中学数学学习与思维丛书

高中代数内容方法技巧

（下册）

张乃达　汤希龙　主编

长春出版社

中学数学学习与思维丛书

高中代数内容方法技巧

新登(吉)字第 10 号

高中代数内容方法技巧(下册)

张乃达　汤希龙　主编

责任编辑:李凤畋　　封面设计:庄宝仁

长春出版社出版　　新华书店总店北京发行所发行
(长春市建设街 43 号)　　长春市第十一印刷厂印刷

开本:787×1092　1/32　　1992 年 7 月第 1 版
印张:9.5　　1992 年 7 月第 1 次印刷
字数:213 000　　印数:1—9850 册

ISBN　7—80573—556—5/G·213　　定价:4.30 元

出版者的话

思维是“地球上最美的花朵。”著名哲学家加里宁说：“数学是思维的体操。”数学是一种完美的思维形式，它充满了思维的光辉，到处闪烁着思维的火花，无处不激荡着思维的波澜。伟大导师马克思、恩格斯就曾把数学演算当作最大乐趣。从某种意义上说，“数学就是教人思维”，数学的真谛就在于思维。思维又是数学的灵魂与精髓。数学教育不仅要向受教育者传授知识，更重要的是要启迪思维，拨响思维的琴弦，爆发出智慧的火花。

中学是开发智力、培养科学思维的黄金季节。“英雄出少年”在数学领域尤为明显。一些数学巨匠和天才，往往从中学时代就已崭露头角，其成功的秘诀之一，就是重视思维的训练和培养。因此，数学教学必须重视“思维的训练”。只有思维灵活、敏捷和具有深邃的洞察力，才能学习得更好，才能驾驶数学之舟，由“必然王国”驶向“自由王国”。

正是基于以上的认识，我们组织出版了《中学数学学习与思维丛书》。这套丛书本着“指导学习，激励思维”的宗旨，由一些对数学思维教育颇有造诣的特级教师和高级教师担任主编或作者。

本《丛书》不同于一般的题解和习题集，在编排内容上十分突出学科的基本结构，并将其作为研究解题技巧的出发点与归宿。

本《丛书》又不同于一般的辅导读物和学习指南，它是以解题为中心，以“思维链”为契机，努力把理论观点寓于解题过

程之中，并力求充分暴露思维过程。

本《丛书》也不同于其他的精编、荟萃，更不囿于“解题术”的框架，而是帮助读者建立良好的认知结构，发展数学观念系统，掌握思维方法与思维规律，增进运筹思维的技能和提高思维的迁移能力。

本《丛书》体例新颖、形式独特，除了注意语言的可接受性外，还兼顾各年级学生的语言习惯，力求生动、有趣味性，同时又尽可能地使用框图、图表等，以增加信息密度、突出强度。

本《丛书》集知识性、实用性、科学性于一体，结构合理，独具匠心。愿这套丛书能成为广大中学生和自学青年的良师，更希望她能成为广大数学教师、学生家长等关心青少年思维发展者的益友。

前　　言

本书是《中学数学学习与思维丛书》中的一种，供中学生学习和复习高中代数下册(必修)时使用。

随着高中毕业会考制度的实施，对高中数学的内容和要求均作了适当的调整，为了满足不同层次的广大高中学生学习和复习数学的需要，我们编写了此书。

古人云："学而不思则罔，思而不学则殆。"学习与思维是学习活动中的两个重要环节。本丛书的编写宗旨就在于"指导学习、激励思维"。意图通过对中学数学内容、结构、方法和技巧的分析，帮助学生实现学好数学知识、形成数学能力，提高精神素质的目的。

本书是根据高中代数下册(必修)课本编写的。为了适应高中毕业会考以及高中升学考试的不同需要，全书分上、下两编。

上编(1～4)章采用线性编写结构，其顺序严格与课本同步，以适应高中毕业会考对高中代数下册教学的要求，全编以课题(小节)为基本单元。在课题中分设"知识讲解"、"技能训练"、"方法剖析"、"解题指导"等专栏。其中"知识讲解"着重阐明重要的概念、定理产生的背景和根据，分析定理、公式推导和思路，揭示知识间的层次结构和内部联系，以达到帮助学生透彻地理解数学知识的目的。"技能训练"则围绕着重要的技能训练点，设置若干个题组，总结解决常规问题的具体步骤，提供技能训练题，让学生通过多次、反复的练习，形成熟练的技能，为数学思维的训练扫清障碍并打好基础。

