主编　陈晓莹 张培钰

从中考到竞赛
数学精讲精练1000题

浙江大学出版社

浙江大学出版社
ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
1984

本书以中考为中心，以全国初中数学竞赛为目标，吸取全国各地中考试题之精华，采集全国各地竞赛试题之灵气，授之方法，传之技巧，合理处理好中考与竞赛之间的关系，帮助学生竞赛出成绩，促使学生跨进重点高中和优质高中。

ISBN 7-308-03745-2
9 787308 037457 >

ISBN 7-308-03745-2/G · 721
定价：25.00 元

从中考到竞赛
——数学精讲精练1000题

主编　陈晓莹　张培钰

编者　张培钰　王荣清　王月明

夏秀山　刘　颖　裘乐春

戴作康　李祖燕

浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

从中考到竞赛：数学精讲精练 1000 题／陈晓莹，张培钰主编．—杭州：浙江大学出版社，2004.7
ISBN 7-308-03745-2

Ⅰ.从...　Ⅱ.①陈...②张...　Ⅲ.数学课－初中－习题－升学参考资料　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 063912 号

责任编辑　石国华
出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　**杭州浙大同力教育彩印有限公司**
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　20
字　　数　510 千
版 印 次　2004 年 7 月第 1 版　**2006 年 12 月第 4 次印刷**
书　　号　ISBN 7-308-03745-2/G·721
定　　价　25.00 元

前　言

《初中数学创新教育——从中考到竞赛数学精讲精练1000题》是我们工作在第一线的教师结合自己的教育、教学实际，为正在全面实施的新课程改革和素质教育所作的一种尝试。综观世界，中、小学数学教育质量以我国为最好，究其原因主要是有一大批勤勤恳恳的中、小学数学教师在耕耘，更兼之有各级各类的“数学竞赛”指明了方向。各级各类的数学竞赛都以“激发学生的学习兴趣、开发智力、培养学生的创新能力、开拓学生的视野、发现优秀学生加以培养”为宗旨，从而奠定了雄厚的数学教学基础。竞赛不但培养了学生也提高了教师自身的素质，进一步促进了数学教学。

但是目前在培训中还存在着一些问题。首先是中考与竞赛的矛盾，中考着重的是各科的总成绩，竞赛仅为单科成绩，如果花大量时间于数学竞赛，则可能会影响到其他各科的教学。其次是时间矛盾，全国数学竞赛定于每年4月7日前后，初三学生都在积极准备中考，而各校的兴趣小组活动时间是极其有限的。再是教师辅导的问题，一般学校都不具有专职竞赛辅导教师，而此时的教师也是极忙的时期。最后是辅导教材的问题，目前的辅导资料一般可分为两大类：一类是按初一、初二、初三分册，如果学校能坚持安排从初一开始系统辅导，那么这些书籍是好教材；另一类是奥林匹克训练题，这类训练要求比全国数学竞赛考纲要求更高，难度极大，对绝大多数学生并不适用。

本书以教材（浙教版、北师大版、华东师大版）为主线，以中考为中心，以全国数学竞赛为目标，吸全国各地中考试题之精华，集全国各地竞赛试题之灵气，授之方法，传之技巧，合理处理好中考与竞赛之间的关系，助学生竞赛出成绩，促学生跨进重高和优质高中。

美国NBA是世界篮球比赛之巅，NBA教练采用世界最先进方法进行训练，我们且看一段姚明对记者的话：“……就拿对手录像来说吧，这里都是经过剪辑的，比如对手的防守、进攻都单拎出来成章，甚至连对手有几种进攻套路都帮你剪辑到一起，一目了然……”而本书的条块结合编写手法则是与NBA教练们的做法不谋而合。不仅具有系统

性、严密性，并以“全国数学竞赛考纲”为依据，具有很强的针对性，同时教师在辅导时具有可操作性的特点。

本书每单元配有素质训练题、中考训练题、竞赛训练题，每讲有一份测试卷以备教师了解学生掌握知识的情况。

我们希望将这本书奉献给广大师生，为实践新课程标准贡献一份力量！

陈晓莹

2004 年 6 月于杭州

目　　录

总纲 揭开数学竞赛神秘的面纱

——全国初中数学竞赛题分析

目的:通过试题分析、明了数学竞赛会出些什么类型的题目,与考前复习及升学考之间的关系,使中考复习、竞赛两者有机结合,消除数学竞赛高不可攀的疑虑.

