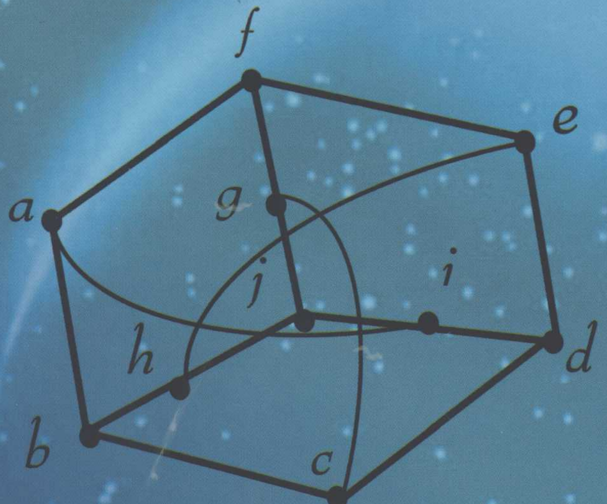
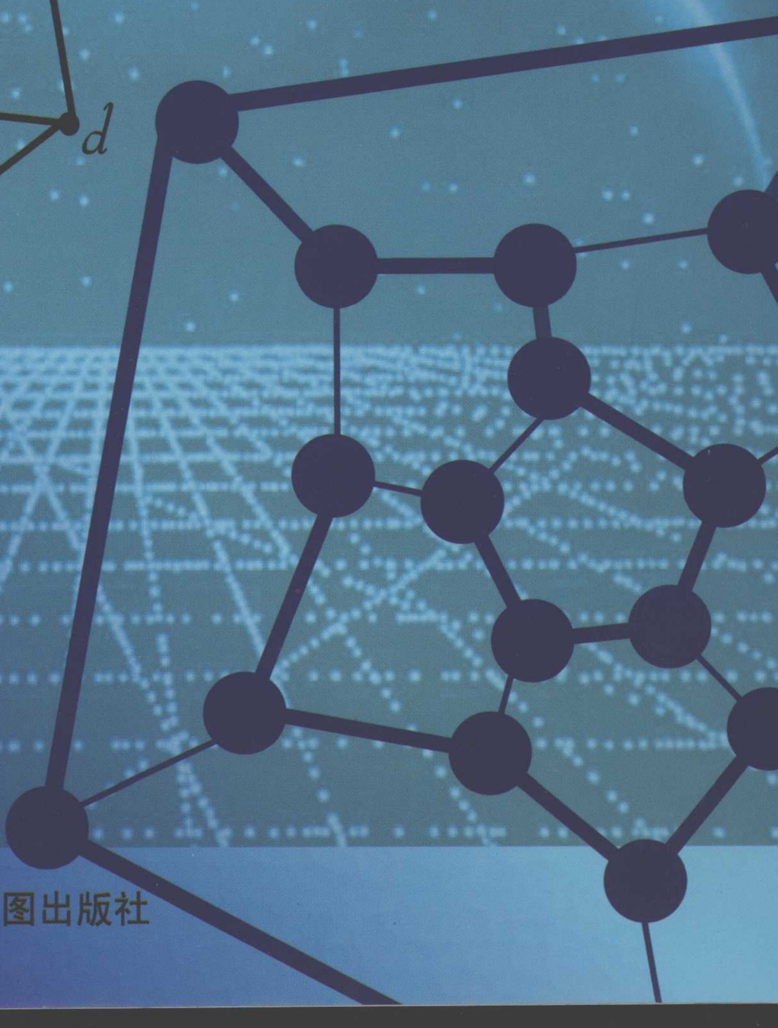
# 集合论与图论

## SET THEORY AND GRAPH THEORY

任美睿　郭龙江　郭亚红　编著



哈尔滨地图出版社

# 集 合 论 与 图 论

JIHELUN YU TULUN

任美睿　郭龙江　郭亚红 编著

哈尔滨地图出版社
·哈 尔 滨·

# 内 容 提 要

集合论与图论是离散数学中的重要分支，是计算机科学中基础理论的核心课程. 本书内容包括：集合及运算、关系、函数、无限集合及其基数、图的连通性、欧拉图、哈密顿图、二部图、平面图、树及其应用. 本书结构清晰，概念准确，叙述严谨. 每章后都配有难度不同的习题供读者练习.