“解题指导”与“方法剖析”是帮助学生发展数学思维能力的主要辅导材料，它们分别围绕着典型例题或典型的方法，着重分析解决问题的思维过程。为了卓有成效地发展学生的数学观念和激发学生的数学思维活动，在上述分析中，又特别注意揭示问题的概略性解决问题的一般方法。

本书的下编(第 5 章)在上编的基础上，着重对高中代数的学科结构作出高度的概括和深入的阐述。并在此基础上系统地介绍了各种常用的解题方法和技巧，分析了它们产生的背景和根据，希望通过对解决较复杂的问题的思维过程的分析，来对学生进行系统的思维训练，提高他们分析问题解决问题的能力，以达到高考对代数(下册)考查的要求。因而这部分材料也可以供参加高考的学生作代数总复习时使用。

本书由张乃达(特级教师)、汤希龙(特级教师)主编，由沈倩文(特级教师)、张振国(特级教师)编写。由汤希龙统稿，张乃达、汤希龙定稿。昌明老师复核了习题答案。

衷心地希望广大同行及读者提出宝贵意见。

张乃达　汤希龙

1992 年 3 月于扬州

目　　录

上　　编

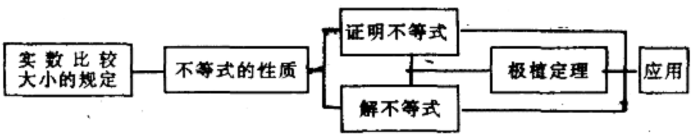
下　编

上　　编

第一章　不等式

内容提要

本章的知识结构如下图：



学习本章应注意如下问题：

1. 不等式的性质是证明不等式与解不等式的依据，只有透彻地掌握这些性质，才能学习好本章.

2. 要熟练地掌握几种证明不等式的常用方法：如比较法、分析法、综合法、收缩法等.

3. 熟练地掌握一元二次不等式的解法，并在此基础上会解简单的高次（分式）不等式、指数不等式、对数不等式、无理

不等式、含有绝对值的不等式等等.

4. 证明不等式及解含有参数的不等式是本章学习的难点，一方面要控制这类问题的难度，另一方面要注意掌握化归的思想、分类讨论的思想对解决数学问题的指导作用.

1.1 不等式

技能训练

1. 实数大小的比较

定义　在数轴上，右边的点表示的数比左边的点表示的数大.

根据上述定义，得到比较两实数大小的法则：

> **法则**　$a-b>0\Longleftrightarrow a>b$;
> $a-b=0\Longleftrightarrow a=b$;
> $a-b<0\Longleftrightarrow a<b$.

由此可得比较两实数大小的一般方法

> **着眼点**　回到定义去.
> **思　路**　作差→确定差的正负→比较大小.

例 1　比较 a^4-b^4 与 $4a^3(a-b)$ 的大小.

解　$(a^4-b^4)-4a^3(a-b)=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3-4a^3)$

$=(a-b)[(a^2b-a^3)+(ab^2-a^3)+(b^3-a^3)]$

$=-(a-b)^2(3a^2+2ab+b^2)$

$=-(a-b)^2[(\sqrt{3}a+\frac{b}{\sqrt{3}})^2+\frac{2b^2}{3}]\leqslant 0$

（当且仅当 $a=b$ 时取等号）.

$\therefore a^4-b^4\leqslant 4a^3(a-b)$.

例 2 若 $x<-1$，比较 $\sqrt{4x^2+4x+1}$ 与 $\sqrt{9-12x+4x^2}$ 的大小.

思路 作差 $\longrightarrow$ 判定正负 $\longrightarrow$ 确定大小.

解 $M=\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{9-12x+4x^2}$

$=|2x+1|-|2x-3|$

$\because x<-1$，$\therefore 2x+1<-1$，$2x-3<-5$.

$\therefore M=-(2x+1)+(2x-3)=-4<0$.