一、综合分析

全国初中数学竞赛试题共 14 题,时间 120 分钟,满分 120 分.下面从各个角度加以分析:

1. 题型(以试题形式来分)

选择题 5 个小题,每小题 6 分,共 30 分;

填空题 5 个小题,每小题 6 分,共 30 分;

解答题 4 个小题,每题 15 分,共 60 分.

2. 题型(以试题内容来分)

几何题:选择题 2 小题,填空题 1 小题,解答题 2 小题,共 48 分,约占 1/3;

代数题:约占 2/3.

3. 考生抽样调查

(1)对某地区某阅卷点抽取了 1000 名考生(含初二年级 25 名考生),得分情况如下表所示.

	120~90	89~80	79~70	69~60	59~50	49~40	39~30	29~0
人数	4	12	61	116	193	236	223	155

(2)从上述考生中抽取了 100 名考生,对每道题得分作了调查,结果如下表所示.

选择题					填空题					解答题					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		14	
												(1)	(2)	(1)	(2)
81	82	75	33	63	80	61	47	74	10	41	75	16	1	18	0

因此,我们将正确率在 60% 以上题归结为基础题,40% ~60% 称之为较难题,40%(黄金分割位 0.382)以下为难题(综合题),并从中列出"智力开发、开放性题".

4. 难易程度分类

(1)基础题;(2)较难题;(3)综合题(难题);(4)开放智力型题.

从中考到竞赛——数学精讲精练1000题

二、试题分析

（一）基础题

基本概念和定理的简单应用（包括教材中出现过的例题及练习题）.

例 1 （2003 年全国竞赛第 1 题）若 $4x-3y-6z=0$，$x+2y-7z=0$（$xyz\neq0$），则代数式 $\dfrac{5x^2+2y^2-z^2}{2x^2-3y^2-10z^2}$ 的值等于（　　）.

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{19}{2}$　　(C) -15　　(D) -13

［分析］ 此题属于代数式求值问题.已知条件是不定方程组，可利用确定主元（如 z），x，y 均用 z 的代数式表示，代入原式即可求得.

解 答案选(D).

由 $\begin{cases}4x-3y-6z=0,\\ x+2y-7z=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3z,\\ y=2z.\end{cases}$ 代入得

原式 $=\dfrac{5\times9z^2+2\times4z^2-z^2}{2\times9z^2-3\times4z^2-10z^2}=\dfrac{45+8-1}{18-12-10}=-13.$

例 2 （2003 年全国竞赛第 3 题）如图 0-1 所示，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$ 等于（　　）.

(A)360°　　(B)450°　　(C)540°　　(D)720°

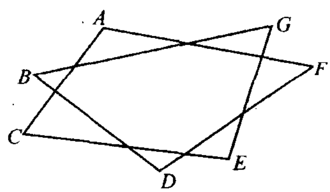


图 0-1

［分析］ 此类题是常见题，不仅课本中有，各类复习资料中均有出现，如《学与用》初一年级（下）（徐海胜主编.北京：华夏出版社，2002.9）有题为：如图 0-2 所示，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$ 的度数.（解略）

解 答案选 C.

例 3 （2003 年全国竞赛第 6 题）已知 $x=\sqrt{3}+1$，那么 $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}$ = ________.

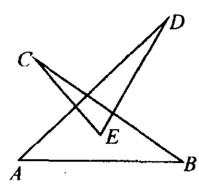


图 0-2

［分析］ 先化简，再求值.（属常规题）

解 答案为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{-4}{x^2-4}+\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{-3}{x^2-4}$，将 $x=1+\sqrt{3}$ 代入，可得其值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

例 4 （2003 年全国竞赛第 7 题）若实数 x,y,z 满足 $x+\dfrac{1}{y}=4$，$y+\dfrac{1}{z}=1$，$z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{3}$，则 xyz 的值为________.

［分析］ 由已知条件联立解方程组，求出 x,y,z 的值，同样，不妨参考《学与用》初一年级（下）（徐海胜主编.北京：华夏出版社，2002.98）题：已知 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}$，$a,b,c$ 互不相等且均不

等于零,求证:$a^2b^2c^2=1$.(证略)

解　答案为1.