本书可作为高等院校计算机及相关专业的教材，也适合有关专业的科技人员参考使用.



**图书在版编目(CIP)数据**

集合论与图论/任美睿，郭龙江，郭亚红编著. —哈尔滨：哈尔滨地图出版社，2006. 4
ISBN 7-80717-301-7

I. 集… II. ①任…②郭…③郭…　III. ①集论②图论　IV. ①O144②O157. 5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 034568 号

哈尔滨地图出版社出版发行
（地址：哈尔滨市南岗区测绘路 2 号　邮编：150086）
哈尔滨市民强印刷厂印刷
开本：787 mm×1092 mm　1/16　印张：8.625　字数：221 千字
2006 年 4 月第 1 版　2006 年 4 月第 1 次印刷
印数：1~1000　定价：15.00 元

# 前　　言

集合论与图论是离散数学中的重要分支. 离散数学是以离散量作为研究对象的那些数学分支的总称. 离散数学在许多领域，特别是计算机科学与技术领域有着广泛的应用，是计算机科学中基础理论的核心课程，它的知识直接应用到许多计算机科学的专业课程中去，如数据库原理、计算机网络、数据结构、电子线路、系统结构、可计算理论、人工智能、形式语言与自动机等，为计算机的应用提供坚实的理论基础. 对提高学生的抽象思维与逻辑推理能力有重要作用.

本书是作者在参阅了国内外许多优秀的离散数学专著及教材，并结合多年的教学实践编写而成的. 全书内容包括两编：集合论编和图论编. 在集合论部分讨论了集合及运算、二元关系、函数、无限集合及其基数；在图论部分讨论了图的基本概念、图的连通性、欧拉图、哈密顿图、二部图、平面图、树及其应用. 每章后都配有难度不同的习题供读者练习之用.

本书分工：第三、五、六、七章由任美睿撰写、第一章和第四章由郭龙江撰写，第二章由郭亚红撰写. 最后由任美睿负责统稿.

书中的一部分内容能直接解决实际课题，另一部分内容为读者今后进一步学习有关课程或在实际应用方面奠定一定的基础.

本书的出版得到了许多人的帮助和支持，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在一些错误与疏漏，敬请读者批评指正.

作　者

2006 年 3 月

# 目　录

## 上编　集合论

# 下编　图论

# 上编　集　合　论

集合论是现代数学的基础．它是由 19 世纪 70 年代德国数学家康托尔(Geog Cantor)在无穷序列有关课题的理论研究中创立的．康托尔对具有任意特性的无穷集合进行了深入的探讨，提出了关于基数、序数、超穷数和良序集等理论，奠定了集合论的深厚基础．因此，康托尔被誉为集合论的创始人．集合论在计算机科学、人工智能领域、逻辑学及语言学等方面都有着重要的应用．

# 1　集合和运算

## 1.1　集合及表示

集合论分为朴素集合论体系（又称康托集合论体系）和公理集合论体系.在本书中我们不讨论公理集合论体系.这是因为我们这里讨论的所有集合均可用朴素集合论来处理.在朴素集合论体系中，有一种被称为原始概念的概念是不能被精确定义的，集合就是一个原始概念，无法给出精确的定义，只能给出非形式的描述.

集合(*set*)就是有某种特点的、确定的、相互区别的事物（东西）放在一起形成的整体．构成集合的每个事物，称为这个集合的一个元素（或成员）．集合的元素既可以是具体的东西，也可以是抽象的事物．例如，学校目前在册的所有学生组成一个集合，而每个学生就是这个集合的一个元素．又如，所有太阳系的行星构成一个集合．英文中大写英文字母构成一个集合.

