最优控制理论与应用中的若干问题

朱尚伟 著

科学出版社
www.sciencep.com

最优控制理论与应用中的若干问题

朱尚伟 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书由三部分构成：第一部分介绍最优控制理论研究中所涉及的多个数学分支学科的内容，并向读者推荐了一些参考文献；第二部分研究带有时间滞后的变分不等式控制系统的最优控制问题；第三部分研究带有逐点状态约束的时间最优控制问题. 后两部分主要是作者近几年的研究成果.

本书的读者对象是最优控制专业的硕士、博士研究生和科研工作者，对于准备从事最优控制理论与应用研究的大学本科生也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

最优控制理论与应用中的若干问题/朱尚伟著. —北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-019073-4

I. 最… II. 朱… III. 最佳控制-数学理论 IV. O232

中国版本图书馆CIP数据核字(2007) 第083523号

责任编辑：赵彦超／责任校对：刘小梅
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年7月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007年7月第一次印刷 印张：11 1/4
印数：1—3 000 字数：209 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

谨以此书纪念恩师李训经先生

前　言

最优控制理论是从 20 世纪 50 年代末 60 年代初发展起来的现代控制论的一个重要分支，它最初的研究对象是由导弹、航天、航海中的制导、导航等自动控制技术、自动控制理论、数字计算技术等领域中所总结出来的一类按某个性能指标达到最大或最小的控制问题. 其核心问题是如何为受控系统选择一个控制策略，使得系统本身获得优良的技术性能和满意的经济效益. 在数学家 Lefschetz 的影响下，Bushaw 于 1953 年讨论了最优开关控制，给出了二阶定常线性系统的时间最优控制问题的完整解答. 钱学森在 1954 年出版的专著《工程控制论》[73] 中介绍了 Bushaw 的工作，指出变分学是设计最优控制器的数学方法，并分析了一些应用实例. 但是，Bushaw 所讨论的问题不能用古典变分学方法进行讨论.

最优控制系统的设计问题提出后，吸引了一大批数学家研究其数学理论. 20 世纪 50 年代，前苏联数学家 Pontryagin 组织了由数学家和自动控制理论专家组成的讨论班，系统地讨论控制过程的数学理论. 1956 年，Pontryagin 把最优控制过程问题正确地叙述为具有约束的非古典变分学问题，同时以猜想的形式提出了解决该问题的数学方法 —— 最大值原理，并用它讨论了 Bushaw 所研究的问题，证明了最优开关原理，显示了最大值原理在解决最优控制过程问题中的效用. 1958 年，他们首先公布了线性系统时间最优控制的最大值原理的证明. 1960 年，Pontryagin 等人完成了一般形式的最大值原理的严格证明. 由于他们所提出的数学模型确切地反映了自动控制技术的发展，并且突破了古典变分学的框架，能够具体解决一般的时间最优控制问题，将 Bushaw 的结果推广到了一般情形，所以 Pontryagin 最大值原理得到了学术界的重视. 与此同时，在美国 RAND 公司工作的 Bellman 等数学家也讨论了控制过程的数学问题，发展了动态规划方法，并且也推广了 Bushaw 的结果. Lasalle 则用向量值测度理论证明了一般形式的开关原理. Kalman 深入研究了线性系统在二次性能指标下的最优控制问题，把它归结为 Riccati 方程的求解问题，建立了最优线性反馈调节器的设计理论.

1960 年，国际自动控制联合会第一届世界大会在莫斯科举行. Bellman, Kalman, Pontryagin 等人在大会上报告了他们各自的工作，引起了学术界的极大重视. Pontryagin 的最大值原理、Bellman 的动态规划方法和 Kalman 的最优线性调节器的理论被公认为现代最优控制理论的三大里程碑，这些奠基性的成果标志着最优控制理论的正式诞生.

