俄罗斯数学
教材选译

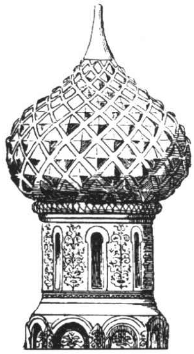
现代几何学：方法与应用（第二卷）

流形上的几何与拓扑

(第5版)

□ Б. А. 杜布洛文　С. П. 诺维可夫　А. Т. 福明柯　著
□ 潘养廉　译

高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

现代几何学：方法与应用（第二卷）

流形上的几何与拓扑

（第5版）

□ Б. А. 杜布洛文　С. П. 诺维可夫　А. Т. 福明柯　著
□ 潘养廉 译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01－2006－3366 号

Современная геометрия：Том 2. Методы и приложения.

Геометрия и топология многообразий.

УРСС，2001.

Originally published in Russian under the title

Modern Geometry—Methods and Applications

Part 2：The Geometry and Topology of Manifolds

图书在版编目（CIP）数据

现代几何学：方法与应用．第2卷，流形上的几何与拓扑：第5版／（俄罗斯）杜布洛文，（俄罗斯）诺维可夫，（俄罗斯）福明柯著；潘养廉译．—北京：高等教育出版社，2007.7

ISBN 978－7－04－021492－5

Ⅰ．现…　Ⅱ．①杜…②诺…③福…④潘…　Ⅲ．几何学－高等学校－教材　Ⅳ．O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 075006 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787×1092　1/16	版　次	2007年7月第1版
印　张	20	印　次	2007年7月第1次印刷
字　数	410 000	定　价	41.10元

物料号　21492－00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

目　　录

第一章　流形的例子

§1. 流形的概念

1. 流形的定义

流形的概念本质上是首先由高斯从数学上描述的地球表面的制图过程的推广. 这种推广非常深远且可应用到一大类复杂的几何图形上去.

我们回想一下地图绘制过程是如何完成的. 一群受委托绘制地球表面地图的制图员根据下列自然的要求被分成一些小组:

1) 每一块地球表面委托给一个小组 (编号为 i).

2) 如果委托给两个 (编号为 i 和 j 的) 不同小组的两块区域相交, 则这些小组必须在各自的地图上精确地说明这块公共区域互相对应的规则. 通常在实际地图上说明这个规则的办法是在地图上充分详细地标出地图上点的地名表, 由此立即可明白在不同的地图上哪些点彼此对应.

如我们记得的那样, 每一张独立的地图被画在具某种坐标的一张平坦的纸上. 这些称为卡的纸页全体称为地球表面的一个图册. 此外, 在卡上通常还指出计算出现在该卡上的任何路径的实际长度的法则; 这一点, 我们稍后再论及 (在流形的概念中并不包含长度的概念).

从这些思考出发, 就产生一个我们即将转向的极为广泛的一般性定义.

定义 1.1. 一个任意点集 M 称为一个 n 维 (微分) 流形, 如果在 M 上已引入下列结构: 1) 集 M 是有限多个或可数多个区域 U_q 的并; 2) 在每一个区域 U_q

中给定了坐标 $x_q^\alpha, \alpha = 1, \cdots, n$, 这种坐标称为*局部坐标*[①]. 此时区域 U_q 本身称为*坐标邻域*或*坐标卡*. 集合 M 中每一对这种区域的交 $U_q \bigcap U_p$, 如果非空, 本身也是一个区域, 在其上已经有两个局部坐标系 (x_p^α) 和 (x_q^α). 我们要求这两个局部坐标系中的每一个可以由另一个以可微方式表达:

$$\begin{aligned} x_p^\alpha &= x_p^\alpha(x_q^1, \cdots, x_q^n), \qquad \alpha = 1, \cdots, n; \\ x_q^\alpha &= x_q^\alpha(x_p^1, \cdots, x_p^n), \qquad \alpha = 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

于是, 雅可比行列式 $\det\left(\dfrac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)$ 不等于零. 函数 (1) 称为 (从坐标 x_q^α 到坐标 x_p^α 和反向的) *转移函数*. 所有的相交偶对 (U_p, U_q) 的转移函数的公共光滑性类称为流形 M 本身的由“图册” $\{U_q\}$ 给定的*光滑性类*.

