



毛 纲 源 考 研 数 学 辅 导 系 列

◇ 题型全面 紧扣大纲

帮你高效复习

◇ 方法新颖 技巧独特

助你考研成功

毛纲源 编著

2008

考研数学(三)

常考题型解题方法技巧归纳

华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

013-44

013-44/138

:2008(3)

2007

毛纲源考研数学辅导系列

考研数学(三) 常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

考研数学(三)常考题型解题方法技巧归纳/毛纲源 编著. -2 版. —武汉:华中科技大学出版社,2007 年 8 月

ISBN 978-7-5609-3253-8

I. 考… II. 毛… III. 高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 106716 号

考研数学(三)常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著

责任编辑:王汉江

封面设计:潘 群

责任校对:陈 骏

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm 1/16

印张:32

字数:593 000

版次:2007 年 8 月第 2 版

印次:2007 年 8 月第 3 次印刷

定价:39.80 元

ISBN 978-7-5609-3253-8/O · 330

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前 言

为使考研者能在较短时间内全面复习,提高考研应试能力和水平,作者根据最新数学考试大纲的要求,深入研究了历年来考研试题,结合作者多年来在考研辅导班的授课经验,编写了《考研数学(数学三)常考题型及其解题方法技巧归纳》一书.该书自问世以来,历经三次全国统考,其内容每年都覆盖了试题的绝大部分题型,现已重印多次,畅销全国,以其题型全面、方法新颖、技巧独特、适于自学等特点深受全国广大考生的青睐.

本书经过此次修订,增加了新增考点的有关内容,同时还纠正了差错,弥补了疏漏,更好地体现了考研数学大纲的思想和要求.

具体体现在以下几点.

首先,本书根据考研数学大纲的要求,将历年来考研数学试题按题型分类,对各类题型的解法进行了归纳总结,使考生能做到举一反三.数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好这些题型及其解题方法与技巧,会减少解题的盲目性,从而提高解题效率,考生的应试能力自然就得到了提高.同时也便于考生掌握考研数学(三)的大部分题型及其解题思路、方法与技巧,因而,本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解.为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析,便于考生理解、记忆,避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法,这些简便算法新颖、独特,它们是作者多年来教学经验的总结,会大大提高考生的解题速度和准确性,使考生大大节省时间,因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注意培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力,对综合型题型进行了较多的分析和解法,以期提高考生在这方面的能力.与此同时,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,能灵活地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深,适于自学,尽量使选用例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识,也为了更好地阅读本书,特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书,这就是本人编写的经济类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书:《经济数学(微积分)解题方法技巧归纳(第2版)》、《经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳(第2版)》、《经济数学(概率论与数理统计初步)解题方法技巧归纳(第2版)》.这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评,多次印刷,久销不衰.很多已考取的经济类硕士研究生不少都受益于这套丛书.本人在撰写本书时,多处引用了这套丛书的内容和方法,如果能把丛书结合起来学习必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误、疏漏之处在所难免,恳请专家、读者指正.

编者

2007年3月

目 录

第 1 篇 微 积 分

1.1 函 数	(1)
1.1.1 求几类函数的表达式	(1)
题型一 已知函数,求其反函数的表达式	(1)
题型二 求分段函数的复合函数	(1)
1.1.2 判别(证明)几类函数的奇偶性	(2)
题型一 判别经四则运算后的函数的奇偶性	(2)
题型二 判别自变量带相反符号的两同名函数的代数和的奇偶性	(3)
题型三 判别复合函数的奇偶性	(3)
题型四 判别原函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的奇偶性	(3)
题型五 判别函数 $(a^{kx}\pm 1)/(a^{kx}\mp 1)$ 的奇偶性 ($a>0, a\neq 1, k\neq 0$)	(3)
1.1.3 奇、偶函数的几个性质的应用	(4)
1.1.4 函数有界性的判定	(4)
题型一 判定在有限开区间内连续函数的有界性	(5)
题型二 判定在无穷区间内连续函数的有界性	(5)
题型三 判定分段连续函数的有界性	(6)
习题 1.1	(6)
1.2 极限、连续	(8)
1.2.1 极限的概念与基本性质	(8)
题型一 正确理解极限定义中的“ ϵ, N ”, “ ϵ, δ ”, “ ϵ, X ”语言的含义	(8)
题型二 正确区别无穷大量与无界变量	(8)
题型三 正确运用极限的保序性、保号性	(9)
题型四 运用极限的四则运算法则或夹逼准则判别极限的存在性	(10)
1.2.2 求未定式极限	(10)
题型一 求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限	(10)
题型二 求 $0\cdot\infty$ 型极限	(13)
题型三 求 $\infty-\infty$ 型极限	(13)
题型四 求幂指函数型 ($0^0, \infty^0, 1^\infty$ 型) 极限	(14)
1.2.3 求数列极限	(16)
题型一 求无穷多项和的极限	(16)
题型二 求由递推关系式给出的数列极限	(19)
1.2.4 求几类子函数形式特殊的函数极限	(19)
题型一 求需先考察左、右极限的函数极限	(19)
题型二 求含 $1/x$ 的函数极限	(21)
题型三 求含根式差的函数极限	(21)
题型四 求含指数函数差的函数极限	(22)