一般地，我们用大写英文字母 $A$，$B$，$C$，…来表示集合；用小写英文字母 $a$，$b$，$c$，…来表示集合中的元素．如果 $a$ 是集合 $A$ 中的元素，记为 $a\in A$，读做 $a$ 属于 $A$；而用 $a\notin A$ 表示 $a$ 不是 $A$ 中的元素，读作 $a$ 不属于 $A$．黑体字母 **N**，**Z**，**Q**，**R**，**C** 分别表示自然数集合(含 0)、整数集合、有理数集合、实数集合和复数集合．用 $\mathbf{N}^+$ 表示正整数集.

集合的表示方法有许多，我们这里列出常用的几种表示方法.

**列举法**：在可能的情况下一一列出集合中的元素.元素之间用逗号“,”分隔，并用花括号把所有元素括起来.当集合元素很多或无穷时，不能列出所有元素，就列出足够多的元素以反映集合中元素的特征，那些未列出的元素用省略号表示.

例 1.1.1　英文中所有元音字母构成的集合 $A=\{a，e，i，o，u\}$.

例 1.1.2　二进制基数构成的集合 $B=\{0，1\}$.

例 1.1.3　正奇数集合 $O=\{1，3，5，7，9，11，\cdots\}$.

**描述法**：用 $\{x|P(x)\}$ 刻画集合中元素的性质.这里竖线“|”左边是集合元素的一般表示，右边 P(x)表示 x 具有的性质.

例 1.1.4　小于 100 的所有素数构成的集合，可以表示为 $\{x|x$ 是素数，$x<100\}$.

**文氏图表示法：**文氏图是以英国数学家 John Venn 的名字命名的，我们考虑所有研究对象的集合 $U$，称为全集. 在文氏图中用长方形表示全集. 在长方形内部，圆形表示集合，有时用点表示集合中的特定的元素. 由于文氏图直观和形象的特点，所以文氏图常用来表示集合之间的关系.

例 1.1.5　图 1-1 表示英文中所有元音字母构成的集合 $A$ 的文氏图.

集合的表示方法很多，这里只列出常用的三种，无论用什么方法表示集合，都应注意两点：集合中的元素是互不相同的；集合中的元素是不规定次序的.

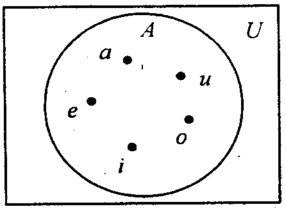



图 1-1

## 1.2 子集与空集

**定义 1.2.1**　设 $A,B$ 是集合，如果 $A$ 中每个元素又都是 $B$ 中的元素，则称 $A$ 是 $B$ 子集(*subset*)，也称 $A$ 包含于 $B$，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

由定义可知，$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\in A$，则有 $x\in B$. 这里"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当"；"$\forall x$"表示"对任意的 $x$"，以后我们也用符号"$\exists x$"，表示"存在一个 $x$"．等价地，$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\notin B$，则有 $x\notin A$. 如果 $A$ 不是 $B$ 的子集，即在 $A$ 中至少有一个元素不属于 $B$，则称 $B$ 不包含 $A$ 或 $A$ 不包含于 $B$，记作记作 $A\not\subseteq B$ 或 $B\not\subseteq A$.

**定义 1.2.2**　设 $A$，$B$ 是集合，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 $A$ 为 $B$ 的真子集，也称 $B$ 真包含 $A$ 或 $A$ 真包含于 $B$，记作 $A\subset B$. 若 $A$ 不是 $B$ 的真子集，则记作 $A\not\subset B$.

例 1.2.1　$\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$

**定义 1.2.3**　设 $A$ 和 $B$ 是任意两个集合，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A=B$. 若 $A$ 与 $B$ 是两个不相等的集合，记为 $A\neq B$.

**注意：**如果 $A$ 和 $B$ 由完全相同的元素组成时，那么 $A$ 与 $B$ 就是相等的两个集合. 但这并不意味这两个集合是用相同方法定义的.

例 1.2.2　$A=\{2\}$，$B=\{x|x$ 为偶素数$\}$，则 $A=B$.

**定义 1.2.4**　不包含任何元素的集合称为空集合，简称空集. 记作 $\varnothing$.

由空集的定义可知，空集是一切集合的子集，如果两个集合都没有元素，则它们就有同样多的元素.这就是说任何空集都是相等的，即空集是惟一的.