流形的最简单例子是欧几里得空间本身或它的任何区域. 复空间 $\mathbb{C}^n$ 中的区域是 $2n$ 维的实区域, 同样也是流形.

关于两个流形 $M = \bigcup\limits_q U_q, N = \bigcup\limits_p V_p$ 可以构造它们的直积 $M \times N$. 流形 $M \times N$ 的点按定义是点偶 (m, n), 坐标区域覆盖由

$$M \times N = \bigcup_{p,q} U_q \times V_p \tag{2}$$

定义. 如果 (x_q^α) 是区域 U_q 中坐标, (y_p^β) 是区域 V_p 中坐标, 则区域 $U_q \times V_p$ 中坐标是 (x_q^α, y_p^β).

在后面还将出现一系列流形的例子.

应该指出, 我们引入的流形的一般性概念, 从纯逻辑的观点看, 宽松得有点不必要; 需要加以限制, 这将在后面去做. 但是这种逻辑限制将使用我们目前尚未介绍的一般拓扑的语言来表达. 如果一开始就将流形定义为某个 (可能更高) 维数的欧几里得空间中的光滑非奇异曲面, 也许可以避开一般拓扑. 这在逻辑上是不自然的. 比较简单的方法是从抽象地定义流形开始, 然后证明所有的流形可以实现为欧几里得空间中的曲面.

我们回忆一下一般拓扑的某些概念.

(1) *拓扑空间*. 这是一个点集 X, 在 X 中指定了何种子集是*开集*. 并且我们要求: 任意两个, 因而意味着任意有限多个开集的交也是开集, 且任意多个开集的并仍是开集. 全集和空集也是开集.

开集的补称为*闭集*.

如数学分析课程中熟知的那样, 这种定义已给出引入连续映射的可能性: 一个拓扑空间到另一个拓扑空间的映射 $f: X \to Y$ 是连续的, 如果任意开集 $U \subset Y$ 的完全原像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集.

①换言之, 给定了一个双方一一的映射 $\varphi_q: U_q \to \mathbb{R}^n$, 其中像 $\varphi_q(U_q)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个开区域. 如果采用 $\mathbb{R}^n$ 中本身的坐标, 则这个映射 φ_q 就在 U_q 中引入了坐标系 $(x_q^1, \cdots, x_q^n)$.

在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中可以引入"欧几里得拓扑", 其中的开集就是通常的开区域 (见卷 1 §2). 任意子集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上的"诱导拓扑"则以交 $U \bigcap A = V$ 作为开集, 其中 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中通常的开区域.

定义 1.2. 流形 M 上的拓扑 (或欧几里得拓扑) 由下面的开集族 (区域) 定义: 在每个坐标区域 $U_q \subset M$ 中, $\mathbb{R}^n$ 中的开区域被认为是开集, M 中开集全体则由这些集作可数并的运算得到.

关于这个拓扑, 流形 M 的连续映射 (函数) 就是那些通常意义上在每个局部坐标区域 U_q 上连续的映射 (函数).

流形 $M = \bigcup_q U_q$ 的开子集 V 从 M 继承了流形的结构 $V = \bigcup_q V_q$, 其中区域 V_q 形如

$$V_q = V \bigcap U_q. \tag{3}$$

(2) *度量空间*是一类重要的拓扑空间. 对于度量空间 X 中任意两点 x, y 定义了它们之间的距离 $\rho(x, y)$, 并要求这个距离具有以下性质:

1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

2) $\rho(x, x) = 0, \rho(x, y) > 0$, 当 $x \neq y$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ ("三角不等式").

例如, n 维欧几里得空间是度量空间, 两点 $x = (x^1, \cdots, x^n), y = (y^1, \cdots, y^n)$ 之间的欧几里得距离为

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{n} (x^\alpha - y^\alpha)^2}.$$

在度量空间中引入拓扑: (任意多个) 开球的并取作为开集, 这里, 一个球心为 x_0 半径为 ε 的开球是所有满足 $\rho(x_0, x) < \varepsilon$ 的点 x 所成的集.