$\therefore \sqrt{4x^2+4x+1}<\sqrt{9-12x+4x^2}$.

例 3 设实数 a、b、c 满足 $b+c=6-4a+3a^2\cdots$①，$c-b=4-4a+a^2\cdots$②，试确定 a、b、c 间的大小关系.

思路 作差 $c-b$，$b-a\longrightarrow$ 判定大小.

解 $\because c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0$，

$\therefore c\geqslant b$. 为了比较 a 与 b 的大小，从已知关系中消去 c，由①－②得 $b=1+a^2$.

$\therefore b-a=1+a^2-a=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$

$\therefore b>a$.

综上所述，有 $c\geqslant b>a$.

同步练习

1. 设 $x+y>0$，比较 x^3+y^3，x^2y+xy^2 的大小.

2. 比较 x^3 与 $2x^2-x+2$ 的值的大小.

3. 比较 $\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

4. 设 $a>0,b>0$,比较 $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ 与 $\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$ 的大小.

标准化自测题

1. 已知 $0<a<b<1$,下列不等式必定成立的是(　　).

   (A) $\log_a b<1$;　(B) $\log_a b<0$;

   (C) $0<\log_a b<1$;(D) $\log_a b<-1$.

2. 设 $a\in R$,下面式子正确的是(　　).

   (A) $-3a<-2a$;(B) $a^{10}<a^{11}$;

   (C) $\frac{1}{a}<a$;　(D) $3-2a>1-2a$.

3. 设 $1<x<10$,那么 $(\lg x)^2$、$\lg x^2$、$\lg(\lg x)$ 三数之间的大小顺序是____________.

4. 若 $a>b>c>1$,将 abc、ab、bc、ac 由小到大的顺序排列是________________.

1.2 不等式的性质

知识讲解

1. 不等式的性质

不等式最基本的性质是:

(1) $a>b\Longleftrightarrow b<a$(对称性);

(2) $a>b, b>c \Longrightarrow a>c$(传递性);

(3) $a>b \Longleftrightarrow a+c>b+c$(加法单调性);

(4) 若 $c>0, a>b \Longleftrightarrow ac>bc$;

若 $c<0, a>b \Longleftrightarrow ac<bc$(乘法单调性);

其中(2)只能"单向推出",即 $a>b, b>c$ 是 $a>c$ 成立的充分不必要条件,而其余3项(即(1)、(3)、(4)可以"双向推出",即左端是右端成立的充要条件.因此,不仅是证明不等式的依据,而且是解不等式的依据.

从上述不等式的基本性质,可以推出如下性质:

(5) $a>b, c>d \Longrightarrow a+c>b+d$(相加法则);

(6) $a>b, c<b \Longrightarrow a-c>b-d$(相减法则);

以上两点常被称为"同向不等式可以相加,异向不等式可以相减."

(7) $a>b>0, c>d>0 \Longrightarrow ac>db$(相乘法则);

(8) $a>b, ab>0 \Longrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$(倒数法则);

(9) $a>b>0, 0<c<d \Longrightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$(相除法则);

其中(7)、(9)常被称为"同正同向不等式可以相乘;同正异向不等式可以相除".

(10) $a>b>0, n\in Z$,且 $n>1 \Longrightarrow a^n>b^n$(乘方法则);

(11) $a>b>0, n\in Z$,且 $n>1 \Longrightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$(开方法则).

在记忆上述各项法则时,必须注意:第一,凡涉及到乘、除、乘方、开方的性质,均要在不等式两边同为正的情况下进行(若为负的,则先将其化归为正的);第二,分清"单向推出"与"双向推出",前者只作为证明不等式的依据,后者不仅可以用来证明不等式,而且可以用来对不等式进行同解变形,因此

也是解不等式的依据.

技能训练

例1 若 $b<a<0$，$d<c<0$，两不等式相乘，相除有何结论？

思路 负数转化为正数$\longrightarrow$再利用性质.

解 由条件易得 $-b>-a>0$，$-b>-c>0$，

由性质(7)，得 $(-b)(-d)>(-a)(-c)\Rightarrow bd>ac$.

$$\frac{-b}{-c}>\frac{-a}{-a}\Rightarrow\frac{b}{c}>\frac{a}{b}.$$

例2 在实数范围内，回答下列问题：

(1) 若 $ac>bc$，是否一定有 $a>b$?