题型五	求含 $\ln f(x)$ 的函数极限, 其中 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 1$	(22)
题型六	求含有界变量为因子的函数极限	(22)
1.2.5	已知含未知函数的极限, 求与该函数有关的极限	(23)
1.2.6	求极限式中的待定常数	(24)
题型一	求有理函数极限式中的待定常数	(24)
题型二	确定分式函数极限式中的待定常数	(25)
题型三	求 $\infty \pm \infty$ 型的根式极限式中的待定常数	(26)
题型四	求含变项积分的极限式中的待定常数	(26)
1.2.7	比较和确定无穷小量的阶	(26)
题型一	比较无穷小量的阶	(27)
题型二	确定无穷小量为几阶无穷小量	(28)
题型三	利用无穷小量阶的比较求待定常数	(29)
1.2.8	讨论函数的连续性及其间断点的类型	(29)
题型一	判别初等函数的连续性	(30)
题型二	讨论分段函数的连续性	(31)
题型三	讨论含参变量的极限式所定义的函数的连续性	(31)
题型四	判别函数间断点的类型	(32)
1.2.9	连续函数性质的两点应用	(34)
题型一	利用连续函数性质证明中值等式命题	(34)
题型二	证明方程实根的存在性	(35)
1.2.10	极限在经济活动分析中的应用	(36)
题型一	计算连续复利	(36)
题型二	求解贴现问题	(36)
题型三	计算生产函数的极限	(37)
习题 1.2		(37)
1.3	一元函数微分学	(41)
1.3.1	导数定义的三点应用	(41)
题型一	讨论函数在某点的可导性	(41)
题型二	利用导数定义求某些函数的极限	(44)
题型三	利用导数定义求函数表达式	(45)
1.3.2	讨论分段函数的可导性及其导函数的连续性	(45)
题型一	讨论分段函数的可导性	(45)
题型二	讨论分段函数的导函数的连续性	(46)
题型三	讨论一类特殊分段函数在其分段点的连续性、可导性 及其导函数的连续性	(47)
1.3.3	讨论含绝对值的函数的可导性	(47)
题型一	讨论绝对值函数 $ f(x) $ 的可导性	(47)
题型二	讨论 $f(x) = \varphi(x) g(x)$ 的可导性	(48)
1.3.4	求一元函数的导数和微分	(49)
题型一	求复合函数的一阶导数与二阶导数	(49)
题型二	求反函数的导数	(49)
题型三	求由一个方程所确定的隐函数的导数	(50)
题型四	求分段函数的一阶、二阶导数	(51)