因为 $4=x+\frac{1}{y}=x+\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=x+\frac{z}{z-1}=x+\frac{\frac{7}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{7}{3}-\frac{1}{x}-1}=x+\frac{7x-3}{4x-3}$,解得 $x=\frac{3}{2}$,从而 $z=\frac{7}{3}-\frac{1}{x}=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$,$y=1-\frac{1}{z}=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

于是 $xyz=\frac{3}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}=1$.

例5　如图0-3所示,已知电线杆 AB 直立于地面上,它的影子恰好照在土坡的坡面 CD 和地面 BC 上,如果 CD 与地面成 $45°$,$\angle A=60°$,$CD=4\text{m}$,$BC=(4\sqrt{6}-2\sqrt{2})\text{m}$,则电线杆 AB 的长为__________米.

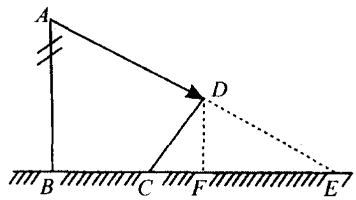


图0-3

[分析]　利用三角函数解题.

解　答案为 $6\sqrt{2}$.

如图,延长 AD 交地面于 E,过 D 作 $DF\perp CE$ 于 F,因为 $\angle DCF=45°$,$\angle A=60°$,$CD=4\text{m}$,所以 $CF=DF=2\sqrt{2}\text{m}$,$EF=DF\cdot\tan60°=2\sqrt{6}\text{m}$.

因为 $\frac{AB}{BE}=\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $AB=BE\times\frac{\sqrt{3}}{3}=(2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+4\sqrt{6}-2\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{2}\text{m}$.

[点评]　常见的还有一类题:A,B,C,D 四点共圆,可根据条件的变化,求一些线段的长.

下面我们进一步探讨"教材、复习资料、中考题、竞赛题"四者之间的关系,进一步认识"竞赛"之"庐山真面目".

例6　利用基础知识如 $a^0=1(a\neq0)$,$1^n=1$,$(-1)^{2n}=1$ 及一元二次方程求根解题.

竞赛题:满足 $(n^2-n-1)^{n+2}=1$ 的整数 n 有__________个.

解　利用 $a^0=1(a\neq0)$,得 $n+2=0$,$n=-2$,代入 $n^2-n-1\neq0$.

利用 $1^n=1$,得 $n^2-n-1=1$,$n=2$,$n=-1$.

利用 $(-1)^{2n}=1$,得 $n^2-n-1=1$,$n=0$,$n=-1$.

所以 $n=0,-1,-2,2$ 四个数.

例7　(2002年全国初中数学竞赛题)如图0-4在△ABC 中 $\angle ABC=60°$,点 P 是△ABC 内的一点,使得 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA$,且 $PA=8$,$PC=6$,则 $PB=$__________.

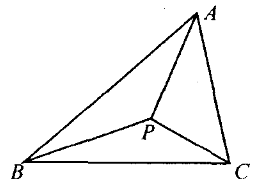


图0-4

[分析]　只要找出三角形相似,而找三角形相似的条件是"两个角对应相等"定理,再用三角形相似的性质则可求得 PB.

解　由条件可知 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=\angle120^0$,而 $\angle PAB=180°-\angle BPA-\angle PBA=180°-120°-\angle PBA=60°-\angle PBA$.

又 $\angle PBC=\angle ABC-\angle PBA=60°-\angle PBA$,所以 $\angle PAB=\angle PBC$,从而得△$ABP\backsim$△BPC,所以 $\frac{PA}{PB}=\frac{PB}{PC}$,$PB=\sqrt{PA\cdot PC}=\sqrt{8\times6}=4\sqrt{3}$.

像这类题平时是做得很多的,如课本(浙江教育出版社《义务教育初级中学课本(试用本)》第五

册)第149页第6题比此题还稍难.

例8　如图0-5,P是$\triangle ABC$内一点,Q是$\triangle ABC$外一点,且$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,求证:$\triangle PBQ \backsim \triangle ABC$.

证明　由$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,得$\triangle ABP \backsim \triangle CBQ$,因此

$$\frac{AB}{BC}=\frac{PB}{BQ}. \qquad ①$$

又$\angle 1+\angle PBC=\angle 2+\angle PBC$,则

$$\angle ABC=\angle PBQ. \qquad ②$$

由①、②可得$\triangle ABC \backsim \triangle PBQ$.