例 1.2.3　$\{x\,|\,x^2-2x+1<0\text{且}x\in R\}$ 以及 $\{x\,|\,x^2+y^2<0\text{且}x,y\in R\}$ 都是空集.

## 1.3　补集

**定义 1.3.1**　设 $A$ 是集合，由属于全集 **U** 但不属于集合 $A$ 的元素构成的集合称为 $A$ 的补集，记作 $\overline{A}$ (也有的记为~$A$).

例如，全集 $U$ 是全体实数构成的集合，$A=\{x|x$ 是有理数$\}$，则 $\overline{A}=\{x|x$ 是无理数$\}$.

集合 $A$ 的补集 $\overline{A}$ 用文氏图表示如图 1-2 的阴影部分.

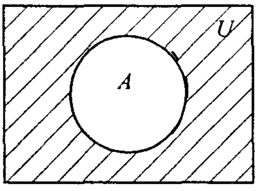


图 1-2

由补集的定义，容易得到补集的下列性质：

(1) $\overline{U}=\varnothing$；

(2) $\overline{\varnothing}=U$;

(3) $A\cup\overline{A}=U$;

(4) $A\cap\overline{A}=\varnothing$.

# 1.4 集族和幂集

**定义 1.4.1** 以集合为元素的集合称为集族（*set family*）.

设 $A_1$，$A_2$，$A_3$ 为集合，则 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 为一个集族. 若令 $I=\{1, 2, 3\}$，则 $\forall i\in I$ 确定了一个惟一的集合 $A_i$. 于是集族 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 可以表示为 $\{A_i|i\in I\}$，这时称该集族是以 $I$ 为指标集的集族，$I$ 称为集族 $\{A_i|i\in I\}$ 的指标集（*index set*）.

例如，$A_i=\{x|x=i(\bmod k)\}$，$i\in Z_k=\{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$，则 $\{A_i|i\in Z_k\}$ 是以 $Z_k$ 为指标集的集族.

**定义 1.4.2** 由 $S$ 的所有子集为元素的集合称为集合 $S$ 的幂集，记作 $P(S)$ 或 $2^S$. 于是有 $P(S)=2^S=\{A|A\subseteq S\}$.

例 1.4.1 设 $A=\{a, b, c\}$，则 $A$ 的幂集 $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

# 1.5 集合的计算机表示

计算机表示集合的方式有多种，一种方法是把集合的元素无序地存储起来，但这样做在集合的运算时会浪费时间.因为这些运算将需要大量的元素的查找操作.这里介绍一种便于计算机实现集合运算并节省空间的方法，首先存储全集元素的一个任意排列如 $a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_n$，然后对于全集的任意子集 $A$，都可用长度为 $n$ 的位串来表示，方法如下：如果 $a_i\in A$，则 $A$ 所对应的位串的第 $i$ 位为 1，否则第 $i$ 位为 0.

例 1.5.1　假定全集 $U=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$，用位串表示下列子集：（1）$A=\{a, b, c, d\}$；（2）$B=\{a, c, e, g, i, k\}$.

解：表示 $U$ 的子集 $A=\{a, b, c, d\}$的位串，即第 1，2，3，4 位为 1，其他位为 0，

即 1111 0000 0000 （为方便阅读，我们把位串分为长度为 4 的 3 段)表示 $B=\{a, c, e, g, i, k\}$的位串为 1010 1010 1010.

用位串表示法在求给定集合 $A$ 的幂集时也很方便. 假定 $A$ 中含有 $n$ 个元素，我们可以将 $A$ 的任意子集与一个 $n$ 位二进制串建立一一对应关系，位串的第 $i$ 位为 1 表示该子集包含全集的第 $i$ 个元素，为 0 表示该子集不包含全集的第 $i$ 个元素.由于集合 $A$ 的幂集包含 $A$ 的所有子集，则对应的位串就从$\underbrace{00\cdots0}_{n位}$ ~$\underbrace{11\cdots1}_{n位}$，共 $2^n$ 个.

例 1.5.2　设集合 $A=\{1, 2, 3\}$，求 $A$ 的幂集 $P(A)$.

解：由三位二进制串表示对应的子集.

