mathbb{N}$,

$$\langle x_m, x_n\rangle = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为就范正交列;

(3) 如果 $\forall x \in H$, 存在唯一数列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使 $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 H 的一个基, 其中级数 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n = x$ 意味着 $\lim\limits_{m\to+\infty} \left\|\sum\limits_{n=1}^{m} c_n x_n - x\right\| = 0$. 第二章将详细讨论级数收敛问题;

(4) 若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 既是就范正交列又是基, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为就范正交基, 此时 $\forall x \in H$, $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle x_n$ (见定理 1.2.7).

例 1.2.5　(1) $\ell^2(\mathbb{N})$ 上的就范正交基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 其中 $e_n = \{\delta_{m,n}\}_{m\in\mathbb{N}}$,

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有时也称为标准正交基;

(2) $L^2([0,1])$ 上就范正交基 $\{e_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 其中 $e_n(x) = e^{i2\pi nx}$, $\mathbb{Z}$ 为整数集合. 众所周知, $\forall f \in L^2([0,1])$, $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n(x)$ 称为 f 的 Fourier 级数, 而 $\{\langle f, e_n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 称为 f 的 Fourier 系数. 通常 f 的 Fourier 系数用 $\hat{f}(n)$ 来表示, 即

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n\rangle = \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi nx} dx.$$

注意, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n(x) = f(x)$ 意味着级数以 $L^2([0,1])$ 范数收敛, 但并不保证点点收敛. 事实上, 存在连续函数的 Fourier 级数在每一点均不收敛 [4].

类似例 1.2.5(2), 如果 $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Hilbert 空间 H 的就范正交基, 则 $\forall x \in H$, 表示 $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, h_n\rangle h_n$ 称为 x 的 Fourier 级数, 相应地, $\{\langle x, h_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 Fourier 系数列.

定理 1.2.6 设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Hilbert 空间 H 的就范正交列.

(1) 级数 $x=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_nx_n$ 收敛当且仅当 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2(\mathbb{N})$, 此时 $\|x\|^2=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^2$, 称为 Plancherel 等式;

(2) 如果 $x=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_nx_n$ 收敛, 则 $c_n=\langle x,x_n\rangle$. 特别, 在表示 $x=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_nx_n$ 的系数 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中, $\{\langle x,x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是唯一的选择;

(3) Bessel 不等式成立：$\forall x\in H$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|\langle x,x_n\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$.

注意, 如果 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 仅是就范正交列, 那么 $\forall x\in H$, x 不一定能写成 $x=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\langle x,x_n\rangle x_n$. 这主要是 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不一定在 H 中完全. 那么 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 何时在 H 中完全呢?

定理 1.2.7 假设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Hilbert 空间 H 的就范正交列, 则下列四条等价：

(1) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 H 中完全;

(2) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 H 的就范正交基;

(3) Plancherel 等式成立：$\forall x\in H$, $\|x\|^2=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|\langle x,x_n\rangle|^2$;

(4) $\forall x\in H$, $x=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\langle x,x_n\rangle x_n$.

假设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Hilbert 空间 H 的就范正交基, 则集合

$$E=\left\{\sum_{n=1}^{N}c_nx_n\,\middle|\,N\in\mathbb{N},\ \mathrm{Re}(c_n),\mathrm{Im}(c_n)\in\mathbb{Q}\right\}$$

是可数集合且为 H 的稠密子集, 这里 $\mathbb{Q}$ 为有理数集合. 因此 H 为可分的. 那么, 反过来呢? 答案是肯定的, 即每个可分 Hilbert 空间均有就范正交基. 更多地, 所有可分 Hilbert 空间都是同构的 (就是空间之间存在线性有界可逆算子, 后面将涉及到这个概念), 总结如下.

定理 1.2.8 假设 H 为 Hilbert 空间. 那么 H 上存在就范正交基当且仅当 H 为可分的. 所有可分 Hilbert 空间均是等距同构于 $\ell^2(\mathbb{N})$, 这里等距就是保范, 见下节定义.

本书考虑的 Hilbert 空间均是可分的.

§1.3 算子 (映射)

假设 X 和 Y 为赋范线性空间. 一个算子 $T:X\to Y$ 就是对 X 中每个元 x, 都有唯一元 $y\in Y$ 与之对应. 如果 $Y=\mathbb{F}$, 则称 $T:X\to\mathbb{F}$ 为 X 上的泛函.

定义 1.3.1 假设 X 和 Y 为赋范线性空间, $T: X \to Y$ 为算子.

