Http://www.nwpup.com

FUDAO JIANGAN

精品课程 名师讲堂

● 本讲内容聚焦 ● 典型例题精选 ● 课后作业

概率论与数理统计

辅导讲案

主讲教材《概率论与数理统计》(浙大·第三版)

赵选民 编

西北工業大學出版社

JIANGAN

Http://www.nwpup.com

概率论与数理统计
辅导讲案

——主讲教材《概率论与数理统计》（浙大·第三版）

赵选民 编

西北工業大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导讲案/赵选民编.—西安:西北工业大学出版社,2007.8
(精品课程·名师讲堂丛书)
ISBN 978-7-5612-2232-4

Ⅰ.概… Ⅱ.赵… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 086024 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号,邮编:710072
电　　话:(029) 88493844　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西天元印务有限责任公司
开　　本:850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张:11.375
字　　数:377 千字
版　　次:2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
定　　价:16.00 元

前　　言

概率论与数理统计是理工科、经济管理学科一门重要的基础课，也是工学、经济学硕士研究生入学考试的一门必考科目。在概率、统计、随机过程的学习中，许多初学者深感内容难懂，习题难做。为了满足广大读者课程学习及考研复习准备的需要，根据作者多年从事概率统计课程教学以及考研辅导班讲课的经验，编写了本书。

本书是参考浙江大学编《概率论与数理统计》（第三版）的章节次序来编写。全书分为 12 讲，内容包括随机事件及其概率，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，极限理论，样本及抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析，随机过程的基本知识，马尔可夫链，平稳随机过程等。每讲内容设计了 3 个板块：

一、本讲内容聚焦。

二、典型例题精选。

三、课后作业。

书后附录中列出了原书的课后习题全解和课程考试真题及解答。

通过以上几个层次的学习与训练，使读者正确理解概率、统计课程的基本概念，掌握解题的方法与技巧，提高综合分析问题及解决问题的能力。

由于作者水平所限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2007 年 5 月于西北工业大学

目　录

第1讲 概率论的基本概念

1.1 本讲内容聚焦

一、内容要点精讲

(一) 随机事件及其运算

1. 随机试验

在概率论中将以下三个特点的试验称为随机试验:

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S,样本空间的元素,称为样本点.

3. 随机事件

称随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件,简称事件,由一个样本点组成的单点集,称为基本事件.

4. 事件间的关系及运算

(1) 若 $A \subset B$,则称事件 B 包含事件 A,这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,即 $A = B$,则称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件,$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 称为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2,$

… 的和事件.

(3) 事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与 B 的积事件. $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 称为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 称为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

(4) 事件 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件.

(5) 若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的或互斥的.

(6) 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，又称事件 A 与事件 B 互为对立事件，A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A} = S - A$.

(7) 事件满足以下运算规律.

(i) 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

(ii) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(iii) 对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(二) 随机事件的概率及其性质

1. 定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 对于每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) $P(S) = 1$；

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对 $i \neq j$，$A_i \cap A_j = \varnothing$，$i, j = 1, 2, \cdots$，则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

2. 性质

(1) $P(\varnothing) = 0$；

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

(4) 对于任意二事件 A，B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

一般地，对任意 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

(5) 若 $A \subset B$，则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

3. 古典概型

如果随机试验 E 具有下列特点：

(1) 试验的样本空间的元素只有有限个；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同，则称这种概型为古典概型.

对古典概型，事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件的总数}}$$

4. 条件概率

设 A，B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，称

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

5. 乘法定理

设 $P(A) > 0$，$P(B) > 0$，则有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个事件，$n \geqslant 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1\cdots A_{n-1})$$

6. 全概公式和贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

7. 事件的独立性及其概率计算

设 A，B 是两个事件，如果具有等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A，B 为相互独立的事件.

一般，设 A_1，A_2，…，A_n 是 n 个事件，如果对于任意 $i_k(i_k\leqslant n)$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称 A_1，A_2，…，A_n 为相互独立的事件，且有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]$$

二、重点、难点点击

(1) 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算.

(2) 理解事件概率的概念，了解概率的统计定义.

(3) 理解概率的古典定义，会计算简单的古典概率.

(4) 理解概率的公理化定义.

(5) 掌握概率的基本性质及概率的加法定理.

(6) 理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式、全概公式及贝叶斯(Bayes)公式.

(7) 理解事件独立性概念，会计算相互独立事件的有关概率.

1.2 典型例题精选

【例 1-1】 设 A，B，C 是任意三个随机事件，则以下命题中正确的是(　　).