$000 \leftrightarrow \varnothing$

$001 \leftrightarrow \{3\}$

$010 \leftrightarrow \{2\}$

$011 \leftrightarrow \{2, 3\}$

$100 \leftrightarrow \{1\}$

$101 \leftrightarrow \{1, 3\}$

$110 \leftrightarrow \{1, 2\}$

$111 \leftrightarrow \{1, 2, 3\}$

所以 $P(A)=\{\varnothing, \{3\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$.

# 1.6　集合的基本运算

集合的运算是对给定的几个集合的元素进行重新组合.一方面通过运算可以产生新的集合；另一方面，由于引入的运算往往服从某些熟知的规则，从而简化所得到的公式.

## 1.6.1　并和交

**定义 1.6.1**　设 $A$，$B$ 是集合，由属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的所有元素构成的集合，称为 $A$ 和 $B$ 的并(*union*)，记作 $A\cup B$. 即 $A\cup B=\{x \mid x\in A或x\in B\}$. $A\cup B$ 的文氏图如图 1-3 所示. 可将并运算推广到任意多个的情形 $\bigcup\limits_i A_i$ .

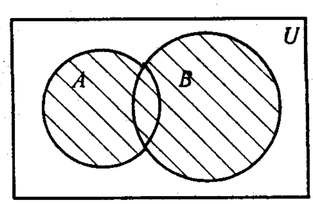


图 1-3

例如，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$.

并运算的性质：

（1）$A\cup B=B\cup A$；　　　　（交换律）

（2） $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$； （结合律）
（3） $A\cup A=A$； （等幂律）
（4） $A\cup\varnothing=A$； （同一律）
（5） $A\cup U=U$． （零　律）

**定义 1.6.2**　设 $A$，$B$ 是集合，由属于 $A$，$B$ 两集合的所有共同元素构成的集合，称为 $A$ 和 $B$ 的交（*intersection*），记作 $A\cap B$．即 $A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$．

$A\cap B$ 的文氏图如图 1-4 所示．

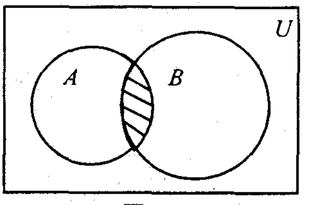


图 1-4

可将并运算推广到任意多个的情形 $\bigcap_i A_i$．

例如，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\cap B=\{1,3\}$．

例如，$A=\{a,b,c,d,e,f\}$，$B=\{a,c,e,g\}$，则 $A\cap B=\{a,c,e\}$．

若 $A\cap B=\varnothing$，则称 $A$，$B$ 不相交．

例如，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，则 $A\cap B=\varnothing$，即 $A$，$B$ 不相交．

交运算的性质：
（1） $A\cap B=B\cap A$； （交换律）
（2） $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；（结合律）
（3） $A\cap A=A$； （等幂律）
（4） $A\cap U=A$； （同一律）
（5） $A\cap\varnothing=\varnothing$； （零律）

此外，并和交运算还满足下列运算规律：

**定理 1.6.1**　设 $A$，$B$，$C$ 是集合，则下列分配律成立

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

证明：只证第一恒等式 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，另外的同理可证．

利用集合相等的定义，即证明恒等式两边 $A\cap(B\cup C)$ 与 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 互为子集，从而 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$．

由于 $\forall x\in A\cap(B\cup C)$，即有 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，亦即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in C$，于是 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，所以 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$．由此证得 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$．

反之，$\forall x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或

$x \in A$ 且 $x \in C$，亦即 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$，所以 $x \in A \cap (B \cup C)$．由此证得 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$．综上所述，最后证得 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$．

**定理 1.6.2** 设 $A$，$B$ 是集合，则下列吸收律成立

（1）$A \cap (A \cup B) = A$，$A \cup (A \cap B) = A$

（2）$A \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup B$，$A \cap (B \cup \overline{A}) = A \cap B$