(1) 如果 $\forall x_1, x_2 \in X, a_1, a_2 \in \mathbb{F}$, 有

$$T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1Tx_1 + a_2Tx_2,$$

则称 T 为线性的;

(2) 如果 $Tx_1 = Tx_2$ 当且仅当 $x_1 = x_2$, 则称 T 为单射; $\ker T = \{x|Tx = 0\}$ 称为 T 的核. 显然, T 为单射当且仅当 $\ker T = \{0\}$;

(3) $\text{range}\, T = T(X) = \{Tx|x \in X\}$ 称为 T 的像或值域;

(4) 如果 $\text{range}\, T = Y$, 则称 T 为满射或到上的;

(5) 如果 T 既是单射又是满射, 则称 T 为双射;

(6) 如果 $x_n \to x$ 蕴含 $Tx_n \to Tx$, 则称 T 为连续的;

(7) 线性算子 T 的范数 $\|T\|$ 定义为 $\sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y$. 如果 $\|T\| < +\infty$, 则称 T 为有界的;

(8) 如果 $\forall x \in X, \|Tx\|_Y = \|x\|_X$, 则称 T 为保范或等距的.

众所周知, 赋范线性空间上线性算子的有界性与连续性是等价的, 即有

定理 1.3.2 假设 $T: X \to Y$ 是线性算子, 那么 T 连续当且仅当 T 有界.

§1.4 对偶空间

当 X 为无限维空间时, 其上线性泛函并不一定连续. 而 X 上所有线性连续泛函所组成的集合具有特殊的作用. 因此有

定义 1.4.1 假设 X 为赋范线性空间. 那么 X 的对偶空间定义为

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{F} | f \text{ 为 } X \text{ 上的线性连续泛函 }\}.$$

赋范线性空间的对偶空间是 Banach 空间, 其中泛函的范数就是定义 1.3.1 中定义的算子范数, 即

定理 1.4.2 假设 X 为赋范线性空间. 那么 X^* 为 Banach 空间, 其中 $f \in X^*$ 的范数为

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} |\langle x, f \rangle|.$$

定理 1.4.2 表明, $f \in X^*$ 的范数可由 X 上元素 x 所对应的值 $f(x) = \langle x, f \rangle$ 来决定. 那么, $x \in X$ 的范数可否由 X^* 上元 f 所对应的值 $f(x) = \langle x, f \rangle$ 来决定? 答案是肯定的, 即有

定理 1.4.3　假设 X 为 Banach 空间, $x \in X$. 那么

$$\|x\|_X = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*}=1}} |\langle x, f\rangle|.$$

给出任意 Banach 空间的对偶空间的特征描述是比较困难的事情. 然而, 对一些特殊的 Banach 空间, 其对偶空间的特征刻画是可得到的.

例 1.4.4　(1) 当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时, $(L^p(\mathbb{E}))^* = L^{p'}(\mathbb{E})$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, 且约定 $\frac{1}{\infty} = 0$. 当 $p = \infty$ 时, $L^1(\mathbb{E}) \subset (L^\infty(\mathbb{E}))^*$ 是真子空间;

(2) 类似地, 当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时, $(\ell^p(\mathbb{N}))^* = \ell^{p'}(\mathbb{N})$, $(c_0(\mathbb{N}))^* = \ell^1(\mathbb{N})$, 从而, $(c_0(\mathbb{N}))^{**} = (\ell^1(\mathbb{N}))^* = \ell^\infty(\mathbb{N})$.

从例 1.4.4(1) 可看出, $(L^2(\mathbb{E}))^* = L^2(\mathbb{E})$. 但 $L^2(\mathbb{E})$ 为 Hilbert 空间, 那么对任何 Hilbert 空间是否也有类似结论呢? 这就是著名的 Riesz 表示定理.

定理 1.4.5　假设 H 为 Hilbert 空间. 对 $y \in H$, 定义 H 上泛函 $f_y : H \to \mathbb{F}$, $f_y(x) = \langle x, y\rangle$.

(1) 若 $y \in H$, 则 $f_y \in H^*$ 且 $\|f_y\| = \|y\|$;

(2) 若 $f \in H^*$, 则存在唯一的 $y \in H$, 使 $f = f_y$.

定理 1.4.5 说明, 在 H 与 H^* 之间存在一个保范双射. 因此, 通常将 H 和 H^* 看作同一个空间, 即 $H = H^*$, 就是所有 Hilbert 空间是自对偶的.

注意到 X^* 为 Banach 空间, 所以可继续考虑其对偶空间.

定义 1.4.6　X^* 的对偶空间 $(X^*)^*$ 写成 X^{**}. $\forall x \in X$, 它决定一个 $\pi(x) \in X^{**} : \forall f \in X^*, \langle f, \pi(x)\rangle = \langle x, f\rangle$, 即有算子 $\pi : X \to X^{**}, \pi(x)(f) = \langle x, f\rangle, x \in X, f \in X^*$. π 称为 X 典范嵌入到 X^{**} 中 (canonical embedding), 这主要因为 $\pi(X) \subset X^{**}$. 如果 π 为双射, 则 $X = X^{**}$, 此时称 X 为自反的 (reflexive).

