



中学数学学习与思维丛书

高中代数内容方法技巧

(上册)

张乃达 汤希龙 主编

长春出版社

中学数学学习与思维丛书

高中代数内容方法技巧

新登(吉)字第10号

高中代数内容方法技巧(上册)

张乃达 汤希龙 主编

责任编辑:李凤岐

封面设计:庄宝仁

长春出版社出版
(长春市建设街43号)

新华书店总店北京发行所发行
长春市人民印刷厂印刷

开本, 787×1092 1/32

1992年6月第1版

印张, 11.25

1992年6月第1次印刷

字数, 262 000

印数, 1—10 050册

ISBN 7-80573-555-7/G·212

定价: 4.50元

出版者的话

思维是“地球上最美的花朵。”著名哲学家加里宁说：“数学是思维的体操。”数学是一种完美的思维形式，它充满了思维的光辉，到处闪烁着思维的火花，无处不激荡着思维的波澜。伟大导师马克思、恩格斯就曾把数学演算当作最大乐趣。从某种意义上说，“数学就是教人思维”，数学的真谛就在于思维。思维又是数学的灵魂与精髓。数学教育不仅要向受教育者传授知识，更重要的是如何启迪思维，拨响思维的琴弦，爆发出智慧的火花。

中学是开发智力、培养科学思维的黄金季节。“英雄出少年”在数学领域尤为明显。一些数学巨匠和天才，往往从中学时代就已崭露头角，其成功的秘诀之一，就是重视思维的训练和培养。因此，数学教学必须重视“思维的训练”。只有思维灵活、敏捷和具有深邃的洞察力，才能学习得更好，才能驾驭数学之舟，由“必然王国”驶向“自由王国”。

正是基于以上的认识，我们组织出版了《中学数学学习与思维丛书》。这套丛书本着“指导学习，激励思维”的宗旨，由一些对数学思维教育颇有造诣的特级教师和高级教师担任主编或作者。

本《丛书》不同于一般的题解和习题集，在编排内容上十分突出学科的基本结构，并将其作为研究解题技巧的出发点与归宿。

本《丛书》又不同于一般的辅导读物和学习指南，它是
以解题为中心，以“思维链”为契机，努力把理论观点寓于
解题过程之中，并力求充分暴露思维过程。

本《丛书》也不同于其他的精编、荟萃，更不囿于“解
题术”的框架，而是帮助读者建立良好的认知结构，发展数
学观念系统，掌握思维方法与思维规律，增进运筹思维的技
能和提高思维的迁移能力。

本《丛书》体例新颖、形式独特，除了注意语言的可接
受性外，还兼顾各年级学生的语言习惯，力求生动、有趣味
性，同时又尽可能地使用框图、图表等，以增加信息密度、
突出强度。

本《丛书》集知识性、实用性、科学性于一体，结构合
理，独具匠心。愿这套丛书能成为广大中学生和自学青年的
良师，更希望她能成为广大数学教师、学生家长等关心青少
年思维发展者的益友。

前 言

本书是《中学数学学习与思维丛书》中的一种，供高中学生学习和复习高中代数上册（必修）时使用。

随着高中毕业会考制度的实施，对高中数学教学的内容和要求均作了适当的调整，为了满足不同层次的广大高中学生学习和复习数学的需要，我们编写了此书。

古人云：“学而不思则罔，思而不学则殆。”学习与思维是学习活动中的两个重要环节。本丛书的编写宗旨就在于“指导学习，激励思维”。意图通过对中学数学的教学内容、结构、方法和技巧的分析，帮助学生实现学好数学知识，形成数学能力，提高精神素质的目的。