(A) $(A\cup B)-B=A-B$　　(B) $(A-B)\cup B=A$

(C) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$　　(D) $A\cup B=A\overline{B}\cup B\overline{A}$

【解】 由于 $(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}=A-B$ 故选(A)，其余三个都是不对的，原因在于

$$(A-B)\cup B=(A\overline{B})\cup B=(A\cup B)(B\cup\overline{B})=A\cup B$$

$$(A\cup B)-C=(A\cup B)\overline{C}=A\overline{C}\cup B\overline{C}=(A-C)\cup(B-C)$$
$$A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup AB=A\overline{B}\cup B\overline{A}\cup AB$$

【例 1-2】 设 A, B 是两个随机事件，若 $P(AB)=0$，则下列命题中正确的是(　　).

(A) A 和 B 互不相容(互斥)　　(B) AB 是不可能事件

(C) AB 不一定是不可能事件　　(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

【解】 一个事件的概率为0，这个事件未必是不可能事件，一个事件的概率为1，该事件也未必是必然事件，因此(C)正确，反例如下：随机地向$[0,1]$区间内投点，令ξ表示点的坐标，设 $A=\{0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}\}$，$B=\{\frac{1}{2}\leqslant\xi<1\}$，则 $AB=\{\xi=\frac{1}{2}\}$，由几何概率知：$P(AB)=0$，但 $AB\neq\varnothing$. 此例同时说明 A 与 B 是相容的，且 $AB\neq\varnothing$，所以(A)，(B)是不对的.(D)也是错误的，反例如下：掷一枚均匀的硬币，设 A 表示出现正面，B 表示出现反面，则 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，但 $AB=\varnothing$，从而 $P(AB)=0$.

【例 1-3】 设 A, B 为两随机事件，则 $P(A-B)=($　　$)$.

(A) $P(A)-P(B)$　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$

(C) $P(A)-P(AB)$　　(D) $P(A)+P(\overline{B})+P(A\overline{B})$

【解】 因 $A-B=A-AB$，又 $AB\subset A$，故 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，所以(C)正确.

【例 1-4】 设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则下列式子正确的是(　　).

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$

【解】 由已知，$AB\subset C$，则 $P(C)\geqslant P(AB)$，又 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$，所以(B)正确，因此(A)是错的，(C)，(D)显然不对.

【例 1-5】 设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$，则下列结论中正确的是(　　).

(A) 事件 A 和 B 互不相容　　(B) 事件 A 和 B 相互对立

(C) 事件 A 和 B 不相互独立　　(D) 事件 A 和 B 相互独立

【解】 由 $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$，得 $P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})$，即

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$$

从而 $\quad P(AB)[1-P(B)]=[P(A)-P(AB)]P(B)$，即

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

故 A 与 B 相互独立，所以(D) 正确.

【例 1-6】 将 C, C, E, E, I, N, S 等 7 个字母随机地排成一行，那么恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率为______.

【解】 设 $A=\{$恰好排成英文单词 SCIENCE$\}$，这是一古典概型的概率计算问题. 基本事件总数为 7 个不同元素的全排列数，等于 $7!$，A 包含的基本事件总数为 $1\times2\times1\times2\times1=4$，因此

$$P(A)=\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}$$

【例 1-7】 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为______.

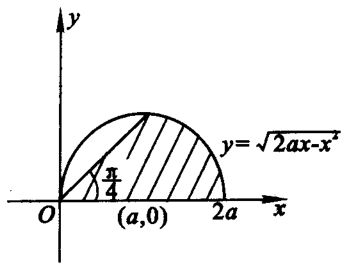

图 1-1

【解】 这是一几何概型的概率计算问题. $S=\{(x,y): 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2ax-x^2}, 0\leqslant x\leqslant 2a\}$，如图 1-1 所示. 在极坐标系下写为 $S=\{(r,\theta): r\leqslant 2a\cos\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$，设事件 $A=\{(r,\theta): r\leqslant 2a\cos\theta, 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{4}\}$，故

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}=\frac{\frac{a^2}{2}+\frac{\pi a^2}{4}}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

【例 1-8】 设随机事件 A，B 及和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4，0.3 和 0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$______.

【解】 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6$ 得 $P(AB)=0.4+0.3-0.6=0.1$，故

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$$

【例 1-9】 已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}$，$P(ABC)=\frac{1}{16}$，则 A，B，C 恰有一个发生的概率为______.

【解】 $P(A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)=$
$P(A-(B\cup C))+P(B-(A\cup C))+P(C-(A\cup B))=$
$P(A)-P(A\cap(B\cup C))+P(B)-P(B\cap(A\cup C))+P(C)-P(C\cap(A\cup B))=$
$P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)-P(AB)-$
$P(BC)+P(ABC)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=$
$P(A)+P(B)+P(C)-2P(AB)-2P(AC)-2P(BC)+3P(ABC)=$
$\frac{3}{4}-2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$

【例 1-10】 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为0.6和0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为______.