例 1.4.7　如果 $1 < p < +\infty$, 则 $L^p(\mathbb{E})$ 与 $\ell^p(\mathbb{N})$ 均是自反的, 但 $p = 1$ 和 $p = +\infty$ 时, $L^p(\mathbb{E})$ 与 $\ell^p(\mathbb{N})$ 均不是.

§1.5　对偶算子

定义 1.5.1　假设 X 与 Y 为 Banach 空间, $S : X \to Y$ 为线性有界算子. 固定 $f_Y \in Y^*$. 定义泛函 $f_X : X \to \mathbb{F}$ 如下:

$$\forall x \in X, \quad f_X(x)(= \langle x, f_X\rangle) = f_Y(Sx)(= \langle Sx, f_Y\rangle).$$

注意到 S 为线性的, 所以 f_X 为 X 上线性泛函. 再注意到 $|f_X(x)| = |f_Y(Sx)| \leqslant \|f_Y\| \cdot \|Sx\| \leqslant \|f_Y\| \cdot \|S\| \cdot \|x\|$, 所以 f_X 有界, 从而 $f_X \in X^*$. 这个讨论表明,

$\forall f_Y \in Y^*$, 可以定义 X^* 上一个元素 f_X. 因此定义算子 $S^* : Y^* \to X^*$, 其作用为 $S^*(f_Y) = f_X$. 算子 S^* 为线性的且

$$\|S^*\| = \sup_{\substack{f_Y \in Y^* \\ \|f_Y\|_{Y^*}=1}} \|S^*(f_Y)\|_{X^*} = \sup_{\substack{f_Y \in Y^* \\ \|f_Y\|_{Y^*}=1}} \|f_X\|_{X^*} \leqslant \sup_{\substack{f_Y \in Y^* \\ \|f_Y\|_{Y^*}=1}} \|f_Y\| \cdot \|S\| = \|S\|.$$

事实上, $\|S^*\| = \|S\|$. 算子 S^* 称为 S 的对偶算子.

由上面定义知, $\forall x \in X,\ f_Y \in Y^*$,

$$\langle x, S^*(f_Y)\rangle = \langle Sx, f_Y\rangle. \tag{1.6}$$

实际上, 满足式 (1.6) 的 $S^* : Y^* \to X^*$ 是唯一的.

当 X 与 Y 均为 Hilbert 空间时, $X = X^*, Y = Y^*$. 因此, 如果 $S : X \to Y$, 那么 $S^* : Y \to X$, 从而由式 (1.6) 知, $\forall x \in X, y \in Y$, 有

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle. \tag{1.7}$$

如果考虑 Hilbert 空间到其本身的线性有界算子, 那么其对偶算子会如何呢?

定理 1.5.2 假设 H 为 Hilbert 空间, $S : H \to H$ 线性有界. 如果 $S = S^*$, 那么称 S 为自伴的, 即 S 自伴当且仅当 $\forall x, y \in H, \langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$. 如果 S 可逆且 $S^{-1} = S^*$, 那么称 S 为 H 上酉算子. 如果 $\forall x \in H, \langle Sx, x\rangle \in \mathbb{R}$ 且非负, 则称 S 为正算子, 用 $S \geqslant 0$ 来表示. 如果 $\forall x \in H, \langle Sx, x\rangle \in \mathbb{R}$ 且 $\forall x \neq 0, \langle Sx, x\rangle > 0$, 则称 S 为正定的, 用 $S > 0$ 来表示. 下列结论成立.

(1) 如果 $S = S^*$, 则 $\forall x \in H, \langle Sx, x\rangle \in \mathbb{R}$ 且

$$\|S\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle Sx, x\rangle|; \tag{1.8}$$

(2) 复 Hilbert 空间上有界正算子一定是自伴的. 对一个正算子 S 来说, 存在唯一有界正算子 V, 使得 $S = V^2$, V 称为 S 的平方根, 并且如果 S 自伴 (可逆), 那么 V 自伴 (可逆);

(3) 如果正定算子 S 可逆, 则 S^{-1} 正定. 再者, 如果 $S : X \to X$ 为自伴正定算子, 则 $\forall x, y \in H,\quad \langle x, y\rangle_1 = \langle Sx, y\rangle$ 定义 H 上一个内积. 因此由 Cauchy-Schwarz 不等式知,

$$\forall x, y \in H, \quad |\langle Sx, y\rangle|^2 \leqslant \langle Sx, x\rangle\langle Sy, y\rangle.$$

此式称为广义 Cauchy-Schwarz 不等式.

第四章以后将用到下列结论.