本书是根据高中代数上册（必修）课本编写的。为了适应高中毕业会考以及高中升学考试的不同需要，全书分上、下两编。

上编（1—4）章采用线性结构编写，其顺序严格与课本同步，以适应高中毕业会考对代数教学的要求，全编以课题（小节）为基本单元。在课题中分设“知识讲解”、“技能训练”、“方法剖析”、“解题指导”等专栏。其中“知识讲解”着重阐明重要的概念、定理产生的背景和根据，分析定理、公式推导的思路，揭示知识间的层次结构和内部联系，以达到帮助学生透彻地理解数学知识的目的。“技能训练”则围绕着重要的技能训练点，设置若干个题组，总结解决常规问题的具体步骤，提供技能训练题，让学生通过多次、反复的练习，形成熟练的技能，为数学思维的训练扫清

障碍并打好基础。

“解题指导”与“方法剖析”，是帮助学生发展数学思维能力的重要辅导材料，它们分别围绕着典型例题或典型的方法，看重分析解决问题的思维过程。为了卓有成效地发展学生的数学观念和激发学生的数学思维活动，在上述分析中，又特别注意揭示问题的概略性解决的思维层次，以期能学到分析问题和解决问题的一般方法。

本书的下编（第5章）在上编的基础上，着重对高中代数的学科结构作出高度的概括和深入的阐述。并在此基础上，系统地介绍了各种常用的解题方法和技巧，分析了它们产生的背景和根据，希望通过对解决较复杂的问题的思维过程的分析，来对学生进行系统的思维训练，提高他们分析问题解决问题的能力，以达到高考对代数（上册）考查的要求。因而，这部分材料可以供参加高考的同学作代数总复习时使用。

本书由张乃达（特级教师）、汤希龙（特级教师）、周学祁（特级教师，本书特约主编）主编；由示邑、张建青、袁亚良老师编写，周学祁统稿，张乃达、汤希龙定稿，尤善培老师审阅了全书并复核了习题答案。

衷心地希望广大同行及读者提出宝贵意见。

张乃达 汤希龙

1992年3月于扬州

目 录

上 编

第一章 幂函数、指数函数和对数函数.....	(1)
一 集合.....	(2)
二 映射与函数.....	(19)
三 幂函数.....	(29)
四 指数函数和对数函数.....	(49)
复习题一.....	(67)
第二章 三角函数.....	(70)
一 任意角的三角函数.....	(71)
二 三角函数的图象和性质.....	(114)
复习题二.....	(145)
第三章 两角和与差的三角函数.....	(149)
复习题三.....	(194)
第四章 反三角函数和简单三角方程.....	(200)
一 反三角函数.....	(200)
二 简单三角方程.....	(229)
复习题四.....	(245)

下 编

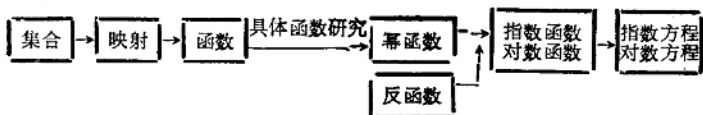
第五章 初等函数解题研究.....	(247)
一 函数性质——初等函数研究的基石.....	(247)
二 化归思想——初等函数研究的指南.....	(259)
三 数形结合——初等函数研究的 重要方法.....	(274)
四 图形变换——初等函数研究的 重要手段.....	(286)
五 逆向思维——初等函数研究的 重要思维形式.....	(300)
六 分域讨论——初等函数研究的 重要策略.....	(309)
复习题五.....	(319)
综合自测题.....	(324)
答案与提示.....	(329)

上 编

第一章 幂函数、指数函数 和对数函数

内 容 提 要

本章知识结构如下：



本章的重点内容，是集合、映射、函数、反函数的概念，以及幂、指、对三种函数的性质。本章的难点，是映射、函数与反函数概念的理解，以及函数单调性与奇偶性的一些证明题。

学习本章，应注意理解贯穿于本章甚至整个高中代数的集合、映射思想与函数观点；注意数形结合、化归思想这些思想方法的运用，注意培养逆向思维的习惯。由于本章概念较多，还要适当运用对比、类比的方法。

一、集 合

1.1 集 合

知 识 讲 解

1. 什么是集合

集合是一个不定义的概念，例如，“ $\times \times$ 中学高一年级的团员”就是一个集合。一般地，符合某种条件的对象的全体，就构成一个“集合”，简称“集”。构成集合的对象，叫做集合的元素。