证明：（1）这里只对第一个恒等式给出证明，其它恒等式的证明留做课下练习．

由于 $A \cap U = A$，

所以 $A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A$

**定理 1.6.3** 设 $A$，$B$ 是集合，则下列德•摩根律成立

（1）$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

（2）$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

证明：（1）令 $M = A \cup B$，$N = \overline{A} \cap \overline{B}$，

则 $M \cup N = (A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

$$\begin{aligned}
&= A \cup (B \cup (\overline{A} \cap \overline{B})) \\
&= A \cup ((B \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{B})) \\
&= A \cup B \cup \overline{A} \\
&= U
\end{aligned}$$

又 $M \cap N = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = ((A \cup B) \cap (\overline{A}) \cap \overline{B}$

$$\begin{aligned}
&= ((A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A})) \cap \overline{B} \\
&= (B \cap \overline{A}) \cap \overline{B} \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

所以 $M = \overline{N}$，$N = \overline{M}$，即 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$．

同理，可证（2）$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$．

德•摩根律可推广到 $n$ 个集合，则

$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$，又 $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.

### 1.6.2 差和对称差

**定义 1.6.3** 设 $A$，$B$ 是集合，由属于集合 $A$ 但不属于集合 $B$ 的所有元素组成的集合，称为 $A$ 减 $B$ 的差(*difference*)，或 $B$ 对 $A$ 的相对补，记作 $A-B$．即 $A-B=\{x \mid x \in A 且 x \notin B\}$．$A-B$ 的文氏图如图 1-5 所示.

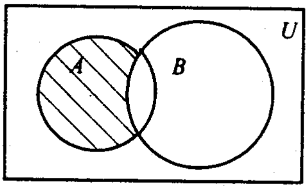



图 1-5

例如，$A$ 是素数集合，$B$ 是奇数集合，则 $A-B=\{2\}$．

例如，$A=\{x \mid x \in R 且 0<x<1\}$，

$B=\{x \mid x \in R 且 \frac{1}{2}<x<2\}$，则 $A-B=\{x \mid x \in R 且 0<x \leqslant \frac{1}{2}\}$；

$B-A=\{x \mid x \in R 且 1 \leqslant x<2\}$．

差运算满足下面的差积转换律：

**定理 1.6.4** 设 $A$，$B$ 是集合，则 $A-B=A \cap \overline{B}$．

证明：$\forall x \in A-B$，由差运算定义，则 $x \in A$ 且 $x \notin B$，即 $x \in A$ 且 $x \in \overline{B}$，所以 $x \in A \cap \overline{B}$.由此可知 $A-B \subseteq A \cap \overline{B}$．

反之，$\forall x \in A \cap \overline{B}$，即 $x \in A$ 且 $x \in \overline{B}$，亦即 $x \in A$ 且 $x \notin B$，从而 $x \in A-B$．由此可知 $A \cap \overline{B} \subseteq A-B$．于是由集合相等的定义有 $A-B=A \cap \overline{B}$．

**例 1.6.1** 证明下列德•摩根律的相对形式

（1）$A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$；

（2）$A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$．

证明：（1）$A-(B \cap C)$

$=A \cap \overline{(B \cap C)}$ （差积转换律）

$= A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$　　（德•摩根律）

$=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})$　　（分配律）

$=(A-B)\cup(A-C)$　　（差积转换律）

同理可证（2）.

**定义 1.6.4**　设 $A$，$B$ 是集合，由所有属于集合 $A$ 但不属于集合 $B$ 或者所有属于集合 $B$ 但不属于集合 $A$ 的元素组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的对称差(*symmetric difference*)，记作 $A\oplus B$. 即 $A\oplus B=\{x\mid x\in A且x\notin B或者x\in B且x\notin A\}$. $A\oplus B$ 的文氏图如图 1-6 所示.

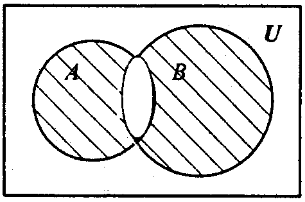



图 1-6

易知 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $A\oplus B=\{1,2,5\}$.