题型五	求带绝对值的函数的导数	(51)
题型六	求幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的导数	(52)
题型七	求某些简单函数的高阶导数	(52)
题型八	求一元函数的微分	(54)
1.3.5	利用函数的连续性、可导性确定其待定常数	(56)
题型一	利用函数的连续性确定其待定常数	(56)
题型二	根据函数的可导性确定待定常数	(57)
1.3.6	利用微分中值定理的条件及其结论解题	(58)
1.3.7	利用罗尔定理证明中值等式	(59)
题型一	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $cf'(\xi) = bg'(\xi)$, 其中 c, b 为常数	(59)
题型二	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi) = 0$	(60)
题型三	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0 (g(x) \neq 0)$	(60)
题型四	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$	(61)
题型五	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - b\xi] = b$	(61)
题型六	已知函数在端点和在别处的取值情况, 证明有关的中值等式	(62)
题型七	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0 (n \text{ 为正整数})$	(63)
题型八	证明题设中有定积分等式的中值等式	(63)
题型九	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F^{(k)}(\xi) = 0 (k \geq 2)$	(64)
1.3.8	拉格朗日中值定理的几点应用	(65)
题型一	证明与函数差值有关的中值命题	(65)
题型二	证明函数与其导数的关系	(66)
题型三	证明含或可化为函数差值的不等式	(68)
题型四	求中值的(极限)位置	(68)
1.3.9	利用柯西定理证明中值等式	(69)
题型一	证明两函数差值之比的中值等式	(69)
题型二	证明两函数导数之比的中值等式	(69)
1.3.10	证明多个中值所满足的中值等式	(70)
1.3.11	利用导数讨论函数性态	(72)
题型一	证明函数在区间 I 上是一个常数	(72)
题型二	证明(判别)函数的单调性	(72)
题型三	利用极限式讨论函数是否取得极值	(73)
题型四	利用二阶微分方程讨论函数是否取极值, 其曲线是否有拐点	(75)
题型五	利用导数(值)的不等式, 讨论函数是否取极值, 其曲线是否有拐点	(75)
题型六	求函数的单调区间、极值、最值	(75)
题型七	求曲线凹凸区间与拐点	(77)
题型八	求曲线的渐近线	(79)
题型九	利用函数性态作函数图形	(81)
题型十	已知函数的图形, 确定其函数或其导函数性质	(82)
题型十一	利用导函数的图形, 确定原来函数的性态	(82)
1.3.12	利用函数性态, 讨论方程的根	(83)
题型一	讨论不含参数的方程实根的存在性及其个数	(83)
题型二	讨论含参数的方程实根的个数及其所在区间	(83)
1.3.13	利用导数证明不等式	(85)

题型一	已知 $F(a) \geq 0$ (或 $F(b) \geq 0$) 证明 $x > a$ (或 $x < b$) 时 $F(x) > 0$	(85)
题型二	证明含常数加项的不等式	(86)
题型三	证明含两个变量(常数)的函数(数值)不等式	(87)
1.3.14	一元函数微分学的几何应用	(88)
题型一	求平面曲线的切线方程和法线方程	(88)
题型二	求解与切线在坐标轴上的截距有关的问题	(89)
题型三	求解与两曲线相切的有关问题	(90)
1.3.15	导数在经济活动分析中的应用	(90)
题型一	计算弹性	(91)
题型二	计算边际函数	(92)
题型三	求解与边际和弹性有关的应用题	(92)
题型四	求解经济应用中一元函数的最值问题	(94)
习题 1.3		(95)
1.4	一元函数积分学	(99)
1.4.1	原函数与不定积分的关系	(99)
题型一	已知某函数,求其原函数	(99)
题型二	已知某函数的原函数,求有关函数的不定积分	(100)
1.4.2	计算不定积分	(101)
题型一	计算 $\int f(x)g(x)dx$	(101)
题型二	计算简单无理函数的不定积分	(101)
题型三	求 $\int \frac{1}{(ax+b)^k} f(x)dx$, 其中 $k \neq 1$ 为正实数	(104)
题型四	求 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$	(104)
题型五	求被积函数的分母为相差常数的两函数乘积的积分	(106)
题型六	求被积函数含反三角函数为因子函数的积分	(106)
1.4.3	利用定积分性质计算定积分	(107)
题型一	利用其几何意义计算定积分	(107)
题型二	计算对称区间上的定积分	(108)
题型三	计算周期函数的定积分	(108)
题型四	利用定积分的常用计算公式求其值	(109)
题型五	计算被积函数含函数导数的积分	(110)
题型六	比较和估计定积分的大小	(111)
题型七	求解含积分值为常数的函数方程	(111)
题型八	计算几类需要分子区间积分的定积分	(112)
题型九	计算含参数的定积分	(113)
题型十	求需换元计算的定积分	(114)
题型十一	求连续函数的定积分的极限	(115)
1.4.4	求解与变限积分有关的问题	(116)
题型一	求含变限积分的未定式极限	(116)
题型二	求变限积分的导数	(117)
题型三	求变限积分的定积分	(118)
题型四	讨论变限积分函数的性态	(119)
1.4.5	证明定积分等式	(120)