从“ $\times \times$ 中学高一年级的团员”这个例子，可以知道集合有如下三个特性：

(1) 元素的确定性：即任一同学或者属于“ $\times \times$ 中学高一年级的团员”这个集合，或者不属于这个集合，二者必居其一。由此可见，集合的元素既是完备的（即每一个 $\times \times$ 中学高一年级的团员都是集合的元素）；又是纯粹的（即不是 $\times \times$ 中学高一年级的团员的人都不是集合的元素）。

(2) 元素的互异性：在“ $\times \times$ 中学高一年级的团员”这个集合中，每个团员都是不同的。（在其它例子中，如果有相同元素归入同一集合时，只能算作该集合的一个元素。）

(3) 元素的无序性：在上述例子中，团员之间，是不考虑其顺序的。

2. 集合的表示法

(1) 列举法：当集合是有限集时，可以用逐一列举其中

元素的方法来表示。例如“绝对值小于3的整数集合”，可以表示为 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 。

(2) 描述法：当集合是无限集，或者虽是有限集，但集合中的元素过多时，常可用描述法表示。例如“200以内的质数”所成的集合，若用列举法则不胜其繁，即可用描述法表示为{200以内的质数}，或 $\{m|m \text{ 为质数, 且 } m < 200\}$ 。

需要注意，有些集合用描述法表示时，可以省去竖线及其左边的部分，但以不引起混淆为前提。例如，集合 $\{x|x^2 - 5x - 6 = 0\}$ 表示满足方程 $x^2 - 5x - 6 = 0$ 的 x 的全体，即 $\{6, -1\}$ ，其元素是数；而集合 $\{x^2 - 5x - 6 = 0\}$ 则是由方程“ $x^2 - 5x - 6 = 0$ ”作为元素的集合，元素是一个二次方程。

3. 符号

符号“ $\in$ ”、“ $\notin$ ”是表示元素与集合之间的关系的，不能用来表示集合之间的关系。正确用法如： $3 \in \{\text{奇数}\}$ ， $0 \notin \{\text{奇数}\}$ ，等等。

课本中还规定了常用数集的符号，如 R^+ 表示正实数集， $\sqrt{2} \in R^+$ ， $-\sqrt{2} \in R^-$ 等。

例1. 选择 $[*]$ ：

下列命题中

- (1) “所有半径较小的圆”是一个集合
- (2) “所有边长为整数的直角三角形”是一个集合
- (3) 集合 $\{a, b, c, d, a\}$ 中有5个元素
- (4) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ 与 $\{8, 6, 4, 2, 0\}$ 表示同一个集合

正确的命题为 ()。

$[*]$ 在本书中，所有选择题都是单项选择题。

- (A) 仅(1)和(2); (B) 仅(2)和(4);
(C) 仅(3)和(4); (D) 仅(1)和(4).

关键 正确理解与把握 集合的三个特性.

解 由集合中元素的确定性可知“所有半径较小的圆”不是一个集合,例如,半径为0.1厘米的圆是否属于这个集合,就无法确定;而“所有边长是整数的直角三角形”则是一个集合,即边长为勾股数组的直角三角形所组成的集合,如边长为“5, 12, 13”的三角形即属于该集合,而边长为“4, 5, 6”的三角形,则不属于该集合,故(1)错而(2)正确.由集合中元素的互异性可知,(3)所述的集合中只有4个元素;由元素的无序性可知, $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ 与 $\{8, 6, 4, 2, 0\}$ 表示同一个集合,故(3)错而(4)正确,应选(B).

例2 用另一种形式表示下列集合.

(1) {奇数}; (2) $\{y | -5 < y \leq 4, y \in \mathbb{Z}\}$.