【解】 设 A 表示"甲射击一次命中目标"的事件，B 表示"乙射击一次命中目标"的事件，则要求概率

$$P(A\mid A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=$$

$$\frac{0.6}{0.6+0.5-0.6\times0.5}=\frac{6}{8}=0.75$$

【例 1-11】 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B，C 分别是将一枚骰子接连掷两次后先后出现的点数，求该方程有实根的概率和有重根的概率.

【解】 令 $A_1=\{$方程有实根$\}$，$A_2=\{$方程有重根$\}$，一枚骰子掷两次，其基本事件总数为 36，方程组有实根的充分必要条件是 $B^2-4C\geqslant0$ 即 $C\leqslant\frac{B^2}{4}$；方程组有重根的充分必要条件是 $B^2-4C=0$，即 $C=\frac{B^2}{4}$. 易见

B	1	2	3	4	5	6
使 $C\leqslant\frac{B^2}{4}$ 的基本事件个数	0	1	2	4	6	6
使 $C=\frac{B^2}{4}$ 的基本事件个数	0	1	0	1	0	0

由上表可见，A_1 包含的基本事件总数为

$$1+2+4+6+6=19$$

A_2 包含的基本事件总数为 $1+1=2$，故由古典概型概率计算得

$$P(A_1)=\frac{19}{36},\ P(A_2)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

【例 1-12】 一列火车共有 n 节车厢，有 $k(k\geqslant n)$ 个旅客上火车，并随意地选择车厢，求每一节车厢内至少有一个旅客的概率.

【解】 令 $A=\{$每一节车厢内至少有一个旅客$\}$，则 $\overline{A}=\{$至少有一个车厢无旅客$\}$，再令 $A_j=\{$第 j 个车厢无旅客$\}$，$j=1,2,\cdots,n$，则由古典概型概率的计算知 $P(A_j)=\dfrac{(n-1)^k}{n^k}$，$P(A_jA_i)=\dfrac{(n-2)^k}{n^k}$，$\cdots$，$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})=\dfrac{1}{n^k}$，$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(\varnothing)=0$，因此由概率的性质及加法公式得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=$$

$$1-C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k+C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k+\cdots+(-1)^{(n-1)}C_n^{n-1}\frac{1}{n^k}$$

【例 1-13】 假设 n 张体育彩票中只有一张“中奖”，n 个人依次排队摸彩，求

(1) 已知前 $k-1(k\leqslant n)$ 个人都未“中奖”，求第 k 个人“中奖”的概率；

(2) 求第 $k(k\leqslant n)$ 个人摸彩时“中奖”的概率.

【解】 设 $A_i=\{$第 i 个人摸彩时中奖$\}$，$i=1,2,\cdots,n$，则

(1) $P(A_k\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})=\dfrac{1}{n-(k-1)}=\dfrac{1}{n-k+1}$

(2) $P(A_k)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k)=$

$$P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\cdots P(A_k\mid\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{k-1})=$$

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$$

说明了抽签与顺序是无关的.

【例 1-14】 设有来自三个地区的考生的报名表分别是 10 份、15 份和 25 份，其中女生的报名表分别是 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份：

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率；

(3) 已知先抽到的一份是女生表，后抽到的一份是男生表的条件下，他们是来自第 2 个考区的概率.

【解】 设 $A_i=\{$报名表是第 i 个考区的$\}(i=1,2,3)$，$B_j=\{$第 j 次抽到的报名表是男生表$\}(j=1,2)$，则

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},\ P(B_1\mid A_1)=\frac{7}{10}$$

$$P(B_1\mid A_2)=\frac{8}{15},\ P(B_1\mid A_3)=\frac{20}{25}$$

(1) 由全概公式得

$$P(\overline{B}_1)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(\overline{B}_1\mid A_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

(2) 要求概率

$$P(\overline{B}_1\mid B_2)=\frac{P(\overline{B}_1B_2)}{P(B_2)}$$

由抽签与顺序无关的原理得

$$P(B_2\mid A_1)=\frac{7}{10},\ P(B_2\mid A_2)=\frac{8}{15},\ P(B_2\mid A_3)=\frac{20}{25}$$

从而由全概公式得

$$P(B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_2\mid A_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$$

又 $P(\overline{B}_1B_2\mid A_1)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{30}$，$P(\overline{B}_1B_2\mid A_2)=\dfrac{7}{15}\times\dfrac{8}{14}=\dfrac{8}{30}$

$P(\overline{B}_1B_2\mid A_3)=\dfrac{5}{25}\times\dfrac{20}{24}=\dfrac{5}{30}$，由全概公式得

$$P(\overline{B}_1B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(\overline{B}_1B_2\mid A_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)=\frac{2}{9}$$