题型一	证明定积分的变换公式	(120)
题型二	证明定积分中值等式	(122)
1.4.6	定积分不等式的常用证法	(123)
1.4.7	计算反常积分	(126)
题型一	计算无穷区间上的反常积分	(126)
题型二	判别 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 与 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ 的敛散性 ($a > 0$)	(128)
题型三	计算无界函数的反常积分	(128)
题型四	判别 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ 与 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 的敛散性	(130)
1.4.8	定积分的应用	(130)
题型一	已知曲线方程,求其所围平面图形的面积	(130)
题型二	求旋转体体积	(131)
题型三	求解几何应用与最值问题相结合的应用题	(133)
题型四	已知曲线所围平面图形的面积(或其旋转体体积)反求该曲线	(134)
题型五	求函数在区间上的平均值	(135)
题型六	由变化率求原经济函数或其变动值	(135)
题型七	由边际函数求(最优)总函数	(136)
习题 1.4		(136)
1.5	多元函数微积分学	(140)
1.5.1	二(多)元函数微分学中的几个概念	(140)
题型一	判别二元函数的极限、连续、可偏导及可微之间的相互关系	(141)
题型二	用定义判别二元函数在某点是否可微	(142)
1.5.2	计算偏导数与全微分	(143)
题型一	计算显函数的偏导数	(143)
题型二	求带抽象函数记号的复合函数偏导数	(144)
题型三	计算由一个方程确定的隐函数的(偏)导数	(147)
题型四	求由方程组确定的隐函数的(偏)导数	(148)
题型五	变换含一阶、二阶偏导数的表达式	(149)
题型六	求二元函数的全微分	(149)
1.5.3	多元函数微分学的应用	(150)
题型一	求二元函数的极值和最大值	(150)
题型二	求二(多)元函数的条件极值	(151)
1.5.4	用直角坐标系计算二重积分	(153)
题型一	根据积分区域选择积分次序计算二重积分	(153)
题型二	根据被积函数选择积分次序计算二重积分	(154)
题型三	证明二次积分等于单积分	(155)
题型四	利用对称性简化计算二重积分	(155)
题型五	分块计算二重积分	(158)
题型六	计算无界区域上较简单的二重积分	(160)
1.5.5	用极坐标系计算二重积分	(161)
题型一	计算圆域 $x^2 + y^2 \leq a$ ($a > 0$) 上的二重积分	(162)
题型二	计算圆域 $x^2 + y^2 \leq 2ax$ ($a > 0$) 上的二重积分	(162)
题型三	计算圆域 $x^2 + y^2 \leq -2ax$ ($a > 0$) 上的二重积分	(162)

题型四	计算圆域 $x^2+y^2 \leq 2by (b>0)$ 上的二重积分	(163)
题型五	计算圆域 $x^2+y^2 \leq -2by (b>0)$ 上的二重积分	(164)
题型六	计算圆域 $x^2+y^2 \leq 2ax+2by+c$ 上的二重积分	(164)
1.5.6	交换二次积分次序与转换二次积分	(165)
题型一	交换二(累)次积分的积分次序	(165)
题型二	转换二次积分	(167)
1.5.7	求含二重积分的极限	(167)
习题 1.5		(168)
1.6	无穷级数	(171)
1.6.1	判别常数项级数的敛散性	(171)
题型一	判别正项级数的敛散性	(171)
题型二	判别交错级数的敛散性	(173)
题型三	判别任意项级数的敛散性	(175)
1.6.2	求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域	(180)
1.6.3	求级数的和	(182)
题型一	求 $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n$ 的和函数, 其中 $P(n)$ 为 n 的多项式	(183)
题型二	求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Q(n)} x^n$ 的和函数, 其中 $Q(n)$ 为 n 的多项式	(184)
题型三	求其系数分母为连乘积的幂级数的和函数	(185)
题型四	求数项级数的和	(187)
题型五	求一般项为定积分的数项级数的和	(189)
1.6.4	将简单函数间接展开成指定点的幂级数	(189)
题型一	求反三角函数的幂级数展开式	(189)
题型二	将对数函数展成幂级数	(190)
题型三	将有理分式函数展成幂级数	(190)
题型四	将三角函数展成幂级数	(191)
习题 1.6		(191)
1.7	常微分方程与差分方程	(194)
1.7.1	求解一阶线性微分方程	(194)
题型一	求解变量可分离的微分方程	(194)
题型二	求解齐次微分方程	(194)
题型三	求解一阶线性微分方程	(195)
题型四	求解以 x 为因变量, y 为自变量的一阶微分方程	(196)
题型五	求以分段函数为非齐次项或系数的一阶微分方程的连续解	(197)
题型六	求解其他形式给出的一阶微分方程	(198)
1.7.2	求解二阶常系数线性微分方程	(198)
题型一	求解二阶常系数齐次线性微分方程	(199)
题型二	求解二阶常系数非齐次线性微分方程	(199)
题型三	已知线性微分方程, 求具有某性质的特解	(202)
1.7.3	已知特解, 反求其二阶线性常系数方程	(202)
题型一	已知特解, 反求其二阶齐次方程	(202)
题型二	已知特解, 反求其二阶非齐次方程	(203)