对于 n 维欧几里得空间, 这个拓扑与前面定义的"欧几里得拓扑"是相同的.

对于我们重要的例子是赋予了黎曼度量的流形 (具黎曼度量的流形上两点间距离的定义参见第二章).

(3) 拓扑空间 X 称为*豪斯多夫空间*, 如果任意两点可包含于彼此不相交的开集之中.

特别有度量空间是豪斯多夫空间: 如果 $\rho(x, y) = 2\varepsilon$, 则由三角不等式, 半径为 ε 中心分别为 x 和 y 的两个开球不相交. *此后我们总只考虑豪斯多夫空间*. 特别在流形的定义中, 我们也加一点: 我们总假定流形是豪斯多夫空间.

(4) 空间 X 称为*紧空间*, 如果任何一个点序列总可取出一个收敛子序列. 与此等价的是: 如果 X 被可数多个开区域覆盖, 则从此覆盖中可取出 X 的一个有限覆盖.

(5) *道路连通*的拓扑空间具有这样的性质, 即它的任意两点可以用连续曲线连接.

(6) 对我们重要的另一类拓扑空间的例子是流形 M 到另一个流形 N 的映射 $M \to N$ 组成的映射空间, 它的拓扑的精确描述将在以后给出.

初看之下, 流形的概念似乎非常的抽象, 然而, 事实上即使在欧几里得空间中或者它的区域中, 我们常常发觉自己不得不做坐标变换并按照变换规则做各种计算. 更重要的是, 在空间不同的区域中使用不同的坐标去解各种问题常常是方便的, 然后要做的就是在两种不同坐标系共同起作用的区域中如何将解 "拼接" 起来. 此外, 并不是所有的曲面都容许我们引入单一的坐标系而没有奇点 (例如, 球面就不容许).

流形中重要的一类是可定向流形.

定义 1.3. 流形 M 称为*定向流形*, 如果对每一对相交的区域, 转移函数的雅可比行列式 $J_{pq} = \det\left(\dfrac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)$ 总是正的.

例如, 坐标为 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 按照这个定义是定向的. 具有另一种坐标 $(y^1, \cdots, y^n)$ 的同一个空间 $\mathbb{R}^n$ 按定义也是定向的. 此时, 相应地, 上面所说的变换 $x^\alpha = x^\alpha(y^1, \cdots, y^n)$ 的雅可比行列式 $J = \det\left(\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right)$ 不等于零, 于是保持定号.

定义 1.4. 我们称坐标 (x) 和 (y) 定义了 $\mathbb{R}^n$ 的同一个定向, 如果 $J > 0$; 而如果 $J < 0$, 则称它们定义了 $\mathbb{R}^n$ 相反的定向.

因此欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 有两个定向. 以后我们将证明连通流形有两个定向, 如果它存在定向.

2. 流形的映射; 流形上的张量

设给定两个流形: $M = \bigcup\limits_p U_p$ (坐标为 x_p^α) 和 $N = \bigcup\limits_q V_q$ (坐标为 y_q^β).

定义 1.5. 映射

$$f : M \to N$$

称为*光滑性类 k 的光滑映射*, 如果对一切的 (q, p), 函数 $y_q^\beta(x_p^1, \cdots, x_p^n)$ 在有定义的区域中是光滑性类 k 的光滑函数. 此外, 映射的光滑性类不可能高出流形 M 和 N 的光滑性类, 否则是没有意义的.

当 N 是直线, $N = \mathbb{R}$ 的情形, 映射 $f : M \to \mathbb{R}$ 称为 (实) 数值函数 $f(x)$, 其中 x 是流形 M 的点.

可能会出现光滑映射 (或数值函数) 不是在整个流形上而只是在流形的一部分上定义的情形. 局部坐标 x_p^α 就是这种情形的例子, 对任意的 α,x_p^α 就是一个数值函数且由它本身的意义只定义在区域 U_p 上.