例如，$A=\{x\mid x\in R且0<x<1\}$ $B=\{x\mid x\in R且\frac{1}{2}<x<2\}$，则

$$A\oplus B=\{x\mid x\in R且0<x\leqslant\frac{1}{2}\}\cup\{x\mid x\in R且1\leqslant x<2\}=(0,\frac{1}{2}]\cup[1,2)$$

对称差的运算性质：

（1）$A\oplus B=B\oplus A$；　　（交换律）

（2）$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$；　　（结合律）

（3）$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$；　　（分配律）

（4）$A\oplus A=\varnothing$；

（5）$A\oplus\varnothing=A$；

（6）$A\oplus U=\overline{A}$.

由定义则很容易证明性质（1），（4），（5），（6），下面我们给出（2）和（3）的证明.

证明：（2）左边$=A\oplus(B\oplus C)=(A-(B\oplus C))\cup((B\oplus C)-A)$

$=(A\cap\overline{(B\oplus C)})\cup((B\oplus C)\cap\overline{A})$

$=(A\cap\overline{((B-C)\cup(C-B))})\cup(((B-C)\cup(C-B))\cap\overline{A})$

$=(A\cap\overline{((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}))})\cup(((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}))\cap\overline{A})$

$= (A\cap(\overline{B}\cup C)\cap(\overline{C}\cup B))\cup(((B\cap\overline{C})\cap\overline{A})\cup((C\cap\overline{B})\cap\overline{A}))$

$= (A\cap((\overline{B}\cup C)\cap\overline{C})\cup((\overline{B}\cup C)\cap B))\cup(((B\cap\overline{C})\cap\overline{A})\cup((C\cap\overline{B})\cap\overline{A}))$

$= (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap B)\cup(B\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})$

$= (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap B)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap C\cap\overline{B})$

又右边 $= (A\oplus B)\oplus C = C\oplus(B\oplus A)$ （交换律）

根据对称性：

$C\oplus(B\oplus A) = (C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\cup(C\cap A\cap B)\cup(\overline{C}\cap B\cap\overline{A})\cup(\overline{C}\cap A\cap\overline{B})$

$= (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap B)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap C\cap\overline{B})$

所以，左边 = 右边，即 $A\oplus(B\oplus C) = (A\oplus B)\oplus C$ .

（3）左边 $=A\cap(B\oplus C)=A\cap((B-C)\cup(C-B))=A\cap((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}))$

$=(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{B})$

右边 $=(A\cap B)\oplus(A\cap C)=(A\cap B)\cap(\overline{A\cap C})\cup((A\cap C)\cap(\overline{A\cap B}))$

$=((A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C}))\cup((A\cap C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))$

$=((A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C}))\cup((A\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap C\cap\overline{B}))$

$=(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{B})$

所以 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$.

例 1.6.2 证明若 $A\oplus B=A\oplus C$，则 $B=C$.

证明：对 $\forall x\in B$

(i) 若 $x\in A\Rightarrow x\in A\cap B$

$\Rightarrow x\notin(A\cup B)-(A\cap B)$

$\Rightarrow x\notin A\oplus B$ (因为已知 $A\oplus B=A\oplus C$)

$\Leftrightarrow x\notin A\oplus C$

由 $x\in A$ 且 $x\notin A\oplus C\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in C$

所以 $B\subseteq C$

(ii)若 $x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B$

又 $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$ $\Big\} \Rightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$

$\Leftrightarrow x \in A \oplus B$ (因为已知 $A \oplus B = A \oplus C$)

$\Leftrightarrow x \in A \oplus C$

由 $x \notin A$ 且 $x \in A \oplus C \Rightarrow x \in C$，所以 $B \subseteq C$.

同理可证 $C \subseteq B$.

因此，若 $A \oplus B = A \oplus C$，则 $B = C$.

例 1.6.3 设 $A$，$B$ 是集合，若 $A \oplus B = \varnothing$，证明 $A = B$.

证明：由于 $A \oplus B = \varnothing$，所以有 $(A-B) \cup (B-A) = \varnothing$，于是 $A-B = \varnothing$ 且 $B-A = \varnothing$，即 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$ .由此证得 $A = B$ .

## 1.7 集合运算的计算机实现

在 1.5 节我们介绍了集合的一种计算机表示方法，即用 0-1 位串表示集合，这种集合表示便于计算集合的并、交、差和补集.下面我们通过几个例子来阐明.