1.7.4	微分方程的简单应用	(204)
题型一	求解与几何量有关的问题	(204)
题型二	求解未知函数所满足的方程	(204)
题型三	求解简单的经济应用题	(206)
1.7.5	一阶常系数线性差分方程	(207)
题型一	求解一阶常系数线性齐次差分方程	(207)
题型二	求解一阶非齐次差分方程	(208)
题型三	应用差分方程求解简单的经济应用题	(210)
习题 1.7		(211)

第2篇 线性代数

2.1	计算行列式	(213)
2.1.1	计算数字型行列式	(213)
题型一	计算非零元素(主要)在一条或两条线上的行列式	(213)
题型二	计算非零元素在三条线上的行列式	(215)
题型三	计算行(列)和相等的行列式	(216)
题型四	计算范德蒙行列式	(216)
题型五	求代数余子式之和的值	(217)
题型六	求行列式中含某因子的所有项	(218)
2.1.2	计算抽象矩阵的行列式	(218)
题型一	计算由行(列)向量表示的矩阵的行列式的值	(219)
题型二	计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式	(220)
题型三	计算含零子块的四分块矩阵的行列式	(220)
题型四	证明方阵的行列式等于零	(221)
2.1.3	克莱姆法则的应用	(222)
习题 2.1		(224)
2.2	矩阵	(226)
2.2.1	证明矩阵的可逆性	(226)
题型一	证明矩阵可逆	(226)
题型二	证明和(差)矩阵可逆	(227)
题型三	证明方阵为不可逆矩阵	(228)
2.2.2	矩阵元素给定,求其逆矩阵的方法	(228)
2.2.3	求解与伴随矩阵有关的问题	(230)
题型一	计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式	(230)
题型二	求与伴随矩阵有关的矩阵的逆矩阵	(231)
题型三	求与伴随矩阵有关的矩阵的秩	(232)
题型四	求伴随矩阵	(233)
题型五	证明伴随矩阵的性质	(233)
2.2.4	计算方阵高次幂的方法	(234)
2.2.5	求矩阵的秩	(237)
题型一	求元素具体给定的矩阵的秩	(237)
题型二	求抽象矩阵的秩	(238)
题型三	已知矩阵的秩,求其待定常数	(240)

2.2.6	分块矩阵乘法运算的应用	(240)
2.2.7	初等变换与初等矩阵关系的应用	(242)
题型一	用初等矩阵表示初等变换	(242)
题型二	利用初等矩阵的性质计算矩阵	(243)
题型三	利用矩阵的初等变换性质解题	(244)
2.2.8	求解矩阵方程	(244)
题型一	求解含单位矩阵 E 加项的矩阵方程	(244)
题型二	求解只含一个未知矩阵的矩阵方程	(245)
题型三	求解含多个未知矩阵的矩阵方程	(246)
题型四	求与已知矩阵可交换的所有矩阵	(248)
题型五	已知一矩阵方程,求方程中某矩阵的行列式	(248)
2.2.9	求解与矩阵等价的有关问题	(249)
题型一	判别两矩阵等价	(249)
题型二	利用矩阵等价的性质求解有关问题	(250)
习题 2.2		(251)
2.3	向 量	(255)
2.3.1	判别向量组线性相关、线性无关	(255)
题型一	用线性相关性定义做选择题、填空题	(255)
题型二	判别分量已知的向量组的线性相关性	(256)
题型三	证明几类向量组的线性相关性	(257)
题型四	已知向量组的线性相关性,求其待定常数	(262)
2.3.2	判定向量能否由向量组线性表示	(263)
题型一	判定分量已知的向量能否由向量组线性表示	(263)
题型二	判断一抽象向量能否由向量组线性表示	(264)
题型三	判别一向量组可否由另一向量组线性表示	(265)
2.3.3	两向量组等价的常用证法	(266)
2.3.4	向量组的秩与极大线性无关组的求(证)法	(269)
题型一	求分量给出的向量组的秩及其极大无关组	(269)
题型二	将向量用极大线性无关组线性表示	(270)
题型三	求解(证明)与向量组的秩有关的问题	(271)
题型四	证一向量组为一极大无关组	(272)
2.3.5	将线性无关向量组正交规范化	(273)
习题 2.3		(274)
2.4	线性方程组	(277)
2.4.1	判定线性方程组解的情况	(277)
题型一	判定齐次线性方程组解的情况	(277)
题型二	判定非齐次线性方程组解的情况	(279)
2.4.2	由其解反求方程组或其参数	(281)
题型一	已知 $AX=0$ 的解的情况,反求 A 中参数	(281)
题型二	已知 $AX=b$ 的解的情况,反求方程组中参数	(281)
题型三	已知其基础解系,求该方程组的系数矩阵	(282)
2.4.3	证明一组向量为基础解系	(283)
2.4.4	基础解系和特解的简便求法	(285)