定义 1.6. 两个流形 M 和 N 称为*光滑等价的或微分同胚的*, 如果存在双方一一的均为光滑性类 $k \geqslant 1$ 的光滑映射:

$$f : M \to N, \quad f^{-1} : N \to M.$$

此时特别有局部坐标的雅可比行列式 $J_{qp}=\det\left(\dfrac{\partial y_q^\beta}{\partial x_p^\alpha}\right)$ 在 $y_q^\beta=f(x_p^1,\cdots,x_p^n)^\beta$ 有定义的整个区域中处处不等于零.

我们今后总假定所考察的流形及它们之间的映射总具有我们所需要的光滑性类 (总是 $\geqslant 1$, 如果需要二阶导数, 则不小于 2, 等等).

设在流形 M 上给定曲线 $x=x(\tau), a\leqslant\tau\leqslant b$, 这里 x 是流形的点. 当曲线位于坐标系为 x_p^α 的区域 U_p 中时, 我们可以将它记为

$$x_p^\alpha=x_p^\alpha(\tau),\quad \alpha=1,\cdots,n.$$

使用这些坐标, 我们有速度向量

$$\dot{x}=(\dot{x}_p^1,\cdots,\dot{x}_p^n).$$

在两个坐标系适用的区域 $U_p\bigcap U_q$ 中, 我们有两种记法: $x_p^\alpha(\tau)$ 和 $x_q^\beta(\tau)$, 这里 $x_p^\alpha(x_q^1(\tau),\cdots,x_q^n(\tau))=x_p^\alpha(\tau)$.

对于速度向量我们有

$$\dot{x}_p^\alpha=\sum_\beta\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\dot{x}_q^\beta.$$

在这个公式的基础上, 如同在欧几里得空间中那样, 可以引入

定义 1.7. 在局部坐标系 (x_q^α) 中由一组数 ξ_q^α 描述的一个向量称为流形 M 在任意点 x 的一个**切向量**. 这同一个向量在包含点 x 的不同局部坐标系中的记号之间由公式

$$\xi_p^\alpha=\sum_{\beta=1}^n\left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)_x\xi_q^\beta$$

相关联.

n 维流形 M 在给定点 x 的切向量全体组成一个 n 维线性空间 $T_x=T_xM$ (称为切空间). 特别有任意一条光滑曲线的速度向量是一个切向量. 在点 x 的邻域中选定一个局部坐标系 (x^α) 就在切空间 T_x 中给定一个基 $e_\alpha=\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

流形 M 到流形 N 的一个光滑映射 f 定义了一个诱导线性映射

$$f_*:T_x\to T_{f(x)}.$$

作为定义, 在此线性映射下流形 M 上的曲线 $x=x(t)$ 的速度向量变换成流形 N 上的曲线 $f(x(t))$ 的速度向量. 在 (点 x 的邻域中的) 局部坐标 (x^α) 和 (在点 $f(x)$ 的邻域中的) 局部坐标 (y^β) 中, 映射 f 形如

$$y^\beta=f^\beta(x^1,\cdots,x^n),\quad \beta=1,\cdots,m.$$

于是, 切空间的诱导映射 f_* 由雅可比矩阵给出:

$$\xi^\alpha \to \eta^\beta = \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha.$$

对于流形 M 上的实值函数 $f: M \to \mathbb{R}$, 诱导映射 f_* 在流形 M 的每个切空间上是一个线性实值函数 (余向量). 这个线性函数重合于函数 f 的微分 df.

定义 1.8. 一个在流形 M 的每一点的切空间上给定的且光滑地依赖于局部坐标的正定 (非退化) 二次型称为 M 上的一个黎曼 (伪黎曼) 度量. 在每个局部坐标为 (x_p^α) 的区域 U_p 中, 这个度量由对称矩阵 $(g_{\alpha\beta}^{(p)}(x_p^1, \cdots, x_p^n))$ 给出, 对点 x 处的任一向量 ξ 则有 $|\xi|^2 = g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\xi_p^\beta$ (这里重复指标 α, β 像通常一样表示求和). 这个度量也对同一点的两个向量按通常的公式

$$\langle \xi, \eta \rangle = g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\eta_p^\beta = \langle \eta, \xi \rangle,$$
$$|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle,$$

给定一个对称的标量积.