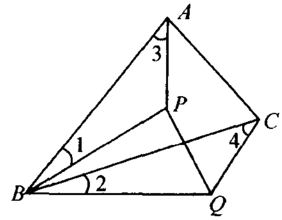


图0-5

例9　(2002年全国初中数学竞赛题)设x_1,x_2是关于一元二次方程$x^2+ax+a=2$的两个实数根,则$(x_1-2x_2)(x_2-2x_1)$的最大值为________.

解　这是韦达定理,二次函数的一个综合应用.

因为原方程$\Delta=a^2-4(a-2)=a^2-4a+8=(a-2)^2+4$恒大于0,所以$\Delta>0$,方程有相异的两实数根$x_1,x_2$.

由韦达定理得　$x_1+x_2=-a$,$x_1\cdot x_2=a-2$.设$y=(x_1-2x_2)(x_2-2x_1)=-2(x_1+x_2)^2+9x_1x_2=-2a^2+9(a-2)=-2a^2+9a-18$,即$y=-2(a-\frac{9}{4})^2-\frac{63}{8}\leqslant-\frac{63}{8}$.

所以当$a=\frac{9}{4}$时,$y_{最大值}=-\frac{63}{8}$.

而现行课本《浙教版》第五册(P53例3):设x_1,x_2是方程$x^2-2(k-1)x+k^2=0$的两个实数根,且$x_1^2+x_2^2=4$,求k值.(解略)

(P104,18)已知二次函数$y=x^2+ax+a-2$.(与竞赛题都相似)

例10　(2002年全国初中数学竞赛题)设$a<b<0$,$a^2+b^2=4ab$,则$\frac{a+b}{a-b}$的值为(　　).

(A)$\sqrt{3}$　　(B)$\sqrt{6}$　　(C)2　　(D)3

解　由$a^2+b^2=4ab$,得$(a+b)^2=6ab$,$(a-b)^2=2ab$.

由于$a<b<0$,　所以$a+b<0$,　得$a+b=-\sqrt{6ab}$.

又$a-b<0$,得$a-b=-\sqrt{2ab}$,所以原式$=\sqrt{3}$.

像此类题平时做得更多.

如《教学月刊》2000年有题:设$a>b>0$,且$a^2+b^2=3ab$,则$\frac{a+b}{a-b}=$________.(仿竞赛题,解略)

例11　(SMJ(2001—2002)中考总复习题)已知:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$,则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$等于(　　)

(A)-1　　(B)1　　(C)1　　(D)不能确定

解　由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$,　得　$(a+b)^2=ab(a+b\neq0,a\cdot b\neq0)$,

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{ab-2ab}{ab}=-1.$$

又如杭州市1996年升学(重高、中考)试题:

已知 $x^2-2xy-3y^2=0$ 且 $x>0,y>0$,那么$\dfrac{x+2y}{x-y}=$__________.

解　$x^2-2xy-3y^2=0$,得$(x-3y)(x+y)=0$,即 $x=3y,x=-y$(舍去),将其代入原式$=\dfrac{5}{2}$.

例 12　(2002年全国初中数学竞赛题)设 a,b,c 为实数,且 $x=a^2-2b+\dfrac{\pi}{3},y=b^2-2c+\dfrac{\pi}{6},z=c^2-2a+\dfrac{\pi}{2}$,则 x,y,z 中至少有一个值(　　).

(A)大于 0　　(B)等于 0　　(C)不大于 0　　(D)小于 0

解　$x+y+z=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+\pi-3$,又因为$(a-1)^2\geqslant0,(b-1)^2\geqslant0,(c-1)^2\geqslant0,\pi-3>0$,所以 $x+y+z>0$,所以 x,y,z 中至少有一个值大于 0.

像这题平时复习、讲课中同样遇到过.

如杭州市学生假日活动中心编《新初三暑期数学思维训练》《初二升初三的暑假活动》中有.

例 13　若 a,b,c 是实数,且 $a+b+c=0,abc=1$,求证:a,b,c 中至少有一个大于$\dfrac{3}{2}$.

证明　不妨设 $a>\dfrac{3}{2}>0$,由已知条件得　$b+c=-a,bc=\dfrac{1}{a}$.

根据韦达定理,b,c 看成是方程$x^2-ax+\dfrac{1}{a}=0$ 的两实数根,则有 $\Delta=a^2-4\times\dfrac{1}{a}\geqslant0,a^3-4\geqslant0,a^3\geqslant4$,所以 $a=\sqrt[3]{4}>\dfrac{3}{2}$,　$[(\dfrac{3}{2})^3=\dfrac{27}{8}<4]$.