解 (1) {奇数}还可表示为 $\{n | n = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) 可用列举法表示为 $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

例3 判断正误

(1) $\{0\}$ 表示仅有一个元素“零”的集合; ()

(2) $\{1\} \in \{1, 3, 5\}$; ()

(3) 若 $a \in \mathbb{N}$, 则 $a \in \mathbb{Z}$; ()

(4) $\{x + y = 0\}$ 表示直角坐标平面中二、四象限角平分线上的点所组成的集合. ()

解 (1) 正确. 注意, “0”也是一个元素.

(2) 错误. 符号“ $\in$ ”不能表示两个集合间的关系.

(3) 正确。“ $a \in N$ ”表明 a 属于自然数集，“ $a \in Z$ ”表明 a 属于整数集；当 a 是自然数时，必然也是整数。

(4) 错误。 $\{x+y=0\}$ 是只有一个元素（即方程“ $x+y=0$ ”）的有限集，而 $\{(x,y)|x+y=0\}$ 才表示二、四象限角平分线上的点所组成的集合。

同步练习

1. 判断（对的打“√”，错的打“×”）

- (1) 平面直角坐标系中，到 y 轴的距离等于1的所有点，可以构成一个集合； ()
- (2) {质数}中的所有元素都是奇数； ()
- (3) $\{x|x^2-2x+1=0\}$ 中有两个元素； ()
- (4) $\{a|a^0=1\}=R$. ()

2. 用另一种形式表示下列集合：

- (1) {所有能被5整除的自然数}_____，
- (2) { y 轴上纵坐标为整数的点}_____；
- (3) $\{x|x=2n, n \in Z\}$ _____；
- (4) $\{x||x| \leq 2, x \in Z\}$ _____.

标准化自测题

1. 判断正误

- (1) {12的约数}中一共有4个元素； ()
- (2) $\{2x-1>0\}$ 与 $\{x|2x-1>0\}$ 表示同一个集合； ()
- (3) $\{x|x^2+1>0\}=R$ ； ()
- (4) 在实数范围内，若 $a \notin R^-$ ，则 $a \in R^+$. ()

2. 选择填空（把正确答案的代号填入相应的空格内。）

- (1) _____ $\in N$, _____ $\in Z^-$.

(A) $\sqrt[3]{-8}$; (B) $\sqrt{5}$; (C) 2π ; (D) $\sqrt[3]{27}$.

(2) $2\cos 30^\circ \in$ _____, $\lg 135^\circ \in$ _____.

(A) N ; (B) Z ; (C) Q^+ ; (D) R^+ .

3. 用另一种形式表示下列集合:

(1) {正奇数};

(2) $\{\triangle ABC | \triangle ABC \text{ 满足: } AB = BC = CA\}$.

1.2 子集、交集、并集、补集

知识讲解

1. 子集

(1) 子集.

例如, $\{\times \times \text{中学高一(2)班同学}\}$ 是 $\{\times \times \text{中学高一年级同学}\}$ 的子集. 一般地, 如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素, 集合 A 就叫做集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$, 或 $B \supseteq A$.

注意 当 A 是 B 的子集时, 则 A 一定是由 B 的部分 (不是全部) 元素所构成的吗? 不一定. 例如集合 A, B 都含有四个元素 a, b, c, d 时, 仍有 $A \subseteq B$. 因此, 任何集合都是它本身的子集.

(2) 真子集.

考察集合 $A = \{-2, -1, 1, 2\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 一方面, 集合 A 是 B 的子集, 另一方面, B 中至少有一个元素 “0” 不属于 A , 这时 A 就是 B 的一个真子集. 记作 $A \subset B$, 或 $B \supset A$.

(3) 空集.