2.4.5	求解含参数的线性方程组	(286)
题型一	求解方程个数与未知数个数相等的含参数的线性方程组	(286)
题型二	求解方程个数与未知数个数不等的含参数的线性方程组	(288)
题型三	求解参数仅出现在常数项的线性方程组	(288)
题型四	求解通解满足一定条件的含参数的方程组	(289)
2.4.6	求抽象线性方程组的通解	(289)
题型一	A 没有具体给出,求 $AX=0$ 的通解	(290)
题型二	已知 $AX=b$ 的特解,求其通解	(290)
题型三	利用线性方程组的向量形式求(证明)其解	(292)
2.4.7	求两线性方程组的非零公共解	(292)
题型一	求两齐次线性方程组的非零公共解	(292)
题型二	证明两齐次线性方程组有非零公共解	(294)
题型三	讨论两方程组同解的有关问题	(294)
习题 2.4		(295)
2.5	矩阵的特征值、特征向量	(300)
2.5.1	求矩阵的特征值、特征向量	(300)
题型一	求元素已给出的矩阵的特征值、特征向量	(300)
题型二	求(证明)抽象矩阵的特征值、特征向量	(302)
2.5.2	由特征值和(或)特征向量反求其矩阵	(303)
题型一	由特征值和(或)特征向量反求其矩阵的待定常数	(303)
题型二	已知特征值、特征向量,反求其矩阵	(305)
2.5.3	已知一矩阵的特征值、特征向量,求相关联矩阵的特征值、特征向量	(306)
2.5.4	判别方阵是否可对角化	(308)
题型一	判别元素给定的矩阵是否可对角化	(308)
题型二	判别抽象矩阵是否可对角化	(309)
2.5.5	相似矩阵的判别及其性质的简单应用	(310)
题型一	判定两方阵是否相似	(310)
题型二	相似矩阵性质的简单应用	(311)
2.5.6	与两矩阵相似有关的计算	(312)
题型一	n 阶矩阵 A 可相似对角化,求 A 中待定常数及可逆矩阵 P ,使 $P^{-1}AP=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (λ_i 为 A 的特征值)	(312)
题型二	求 n 阶实对称矩阵 A 中待定常数及正交矩阵 Q ,使 $Q^{-1}AQ=Q^T AQ=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (λ_i 为 A 的特征值)	(314)
题型三	已知矩阵 A 和可逆阵 P ,使 $P^{-1}AP=B$,求方阵 B	(315)
题型四	计算相似矩阵的高次幂	(316)
习题 2.5		(316)
2.6	二次型	(319)
2.6.1	求二次型的矩阵及其秩	(319)
题型一	用矩阵形式表示二次型	(319)
题型二	求二次型的秩	(320)
2.6.2	化标准形及由标准形确定二次型	(321)
题型一	化二次型为标准形、规范形	(321)
题型二	由二次型的标准形确定该二次型	(324)

2.6.3	判别(证明)实二次型(实对称矩阵)的正定性	(324)
题型一	判别具体给定的二次型或其矩阵的正定性	(325)
题型二	判别或证明抽象的二次型(实对称矩阵)的正定性	(325)
题型三	确定参数值使二次型或其矩阵正定	(328)
2.6.4	判别两矩阵是否合同	(329)
题型一	判别(证明)两实对称矩阵合同	(329)
题型二	判别(证明)两矩阵不合同	(330)
2.6.5	讨论矩阵等价、相似及合同的关系	(330)
习题 2.6		(331)