(二)较难题

例 14　如图0-6所示,已知 AB 是$\odot O$ 的直径,BC 是$\odot O$ 的切线,OC 平行于弦 AD,过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E,连接 AC,与 DE 交于点 P,问 EP 与 PD 是否相等?证明你的结论.

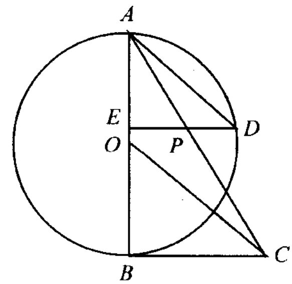


图 0-6

[分析]　圆内问题,经常会联系到三角形相似,本题实质为证明:线段相等.

解　$DP=PE$.

证明　因为 AB 是$\odot O$ 的直径,BC 是切线,所以 $AB\perp BC$.由 $\mathrm{Rt}\triangle AEP\backsim\mathrm{Rt}\triangle ABC$,得

$$\frac{EP}{BC}=\frac{AE}{AB}.\qquad ①$$

又 $AD/\!/OC$,所以$\angle DAE=\angle COB$,于是 $\mathrm{Rt}\triangle AED\backsim\mathrm{Rt}\triangle OBC$,故

$$\frac{ED}{BC}=\frac{AE}{OB}=\frac{AE}{\frac{1}{2}AB}=\frac{2AE}{AB}.\qquad ②$$

由①、②得 $ED=2EP$,所以 $DP=PE$.

例 15　某校初三两个毕业班的学生和教师共100人一起在台阶上拍毕业照,摄影师要将其排列成前多后少的梯形队阵(排数$\geqslant$3),且要求各行的人数必须是连续的自然数,这样才能使后一排的人均站在前一排两人间的空档处,那么,满足上述要求的排列方案有(　　).

(A)1 种　　(B)2 种　　(C)4 种　　(D)0 种

解　答案选 B.

设最后一排有 k 个人,共有 n 排,那么从后往前各排的人数分别为 $k,k+1,k+2,\cdots,k+(n-1)$,由题意可知 $kn+\frac{n(n-1)}{2}=100$,即 $n[2k+(n-1)]=200$.因为 k,n 都是正整数,且 $n\geqslant3$,所以 $n<2k+(n-1)$,且 n 与 $2k+(n-1)$的奇偶性不同,将200分解质因数,可知 $n=5$ 或 $n=8$.当 $n=5$ 时,$k=18$;当 $n=8$ 时,$k=9$,共有两种不同方案.

解后语:(1)虽然此题得分率并不低,但注意到考生的反映,有部分考生并非用上述方法求得,而是凭"经验"或"猜想"而得.对于考生来说"凡要涉及利用整数的性质解题"的题目均感到困难.

(2)解题过程中用到"等差数列,前 n 项求和公式",初中教材是不提及的,但有资料已大胆的把这一公式编入了复习资料,如《学与用》初一下第89页.正如作者所提到的,"绝大部分学生(含小学高年级学生)都知道 $1+2+\cdots+50$ 的值",那么就可以告诉学生"求和"的公式,更何况是参与数学竞赛的学生!现在杭州地区选用的初一数学《华东师大版》新教材也已将这一公式列入教材内容.

从课本到中考复习,最后到数学竞赛,试题可以说"步步高",如下面一组题:

浙江教育出版社《义务教育教材(试用)》第五册第47页例1:已知方程 $x^2-2x-1=0$,求一个一元二次方程,使它的根是原方程的各根倒数.

(解略)

例16 (2001年全国初中数学竞赛题)已知实数 a,b 满足 $a^2+ab+b^2=1$ 且 $t=ab-a^2-b^2$,那么 t 取值范围是________.

[分析] 此题较前面几题难度更大,要从两方面着手:①构造非负数.②构造方程再用 $\Delta\geqslant0$.