(2) 若 $ac^{-2}>bc^{-2}$，是否一定有 $a>b$?

(3) 若 $b<a<0$，是否一定有 $a^{-1}<b^{-1}$?

解 (1) 不一定有 $a>b$. 显然，若 $c>0$，则有 $a>b$；$c<0$ 则有 $a<b$；$c=0$ 时，则有 $a=b$.

(2) $\because c^{-2}$必大于零，$\therefore$一定有 $a>b$.

(3) 若 $b<a<0$，则 $-b>-a>0$. 根据性质(8)，有

$$-\frac{1}{b}<-\frac{1}{a}，即\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$$

$\therefore$必定有 $a^{-1}<b^{-1}$.

例3 求证：$a>b>0$，$c<d<0$，$e<0\Longrightarrow\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

证明 $$\left.\begin{array}{l}a>b>0\\ c<d<0\end{array}\right\}\Longrightarrow a-c>b-d>0\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-d}\\ e<0\end{array}\right\}\Longrightarrow\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}.$$

同步练习

1. 判断下列命题的真假.

(1)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$; ( )

(2)若 $a>b$,则 $|a|>|b|$; ( )

(3)若 $|a|>|b|$,则 $a>b$; ( )

(4)若 $|a|>|b|$,$c\neq 0$,则 $|a|c>|b|c$; ( )

(5)若 $a>b$,且 $a>0$,则 $a^2>ab$. ( )

2. 选择题.

(1)$a>b>c$,则一定成立的不等式是( ).

(A) $ac>bc$; (B) $|ac|>|bc|$;

(C) $ac^2>bc^2$ (D) $b(a-b)>c(a-b)$

(2)已知 $x<a<0$,则一定成立的不等式是( ).

(A) $x^2<ax<0$; (B) $x^2>ax>a^2$;

(C) $x^2<a^2<0$; (D) $x^2>a^2>ax$.

(3)已知 $x<1$,则一定成立的不等式是( ).

(A) $\frac{1}{x}>1$; (B) $x^2<1$;

(C) $x^3<1$ (D) $|x|<1$.

(4)α、β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,则 $\alpha-\beta$ 的范围是( ).

(A) $-\pi<\alpha-\beta<0$; (B) $-\pi<\alpha-\beta<\pi$;

(C) $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$; (D) $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

标准化自测题

1. 判断下列命题的正误：

(1) $ac^2>bc^2 \Longrightarrow a>b$； ( )

(2) $a>b \Longleftrightarrow a^3>b^3$； ( )

(3) $ab<0, a>b \Longrightarrow \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$； ( )

(4) 若 $ac^3>bc^3 \Longrightarrow a>b$； ( )

(5) 若 $\sqrt[n]{a^2}>\sqrt[n]{b^2} \Longrightarrow a>b(n\in N)$． ( )

2. 已知 $a<b<|a|$，下列各式中成立的是( )．

(A) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$； (B) $ab<1$；

(C) $\dfrac{a}{b}>1$； (D) $a^2>b^2$．

3. a、b 均为实数，c 为有理数，若有 $a^c>b^c$，则有( )．

(A) $a>b>0, c<0$； (B) $a>b, a>0, c>0$；

(C) $b>a>0, c<0$； (D) $b>a>0, c>0$．

4. 若 $a>0>b, 0>c>d$，则以下不等式中不成立的是( )．

(A) $ac<bd$； (B) $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$；

(C) $a+c>b+d$； (D) $a-d>b-c$．

5. 已知 $6<x<10, \dfrac{\pi}{2}\leqslant y<2x$，则 $x+y$ 的值的范围是( )．

(A) $(9,30)$； (B) $[9,30)$；

(C) $(9,30]$； (D) $[9,30]$．

6. 设 x、y、z 均为大于 -1 的负数，则下列不等式中恒成立的是( )．

(A) $x+y+z<-3$； (B) $xyz>-1$；

(C) $x^2-y^2-z^2<0$； (D) $(xyz)^2>1$．