第3篇 概率论与数理统计

3.1	随机事件和概率	(334)
3.1.1	随机事件间的关系及其运算	(334)
题型一	描绘随机试验的样本空间	(334)
题型二	用式子表示事件关系	(334)
题型三	利用事件运算的性质或图示法简化事件算式	(335)
题型四	求满足一定条件的事件关系	(335)
3.1.2	直接计算随机事件的概率	(336)
题型一	计算古典型概率	(336)
题型二	计算几何型概率	(338)
题型三	计算伯努利概型中事件的概率	(339)
3.1.3	间接计算随机事件的概率	(340)
题型一	计算和、差、积事件的概率	(340)
题型二	求与包含关系有关的事件的概率	(342)
题型三	计算与互斥事件有关的事件的概率	(343)
题型四	求与条件概率有关的事件的概率	(343)
题型五	求与他事件有关的单个事件的概率	(344)
题型六	判别或证明事件概率不等式	(344)
3.1.4	几个计算概率公式的实际应用	(345)
题型一	用加法公式求解实际应用题	(345)
题型二	用条件概率与概率的乘法公式求解实际应用题	(345)
题型三	用全概率公式和逆概率(贝叶斯)公式求解实际应用题	(346)
题型四	利用抽签原理计算事件概率	(349)
3.1.5	判别事件的独立性	(349)
题型一	判别(证明)两事件相互独立	(349)
题型二	判别(证明) $n(n>2)$ 个事件相互独立	(351)
习题 3.1		(352)
3.2	一维随机变量及其分布	(356)
3.2.1	分布列、概率密度及分布函数性质的应用	(356)
题型一	判别分布列、概率密度及分布函数	(357)
题型二	利用分布的性质,确定待定常数或所满足的条件	(358)
题型三	求随机变量落在某点或某区间上的概率	(359)
3.2.2	求分布列(概率分布)、概率密度及分布函数	(360)

题型一	求概率分布(分布律)及分布函数	(360)
题型二	求连续型随机变量的分布函数或其值	(362)
题型三	求概率密度	(363)
3.2.3	利用常用分布计算事件的概率	(363)
题型一	利用二项分布计算伯努利型中事件的概率	(363)
题型二	利用超几何分布计算事件的概率	(366)
题型三	利用几何分布计算事件的概率	(366)
题型四	利用泊松分布计算事件的概率	(367)
题型五	利用均匀分布计算事件的概率	(367)
题型六	利用指数分布计算事件的概率	(368)
题型七	利用正态分布计算事件的概率	(369)
3.2.4	求随机变量函数的分布	(372)
题型一	求离散型随机变量函数的概率分布	(372)
题型二	求连续型随机变量函数的分布	(373)
题型三	讨论随机变量函数分布的性质	(376)
习题 3.2		(377)
3.3	二维随机变量的联合概率分布	(381)
3.3.1	求二维随机变量的分布	(381)
题型一	求二维离散型随机变量的联合分布律	(381)
题型二	求二维随机变量的边缘分布	(384)
题型三	由联合分布、边缘分布求条件分布	(385)
题型四	由条件分布反求联合分布、边缘分布	(388)
题型五	已知分区域定义的联合密度,求其分布函数	(389)
3.3.2	随机变量的独立性	(390)
题型一	判别两随机变量的独立性	(390)
题型二	利用独立性确定联合分布中的待定常数	(395)
3.3.3	计算二维随机变量取值的概率	(396)
题型一	计算两离散型随机变量运算后取值的概率	(396)
题型二	求二维连续型随机变量落入平面区域内的概率	(397)
题型三	求与 $\max(X, Y)$ 或 $(\text{和}) \min(X, Y)$ 有关的概率	(398)
题型四	求系数为随机变量的二次方程有根、无根的概率	(399)
题型五	已知系数为随机变量的二次方程有根、无根的概率, 反求该随机变量的分布	(399)
3.3.4	求二维随机变量函数的分布	(399)
题型一	已知 (X, Y) 的联合分布律,求 $Z=g(X, Y)$ 的分布律	(399)
题型二	求两连续型随机变量的简单函数的分布	(401)
题型三	已知 X, Y 的分布,求 $\max(X, Y)$ 与 $\min(X, Y)$ 的分布	(404)
习题 3.3		(405)
3.4	随机变量的数字特征	(409)
3.4.1	求一维随机变量的数字特征	(409)
题型一	求随机变量的数学期望与方差	(409)
题型二	求随机变量函数的数学期望	(413)
题型三	计算随机变量的矩	(415)