解

$$a^2+ab+b^2=1, \qquad ①$$

$$ab-a^2-b^2=t. \qquad ②$$

由①+②得　$2ab=t+1$,故有

$$ab=\frac{t+1}{2}. \qquad ③$$

又因为 $(a+b)^2=(a^2+ab+b^2)+ab=1+ab=\frac{t+3}{2}\geqslant0$,所以 $t\geqslant-3$,且

$$a+b=\pm\sqrt{\frac{t+3}{2}}. \qquad ④$$

由③、④实数 a,b 为方程 $x^2\pm\sqrt{\frac{t+3}{2}}x+\frac{t+1}{2}=0$ 两根,所以 $\Delta=\frac{t+3}{2}-2(t+1)\geqslant0$,解得 $t\leqslant-\frac{1}{3}$,从而得 $-3\leqslant t\leqslant-\frac{1}{3}$.

(三)综合题(难题)

根据抽样调查,2003年全国竞赛题中第10,13(2),14(2)题考生得分率极低,其原因有二:首先,考生对综合问题分析能力还欠缺(像2000年第15题"33层大楼"求"最小值"问题);其次,如果与课本不是紧密型的题材如"整数"、"染色问题"、"抽屉原理"、"极端问题"等,学生就感到困难(如2002年第15题"平方数"、"整数"),显然这类题一多,成绩就下降(如2002年成绩比2003年好,而2004年没有"整数"问题出现,考生成绩更高。).当然数学竞赛并不在乎"平均分",而是在"选拔优秀尖子学生"

或说具有“数学天赋”的学生，加以培养使其成为“中华数学人才”.

例 17　(2003 年全国竞赛题)已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$(其中 a 是正整数)的图像经过点 $A(-1,4)$与点 $B(2,1)$，并且与 x 轴有两个不同交点，则 $b+c$ 的最大值为________.

解　答案为 -4.

由于二次函数的图像经过点 $A(-1,4)$，点 $B(2,1)$，所以 $\begin{cases}a-b+c=4,\\4a+2b+c=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-a-1,\\c=3-2a.\end{cases}$

因为二次函数图像与轴有两个不同交点，所以 $\Delta=b^2-4ac>0$，$(-a-1)^2-4a(3-2a)>0$，即 $(9a-1)(a-1)>0$. 由于 a 是正整数，故 $a>1$，所以 $a\geqslant 2$.

又因为 $b+c=-3a+2\leqslant -4$，且当 $a=2,b=-3,c=-1$ 时满足题意，故 $b+c$ 的最大值为 -4.

例 18　(2003 年全国竞赛题)如图 0-7 所示，$\odot O$ 的直径的长是关于 x 的二次方程 $x^2+2(k-2)x+k=0$(k 是整数)的最大整数根，P 是 $\odot O$ 外一点，过点 P 作 $\odot O$ 的切线 PA 和割线 PBC，其中 A 为切点，点 B,C 是直线 PBC 与 $\odot O$ 的交点，若 PA,PB,PC 的长都是正整数，且 PB 的长不是合数，求 $PA^2+PB^2+PC^2$ 的值.

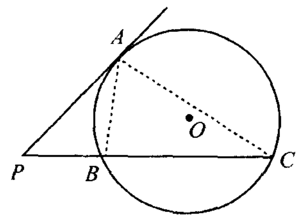


图 0-7

解　设方程 $x^2+2(k-2)x+k=0$ 的两个根为 x_1,x_2，$x_1\leqslant x_2$，由根与系数的关系得

$$\begin{cases}x_1+x_2=4-2k, & ①\\x_1x_2=k. & ②\end{cases}$$

由题设及①知 x_1,x_2 都是整数，从①、②消去 k 得 $2x_1x_2+x_1+x_2=4$，$(2x_1+1)(2x_2+1)=9$.

由上式知 $x_2\leqslant 4$，且当 $k=0$ 时，$x_2=4$，故最大的整数根为 4，于是 $\odot O$ 的直径为 4，所以 $BC\leqslant 4$，因为 $BC=PC-PB$ 为正整数，所以 $BC=1,2,3$，或 4.

连接 AB,AC，因为 $\angle PAB=\angle PCA$，所以 $\triangle PAB\backsim\triangle PCA$，$\frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PA}$，故

$$PA^2=PB(PB+BC). \qquad ③$$

(1)当 $BC=1$ 时，由③得 $PA^2=PB^2+PB$，于是 $PB^2<PA^2<(PB+1)^2$，矛盾.

(2)当 $BC=2$ 时，由③得 $PA^2=PB^2+2PB$，于是 $PB^2<PA^2<(PB+1)^2$，矛盾.

(3)当 $BC=3$ 时，由③得 $PA^2=PB^2+3PB$，于是 $(PA-PB)(PA+PB)=3PB$.