所以
$$P(\overline{B}_1\mid B_2)=\frac{P(\overline{B}_1B_2)}{P(B_2)}=\frac{2/9}{61/90}=\frac{20}{61}$$

(3) 由贝叶斯公式得

$$P(A_2\mid\overline{B}_1B_2)=\frac{P(A_2)P(\overline{B}_1B_2\mid A_2)}{P(\overline{B}_1B_2)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{8}{30}}{\frac{2}{9}}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}=0.4$$

【例1-15】 设某型号的高射炮，每一门炮发射一发炮弹击中飞机的概率为0.6，现在若干门炮同时发射，每门炮发射一发炮弹．问欲以99％的把握击中来犯的一架飞机，至少需配置几门高射炮？

【解】 设需配置 n 门炮，$A_i=\{$第 i 门炮击中敌机$\}$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=0.6$，且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，欲求 n 使得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}})=$$
$$1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=$$
$$1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)=$$
$$1-(0.4)^n\geqslant 0.99$$

即 $\quad(0.4)^n\leqslant 0.01\quad$ 所以

$$n\geqslant\frac{\lg 0.01}{\lg 0.4}=\frac{2}{0.3979}=5.026$$

也就是说至少需配置6门炮方能以99%以上的把握击中来犯的一架敌机.

【例1-16】 对一个元件，它能正常工作的概率 p 叫做该元件的可靠性，由若干个元件组成的系统，它能正常工作的概率叫做该系统的可靠性. 现设有 $2n$ 个元件，每个元件的可靠性均为 $r(0<r<1)$，且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下列二系统的可靠性(见图1-2)；并问哪个系统的可靠性大？

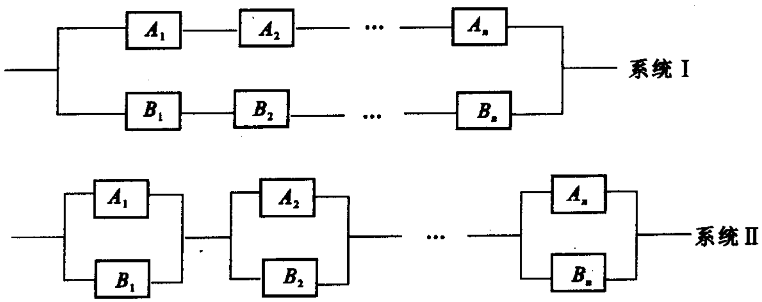

图 1-2

【解】 设 A 表示系统Ⅰ可靠这一事件，B 表示系统Ⅱ可靠这一事件，则

$$A=(A_1A_2\cdots A_n)\cup(B_1B_2\cdots B_n)$$
$$B=(A_1\cup B_1)(A_2\cup B_2)\cdots(A_n\cup B_n)$$

$A_1,A_2,\cdots,A_n;B_1,B_2,\cdots,B_n$ 相互独立，且 $P(A_i)=P(B_i)=r$，$i=1,2,\cdots,n$. 因此

$$P(A)=P((A_1A_2\cdots A_n)\cup(B_1B_2\cdots B_n))=$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)+P(B_1B_2\cdots B_n)-P(A_1\cdots A_nB_1\cdots B_n)=$$
$$r^n+r^n-r^{2n}=r^n(2-r^n)$$

$$P(B)=P((A_1\cup B_1)(A_2\cup B_2)\cdots(A_n\cup B_n))=$$
$$\prod_{i=1}^{n}P(A_i\cup B_i)=\prod_{i=1}^{n}(P(A_i)+P(B_i)-P(A_iB_i))=$$
$$(2r-r^2)^n=r^n(2-r)^n$$

因为$(2-r)^n>2-r^n$，所以系统Ⅱ比系统Ⅰ具有较大的可靠性. 寻求可靠性达到最大的设计系统，是可靠性设计研究的主要问题.

【例 1-17】 用自动生产线加工机器零件，每个零件为次品的概率为 p；若在生产过程中累计出现 m 个次品，则对生产线停机检修，求停机检修时共生产了 n 个零件的概率.

【解】 用 A 表示"停机检修时恰好生产了 n 个零件"的事件，B 表示"在前 $n-1$ 个零件中有 $m-1$ 个次品"，C 表示"生产第 n 个零件时出现第 m 个次品"的事件，则 $A=BC$，且 B 与 C 独立，故

$$P(A)=P(BC)=P(B)P(C)=$$
$$C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}(1-p)^{n-m}\cdot p=C_{n-1}^{m-1}p^m(1-p)^{n-m}$$

1.3 课后作业

作业题

1. 填空题(每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$ ______.

(2) 设两两相互独立的三事件 A，B 和 C 满足条件：$ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$ ______.

(3) 已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B\mid A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$ ______.

(4) 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知两件中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为______.

(5) 三个箱子中，第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球，第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球，现随机地取一个箱子，再从