3.4.2	求二维随机变量的数字特征	(415)
题型一	求 (X,Y) 的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望和方差	(415)
题型二	计算协方差和相关系数	(419)
3.4.3	计算两类分布的数字特征	(423)
题型一	计算二维正态分布的数字特征	(423)
题型二	计算 $Z=\max(X,Y)$ 或(和) $W=\min(X,Y)$ 的数字特征	(424)
3.4.4	讨论随机变量相关性与独立性的关系	(426)
题型一	确定两随机变量相关与不相关	(426)
题型二	讨论相关性与独立性的关系	(427)
3.4.5	已知数字特征,求分布中的待定常数	(428)
3.4.6	求解两类综合应用题型	(429)
题型一	求解与数字特征有关的实际应用题	(429)
题型二	求解概率论与其他数学分支的综合应用题	(431)
习题 3.4		(434)
3.5	大数定律和中心极限定理	(438)
3.5.1	用切比雪夫不等式估计事件的概率	(438)
3.5.2	大数定律成立的条件和结论	(439)
题型一	利用三个大数定律成立的条件解题	(442)
题型二	求随机变量序列依概率的收敛值	(443)
3.5.3	两个中心极限定理的简单应用	(444)
题型一	利用棣莫弗-拉普拉斯定理近似计算事件的概率	(444)
题型二	已知随机变量取值的概率,估计取值范围	(445)
题型三	应用列维-林德伯格中心极限定理之条件和结论解题	(446)
题型四	近似计算 n 个随机变量之和取值的概率	(447)
题型五	已知 n 个随机变量之和取值的概率,求个数 n	(447)
习题 3.5		(448)
3.6	数理统计初步	(451)
3.6.1	求统计量的分布	(451)
题型一	求统计量的分布及其分布参数	(452)
题型二	求统计量取值的概率	(455)
题型三	求统计量的数字特征	(455)
3.6.2	参数估计	(457)
题型一	求总体分布中未知参数的矩估计量(值)	(457)
题型二	求未知参数的极(最)大似然估计量(值)	(458)
题型三	判断估计量的无偏性、有效性和一致性(相合性)	(460)
题型四	求正态总体参数的置信区间及其有关参数	(463)
3.6.3	假设检验	(469)
题型一	计算简单情形下的两类错误概率	(470)
题型二	对单个正态总体参数进行假设检验	(471)
题型三	对两个正态总体参数进行假设检验	(473)
题型四	用检验方法及其结论做填空题与选择题	(474)
习题 3.6		(475)
习题答案与提示		(480)

第1篇 微 积 分

1.1 函 数

1.1.1 求几类函数的表达式

题型一 已知函数,求其反函数的表达式

反函数的方法是在原函数 $y=f(x)$ 中解出 x , 再交换 x 与 y 的位置即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$, 同时得到 f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.

如 $y=f(x)$ 为分段函数, 且在各分段区间上都是单调函数, 则分别求出各分段区间上的反函数就得到该分段函数的反函数, 且 $f(x)$ 的每段的值域就是其反函数的定义域.

例 1[1996 年 2]* 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1-2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x-16, & x > 2. \end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的反函数的表达式.

解 (1) 当 $x < -1$ 时, $y=1-2x^2 < -1$, 在 $y=1-2x^2$ 中解出 x 得到 $x=-\sqrt{(1-y)/2}$, 交换 x 与 y 的位置得到反函数 $y=-\sqrt{(1-x)/2}, x < -1$.

(2) 当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $-1 \leq y=x^3 \leq 8$, 在 $y=x^3$ 中解出 x 得到 $x=\sqrt[3]{y}$, 交换 x 与 y 的位置得到反函数 $y=\sqrt[3]{x}, -1 \leq x \leq 8$.

(3) 当 $x > 2$ 时, $y=12x-16 > 8$, 在 $y=12x-16$ 中解出 x 得到 $x=(y+16)/12$, 交换 x 与 y 的位置得反函数为 $y=(x+16)/12, x > 8$.

综上所述得到 $f(x)$ 的反函数的表达式为 $y(x)=\begin{cases} -\sqrt{(1-x)/2}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ (x+16)/12, & x > 8. \end{cases}$

题型二 求分段函数的复合函数

常用分段代入法求之. 为方便计, 设

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x \leq \varphi_1(x), \\ f_2(x), & x > \varphi_2(x); \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} g_1(x), & x \leq \psi_1(x), \\ g_2(x), & x > \psi_2(x). \end{cases}$$

为求 $f[g(x)]$, 先将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 表达式中的所有 x , 得到

$$f[g(x)]=\begin{cases} f_1[g(x)], & g(x) \leq \varphi_1[g(x)], \\ f_2[g(x)], & g(x) > \varphi_2[g(x)]. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

②

* 例 1[1996 年 2] 表示例 1 是 1996 年数学二的考题. 在数学三的往年试题中没有出现过求反函数的题型. 因为它比较重要, 在此特将数学二的试题选做例题. 下同.