由于 PB 不是合数，结合 $PA-PB<PA+PB$，故只可能有

$$\begin{cases}PA-PB=1,\\PA+PB=3PB,\end{cases}\quad \begin{cases}PA-PB=3,\\PA+PB=PB,\end{cases}\quad \begin{cases}PA-PB=PB,\\PA+PB=3,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}PA=2,\\PB=1,\end{cases}$ 此时 $PA^2+PB^2+PC^2=21$.

(4)当 $BC=4$ 时，由③得 $PA^2=PB^2+4PB$，于是 $(PB+1)^2<PB^2+4PB=PA^2<(PB+2)^2$，矛盾.

综上所述 $PA^2+PB^2+PC^2=21$.

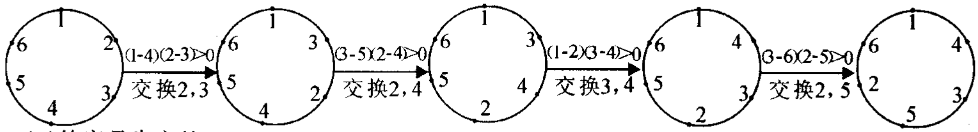
例 19　沿着圆放着一些数，如果有依次相连的 4 个数 a,b,c,d 满足不等式 $(a-d)(b-c)>0$，那么就可以交换 b,c 的位置，这称为一次操作.

(1)若圆周上依次放着数 1,2,3,4,5,6,问能否经过有限次操作后,对圆周上任意依次相连的 4 个数 a,b,c,d,都有 $(a-d)(b-c)\leqslant 0$? 请说明理由.

(2)若圆周上从小到大按顺时针方向依次放着 2003 个正整数 $1,2,\cdots,2003$,问:能否经过有限次操作后,对圆周上任意依次相连的 4 个数 a,b,c,d 都有 $(a-b)(b-c)\leqslant 0$? 请说明理由.

解 (1)能.

具体操作如下:



(2)答案是肯定的.

考虑这 2003 个数的相邻两数乘积之和为 P.

开始时,$P_0=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+2002\times2003+2003\times1$,经过 $k(k\geqslant0)$ 次操作后,这 2003 个数的相邻两数乘积之和为 P_k,此时若圆周上依次相连的 4 个数 a,b,c,d,满足不等式 $(a-d)(b-c)>0$,即 $ab+cd>ac+bd$,交换 b,c 的位置后,这 2003 个数的相邻两数乘积之和为 P_{k+1},有

$$P_{k+1}-P_k=(ac+cb+bd)-(ab+bc+cd)=ac+bd-ab-cd<0,$$

所以 $P_{k+1}-P_k\leqslant-1$,即每一次操作,相邻两数乘积的和至少减少 1.

由于相邻两数乘积总大于 0,故经过有限次操作后,对任意依次相连的 4 个数 a,b,c,d,一定有 $(a-d)(b-c)\leqslant0$.

竞赛中最后一题均属综合提高,考察学生的综合解题能力,要求学生知识面广,分析问题能力强,是区分高低分的一个重要衡量题.要解决这问题,除学生本身应具数学的高素质外,还要求学生多读一些竞赛读本,多观察实际生活中的一些问题,同时要求辅导教师能在这方面进行有针对性的复习.

例 20 判断抛物线 $y=x^2-(m^2-4m+\frac{5}{2})x-2(m^2-4m+\frac{9}{2})$ 与 x 轴交点个数.

解 先确定与 x 轴有无交点坐标.

$$\begin{aligned}\Delta&=(m^2-4m+\frac{5}{2})^2+8(m^2-4m+\frac{9}{2})\\&=(m^2-4m)^2+5(m^2-4m)+\frac{25}{4}+8(m^2-4m)+36\\&=(m^2-4m)^2+13(m^2-4m)+\frac{169}{4}=(m^2-4m+\frac{13}{2})^2=[(m-2)^2+\frac{5}{2}]^2,\end{aligned}$$

无论 m 取何数,$\Delta>0$ 有两个交点.

从此过程中,可以得知 Δ 是一个完全平方式.

例 21 m 无论取何值,抛物线 $y=x^2-(m^2-4m+\frac{5}{2})x-2(m^2-4m+\frac{9}{2})$ 一定经过一定点,求出这点的坐标.