这个定义与局部坐标的选取无关:

$$g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\eta_p^\beta = g_{\gamma\delta}^{(q)}\xi_q^\gamma\eta_q^\delta,$$

或者

$$g_{\gamma\delta}^{(q)} = \frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\gamma} g_{\alpha\beta}^{(p)} \frac{\partial x_p^\beta}{\partial x_q^\delta}.$$

定义 1.9. 流形上点 x 处的一个 (k, l) 型张量在每个局部坐标系 (x_p^α) 中由一组函数 ${}^{(p)}T_{j_1\cdots j_l}^{i_1\cdots i_k}(x)$ 给定. 如果在另一个包含点 x 的局部坐标系 (x_q^β) 中这同一个张量由 ${}^{(q)}T_{t_1\cdots t_l}^{s_1\cdots s_k}(x)$ 给出, 则成立公式

$${}^{(q)}T_{t_1\cdots t_l}^{s_1\cdots s_k} = \frac{\partial x_q^{s_1}}{\partial x_p^{i_1}} \cdots \frac{\partial x_q^{s_k}}{\partial x_p^{i_k}} \frac{\partial x_p^{j_1}}{\partial x_q^{t_1}} \cdots \frac{\partial x_p^{j_l}}{\partial x_q^{t_l}} {}^{(p)}T_{j_1\cdots j_l}^{i_1\cdots i_k}.$$

卷 1 第三章中所有对 n 维空间的区域上所得的定义和结果都自动地适用于流形上的张量.

流形上的度量 $g_{\alpha\beta}$ 是 $(0, 2)$ 型张量的例子. 在定向流形上, 度量决定一个体积元

$$T_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}, \quad g = \det(g_{\alpha\beta}),$$

这里 $\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 是秩为 n 的反称张量, $\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = \pm 1$. 这个表达式在具正的雅可比行列式的坐标变换下是一个张量, 因此对于定向流形确实是一个张量. 在任意 (正定向) 局部坐标中, 体积元可以方便地记成

$$\Omega = \sqrt{|g|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

流形 M 上的一个黎曼度量 dl^2 在 M 上给出了度量空间的结构, 其中点 P,Q 之间的距离由公式

$$\rho(P,Q)=\inf_{\gamma}\int_{\gamma}dl^{*)}$$

定义 (其中下确界在所有连接 P 和 Q 的分段光滑曲线 γ 上取). 由这个度量空间结构决定的拓扑与流形 M 的欧几里得拓扑是相同的 (试证之!).

由卷 1 的结果, 流形上任意两个充分接近的点可以用测地线连接. 一般来说, 相距较远的两点不一定能用一条测地线连接, 但是总可以用测地折线连接.

3. 流形的嵌入和浸入. 带边界流形

定义 1.10. m 维流形 M 称为维数 $n>m$ 的流形 N 的子流形, 如果已给定一个 1–1 光滑映射 $f:M\to N$ 使得诱导映射 f_* 在每一点是切空间的嵌入, 换言之, 在局部坐标中这个映射的雅可比矩阵的秩等于 m. 映射 f 称为流形 M 到 N 的嵌入.

如果这个定义中不要求 f 是 1–1 映射, 则我们得到流形 M 到 N 中的浸入 (容许自交).