例 1.7.1 设全集 $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A = \{1,3,5,7,9\}$，则表示 $A$ 的位串为 1010101010，求表示 $\overline{A}$ 的位串.

解：显然，在 $\overline{A}$ 中不含 $A$ 中的元素，即包含在 $U$ 中而不在 $A$ 中的元素.因此只需简单地把对应 $A$ 位串中的 1 改为 0，0 改为 1 即可得到表示 $\overline{A}$ 的位串 0101010101，该位串对应集合 $\overline{A} = \{2,4,6,8,10\}$ .

例 1.7.2 集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$ 和 $B = \{1,3,5,7,9\}$ 的位串分别是则表示 $A$ 的位串为 1111100000 和 1010101010，用位串表示它们的并集和交集.

解：求 $A$ 与 $B$ 的并集的位串只需对 $A$ 所对应的位串与 $B$ 对应的位串做按位或“|”运算（0|0=0；0|1=1；1|0=1；1|1=1），所以 $A \cup B$ 所对应的位串为 1111101010．$A$ 与 $B$ 的交集的位串只需对 $A$ 所对应的位串与 $B$ 对应的位串做按位与“&”运算（0&0=0；0&1=0；1&0=0；1&1=1），所以 $A \cap B$ 所对应的位串为 1010100000.

## 1.8 有限集合的基数和容斥原理

这一节我们主要讨论有限集合及其基数的概念，并给出用于对有限集合计数的原理——容斥原理.

**定义 1.8.1** 当集合中元素个数为有限个时，称该集合为有限集(*finite set*)；当集合中元素

个数为无限时，称该集合为无限集合(*infinite set*).

**定义 1.8.2** 有限集合中元素个数称为有限集合的基数（*cardinality*）或势，记为$|A|$或 Card $A$.

**定理 1.8.1** $S$是有限集，则$|P(S)|=2^{|S|}$.

证明：设$|S|=n$，由排列组合知识可知，从$n$个元素中选取$k$个不同元素的方法共有$C_n^k$种，

所以$S$的不同子集数目为$|P(S)|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n=2^{|S|}$.

下面我们讨论有限集合的计数问题，当$A\cap B=\varnothing$时，$|A\cup B|=|A|+|B|$. 对于一般情况有：

**定理 1.8.2（容斥原理）** 设$A$，$B$是有限集合，则$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

证明：由于$A\cup B=A\cup(B-A)$，而$A\cap(B-A)=\varnothing$. 所以$|A\cup B|=|A\cup(B-A)|=|A|+|B-A|$.

又由于$B=(B-A)\cup(A\cap B)$，而$(B-A)\cap(A\cap B)=\varnothing$，所以$|B|=|(B-A)\cup(A\cap B)|=|B-A|+|A\cap B|$，

即$|B-A|=|B|-|A\cap B|$. 所以$|A\cup B|=|A\cup(B-A)|=|A|+|B-A|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

该定理也可推广到3个或更多的集合之并的元素的计数中.

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

$n$个有限集合并的元素的计数公式：

**推论 1** 设$A_1$，$A_2$，$A_3$，…，$A_n$是有限集合，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

**推论 2** 设$A_1,A_2,A_3,\cdots A_n$是有限集合，则

$$|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}|=|U|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

例 1.8.1 一家报社对200人进行调查的结果是：有95人订甲报，有128人订乙报，有82人订丙报；有61人既订甲报又订乙报，有51人既订甲报又订丙报，有40人既订乙报又订丙报，有30人这3种报纸都定，问对这3种都没有订阅的有多少人？

解：$U$：表示研究对象的全体（即被调查的200人）；

$A$：订阅甲报的人的集合，则$|A|=95$；

$B$：订阅乙报的人的集合，则$|B|=128$；

$C$：订阅丙报的人的集合，则$|C|=82$；

又由题设可知：$|A\cap B|=61$，$|A\cap C|=51$，$|C\cap B|=40$，$|A\cap B\cap C|=30$；

则这3种都没有订阅的人数为

$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|U|-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|C\cap B|+|A\cap B\cap C|)$