考察集合 $\{x | x^2 + 2 < 0, x \in R\}$, 显然没有任何一个实

数 x 能使 $x^2+2<0$ 成立,所以该集合中没有任何元素。不含有任何元素的集合叫做空集;空集记号“ ϕ ”读如“欧”。

空集是任何集合的子集,也是任一非空集合的真子集。例如 $\phi\subset\{0\}$,这是因为集合 $\{0\}$ 中含有一个元素“0”,而 $0\notin\phi$ 。

注意 空集不能记作 $\{\phi\}$, ϕ 与 $\{\phi\}$ 有什么不同?请读者思考。

例1 下列命题或记法中,正确的是()。

(A) $R^+\in R$; (B) $Z^-\supset\{x|x\leq 0, x\in Z\}$; (C) 空集是任何集合的真子集; (D) $\phi\in\{\phi\}$ 。

解 (A) 中 R^+ 是 R 的真子集,应记作 $R^+\subset R$;

(B) 中 Z^- 是负整数集,而 $\{x|x\leq 0, x\in Z\}$ 是负整数和零的集合,故应有 $Z^-\subset\{x|x\leq 0, x\in Z\}$; (C) 中,当“任何集合”为空集时,即为反例;故(A)、(B)、(C)均不正确。(D) 中 $\{\phi\}$ 表示以空集 ϕ 为元素的集合,可以这样表示,故应选(D)。

(4) 集合包含关系的传递性

例如, $N\subset Z$, $Z\subset R$, 则有 $N\subset R$ 。一般地, 对于集合 A 、 B 、 C , 如果 $A\supseteq B$, $B\supseteq C$, 那么 $A\supseteq C$ 。如果 $A\subset B$, $B\subset C$, 那么 $A\subset C$ 。

(5) 集合的相等

例如, 集合 $P=\{\alpha|\sin\alpha=\frac{1}{2}, \alpha\text{为三角形内角}\}$, $Q=\{30^\circ, 150^\circ\}$, 则有 $P=Q$ 。

一般地, 如果 $A\subseteq B$, 且 $B\supseteq A$, 这时就称 A 、 B 两个集合相等, 记作 $A=B$ 。

注意 $\supseteq$ 、 $\subseteq$ 、 $\supset$ 、 $\subset$ 、 $\nsubseteq$ 、 $\not\supset$ 及“=”都是表示集合间关系

的符号。

例2 与集合 $P = \{x | x^2 - 4x + 4 = 0\}$ 相等的集合是 ()

- (A) $\{x | x \sin 30^\circ = 1\}$; (B) $\{x | x \cos 120^\circ = 1\}$;
(C) $\{(2, 2)\}$; (D) 2.

解 方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 的根为 $x_1 = x_2 = 2$, 根据集合中元素的互异性可知 $P = \{2\}$. 在各选择支中, 唯有 (A) 的

集合中只含有一个元素 2 (由 $x \sin 30^\circ = 1$ 得 $\frac{1}{2}x = 1$, $\therefore x =$

2). 故应选 (A). 请读者说出其余选择支不合的理由.

同步练习

4. 选择: 若 $M = \{\text{四边形}\}$, $N = \{\text{平行四边形}\}$, $P = \{\text{矩形}\}$, $Q = \{\text{菱形}\}$, $G = \{\text{正方形}\}$, 则下列关系式

- ① $M \supset N \supset P \supset G$; ② $M \supset N \supset G \supset P$;
③ $M \supset N \supset G \supset Q$; ④ $M \supset N \supset Q \supset G$.

中, 正确的是 ().

- (A) ①和③; (B) ②和④;
(C) ①和④; (D) ②和③.

5. 若 $A = \{\text{小于6的质数}\}$, 写出 A 的所有真子集.

6. 选择: 与集合 $\{x | |x| < 3\}$ 相等的集合是 ().

- (A) $\{x | 0 \leq x + 3 \leq 6\}$; (B) $\{x | -2 < x - 1 < 2\}$;
(C) $\{y | -5 < y + 2 < 5\}$; (D) $\{y | -5 < y - 2 < 1\}$.

2. 交集

例如, $A = \{\text{高一(2)班的男生}\}$, $B = \{\text{高一(2)班的团员}\}$, 则 $\{\text{高一(2)班的男团员}\}$ 就是 A 和 B 的交集, 记作 $A \cap B$.

一般地, 定义 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且} x \in B\}$.

• 8 •