我们将限于讨论在每个坐标邻域或坐标卡 U_p 中由方程组

$$\left.\begin{array}{l} f_p^1(x_p^1,\cdots,x_p^n)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_p^{n-m}(x_p^1,\cdots,x_p^n)=0,\end{array}\right\}\qquad \left(\frac{\partial f_p^\alpha}{\partial x_p^\beta}\right) \text{的秩}=n-m$$

给定的子流形, 且在两个区域 U_p,U_q 的交上方程组 $(f_p^\alpha=0)$ 和 $(f_q^\alpha=0)$ 应该有相同的零点集. 在这种情形下, 在区域 U_p 中可以引入新的局部坐标 $(y_p^1,\cdots,y_p^n)$ 使得

$$y_p^{m+1}=f_p^1(x_p^1,\cdots,x_p^n),\cdots,y_p^n=f_p^{n-m}(x_p^1,\cdots,x_p^n).$$

在这个坐标系中子流形就由方程组

$$y_p^{m+1}=0,\cdots,y_p^n=0$$

给出, 而函数 $y_p^1,\cdots,y_p^m$ 成为子流形 M 上的局部坐标.

定义 1.11. 在流形 M 中由不等式 $f(x)\leqslant 0$ (或 $f(x)\geqslant 0$) 界定的闭区域 A 称为*带边界流形*, 这里 $f(x)$ 是一个光滑函数, 并要求由方程 $f(x)=0$ 给出的边界 ∂A 是 M 中一个非奇异子流形, 即函数 f 的梯度在边界上不等于零.

设 A 和 B 分别是流形 M 和 N 中以闭区域形式给出的两个带边界流形. 映射 $\varphi:A\to B$ 称为带边界流形间的一个光滑映射, 如果它是一个在包含 A 的开区域

*) 原书为 $\rho(P,Q)=\min\limits_{\gamma}\int_{\gamma}dl$ 有误. —— 译者.

$U \subset M$ 上定义的光滑映射 $\widetilde{\varphi}$ 在 A 上的限制:

$$\widetilde{\varphi}: U \to N, \widetilde{\varphi}|_A = \varphi.$$

如果 $A \subset M$ 是由不等式 $f(x) \leqslant 0$ 界定的, 则开区域 $U = U_\varepsilon$ 通常取为 $\{f(x) < \varepsilon\}$ 的形式, 其中 $\varepsilon > 0$.

最后, 我们再引入一个常使用的名称: 无边界流形称为闭流形.

§2. 最简单的流形例子

1. 欧几里得空间中的曲面. 流形上的变换群

n 维欧几里得空间中一张 k 维曲面是由方程组

$$f_i(x^1, \cdots, x^n) = 0, \quad i = 1, \cdots, n-k \tag{1}$$

给定的, 其中矩阵 $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$ 的秩等于 $n-k$. 如果在这张曲面上的点 $(x_0^1, \cdots, x_0^k)$ 处由矩阵 $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$ 中指标为 $j_1, \cdots, j_{n-k}$ 的那些列组成的子式 $J_{j_1 \cdots j_{n-k}}$ 不等于零, 则可取

$$(y^1, \cdots, y^n) = (x_0^1, \cdots, \hat{x}^{j_1}, \cdots, \hat{x}^{j_{n-k}}, \cdots, x^n) \tag{2}$$

为曲面上该点的一个邻域内的局部坐标, 其中 "∧" 符号表示该项被略去 (见卷 1§7.1). 整张曲面被形如 $U_{j_1 \cdots j_{n-k}}$ 的区域覆盖, 其中 $U_{j_1 \cdots j_{n-k}}$ 是曲面上使得 $J_{j_1 \cdots j_{n-k}}$ 不等于零的子集.

定理 2.1. 由局部坐标取为 (2) 的区域 $U_{j_1 \cdots j_{n-k}}, 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{n-k}$, 组成的覆盖在曲面 (1) 上给出光滑流形结构.

证明 在曲面 (1) 的区域 $U_{j_1 \cdots j_{n-k}}$ 中成立下面的等式:

$$x^{j_i} = \varphi^i(y^1, \cdots, y^k), \quad i = 1, \cdots, n-k,$$

其中 φ^i 是光滑函数. 类似地在坐标为

$$(z^1, \cdots, z^k) = (x^1, \cdots, \hat{x}^{s_1}, \cdots, \hat{x}^{s_{n-k}}, \cdots, x^n)$$

的区域 $U_{s_1 \cdots s_{n-k}}$ 中我们有

$$x^{s_i} = \psi^i(z^1, \cdots, z^k), \quad i = 1, \cdots, n-k,$$