解法一 $y=x^2-\frac{5}{2}x-9-(m^2-4m)x-2(m^2-4m)=x^2-\frac{5}{2}x-9-(m^2-4m)(x+2)$.

当 $x=-2$ 时,则 $(m^2-4m)\times0=0$ 与 m 无关,得 $y=0$,故经过定点为 $(-2,0)$.

解法二 因为抛物线经过定点,所以令 $m=0$,得

$$y=x^2-\frac{5}{2}x-9. \quad ①$$

由 $m=1$,得

$$y=x^2+\frac{1}{2}x-3. \quad ②$$

由①、②得:$3x+6=0,x=-2$.代入求得 $y=0$,故定点为$(-2,0)$.

例 22　(2001 年杭州市中考题)若方程 $x^2+2px-q=0$(p,q 是实数)没有实数根.

(1)求证 $p+q<\frac{1}{4}$.(2)试写出上述命题的逆命题.(3)判断(2)中的逆命题是否正确,若正确,请加以证明,若不正确,请举一反例证明.

解　(1)因为方程 $x^2+2px-q=0$ 无实数根,所以 $\Delta=4p^2+4q<0$,则 $p^2+q<0,q<-p^2,p+q<-p^2+p=-(p-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$,所以有 $p+q<\frac{1}{4}$.

(2)逆命题为:如果 $p+q<\frac{1}{4}$,则方程 $x^2+2px-q=0$(p,q 是实数)没有实数根.

(3)逆命题不正确.如当 $p=1,q=-1$ 时,$p+q<\frac{1}{4}$,但原方程 $x^2+2px-q=0$ 有实数根 $x=-1$.

综合上述三例得以下三个结论①完全平方式(数),②与参数 m 无关(解法二),③逆命题如果不正确可举一反例,若正确必须给予证明.利用上述三个结论就不难证明下题.

例 23　(2002 年全国初中数学竞赛题)如果对于一切 x 的整数值,x 的二次三项式 ax^2+bx+c 都是平方数(即整数的平方),证明:(1)$2a,2b,c$ 都是整数;(2)a,b,c 都是整数,并且 c 是平方数.反过来,如果成立,是否对于一切 x 的正数值,ax^2+bx+c 的值都是平方数?

证明　(1)令 $x=0$ 得平方数 l^2,所以 c 是整数,令 $x=\pm1$,得 $a+b+c=m^2,a-b+c=n^2$,其中 m,n 都是整数,所以 $2a=m^2+n^2-2c,2b=m^2-n^2$ 都是整数.

(2)如果 $2b$ 是奇数 $2k+1$(k 是整数),那么令 $x=4$ 得 $16a+4b+l^2=h^2$,其中 h 是整数.

由于 $2a$ 是整数,所以 $16a$ 被 4 整除,$16a+4b=16a+4k+2$ 除以 4 余 2,而 $h^2-l^2=(h+l)(h-l)$.在 h,l 的奇偶性不同时,$(h+l)(h-l)$是奇数;在 h,l 的奇偶性相同时,$(h+l)(h-l)$被 4 整除.

因此 $16a+4b\neq h^2-l^2$,从而 $2b$ 是偶数,b 是整数,$a=m^2-c-b$ 也是整数,在(2)成立时,ax^2+bx+c 不一定对 x 的整数值都是平方数.

例如　$a=2,b=2,c=4,x=1$ 时,$ax^2+bx+c=8$ 不是平方数解.

(2)的另解:令 $x=\pm2$,得 $4a+2b+c=h^2,4a-2b+c=k^2$,其中 h,k 为整数,两式相减得 $4b=h^2-k^2=(h+k)(h-k)$.由于 $4b=2(2b)$是偶数,所以 h,k 的奇偶性相同,$(h+k)(h-k)$被 4 整除.

因此,b 是整数,$a=m^2-c-b$ 也是整数.

(四)开放智力型题

此类题包含:(1)贴近生活的应用题;(2)智力型;(3)条件、结论不确定,条件变化所得结论不同.

例 24　(2003 年全国竞赛题)在本埠投寄平信,每封信质量不超过 20g 时付邮费 0.80 元,超过 20g 而不超过 40g 时付邮费 1.60 元,依次类推,每增加 20g 需增加邮费 0.80 元(信的质量在 100g 以内),如果某人需寄一封信的质量为 72.5g,那么他应付邮费(　　).

(A)2.4 元　　(B)2.8 元　　(C)3 元　　(D)3.2 元