上述三大基本理论是就有限维控制系统给出的. 由于在材料力学、流体力学、

热力学、反应扩散过程等许多领域中的现象或规律是用偏微分方程、积分方程、泛函微分方程、抽象发展方程等形式描述的, 涉及这些领域的控制问题自然将相应的研究引向无穷维系统. 状态空间为无穷维的控制系统也被称为*分布参数系统*. 分布参数系统最优控制理论的研究始于 20 世纪 60 年代初, 其主要目的是针对状态空间为无穷维的控制系统建立与上述三大基本理论相对应的理论. 前苏联学者布特可夫斯基在研究炉温控制时首次将热传导方程的某种最优控制问题转化为 Pontryagin 讨论过的问题, 开创了分布参数系统最优控制理论的研究. Lions, Fattorini 和王耿介等一批著名学者对分布参数系统最优控制理论的早期研究作出了重要贡献.

最优控制理论是经典变分学在现代的新发展, 其研究基础涉及函数论、拓扑学、泛函分析、微分方程、变分学等多个数学分支的知识. 本书第一部分较为系统地介绍最优控制理论研究中所涉及的多个数学分支的相关内容, 这是本书后续部分的理论基础. 这一部分的内容是介绍性的, 其中提到的基本概念或术语大都没有写成定义的形式; 定理或推论等也只是列出结论而未予证明. 需要深入了解这些内容的读者可查阅书中推荐的参考文献. 第二部分研究带有时间滞后的变分不等式控制系统的最优控制问题, 内容包括时滞变分不等式的适定性理论、时滞变分不等式系统最优控制的存在性和最大值原理. 第三部分研究带有逐点状态约束的时间最优控制问题, 就一个有逐点约束的四阶线性系统证明了其时间最优控制问题的可解性, 并最终给出了其最优控制的显式表达. 后两部分内容是作者近几年的研究成果.

除微积分、线性代数等高等数学基础知识外, 本书理论推导中用到的准备知识基本上都包含在第一部分中. 具有大学数学、应用数学、控制类等专业二年级知识水平的读者阅读本书不会有实质性困难. 同时, 对于最优控制专业方向的硕士、博士研究生以及准备步入该研究领域的科研工作者, 本书也有一定的参考作用.

本书是在作者的博士学位论文的基础上撰写的. 作者于 2000 年师从复旦大学李训经先生学习最优控制理论. 李训经先生是我国分布参数系统最优控制和随机最优控制领域的先驱者之一, 他在这两个领域中曾做过许多重要的工作, 在控制理论及相关领域中做出了不可磨灭的贡献. 作者能在短短的几年中熟悉最优控制理论并逐步深入地开展理论研究, 与先生的悉心指导、热情帮助与亲切鼓励是分不开的. 李先生正直的为人品格、深厚的学术造诣与严谨的治学风范使作者在做人、治学、工作等各个方面都获益匪浅. 作者深切缅怀已故导师李训经先生, 谨以此书纪念恩师.

作者衷心感谢复旦大学雍炯敏教授与汤善健教授, 作者的研究工作从选题、研究框架到理论推导都得到了两位老师的悉心指导与热情帮助. 两位老师的为人品格和治学精神将会给作者今后的工作、学习和科学研究以深刻的影响与极大的帮助.

几年来, 作者曾得到过许多老师和同学的帮助与指教. 复旦大学的楼红卫教授、潘立平教授、周渊副教授、吴汉忠博士、许亚善博士以及南开大学伍镜波教授、上

海财经大学陈启宏教授、武汉大学汪更生教授、四川大学张旭教授、浙江大学刘康生教授、东北师范大学高夯教授等都曾对作者的研究工作给予指导与帮助, 并提出了许多宝贵的建设性意见与建议, 使作者受益良多, 作者在此表示衷心的感谢. 山西大学燕居让教授、李胜佳教授、山西大学师范学院王永明教授、程盛兰教授等人对作者的研究工作和本书的出版给予很多关心与帮助, 作者在此向他们表示诚挚的谢意. 感谢科学出版社编辑对本书出版的鼎力支持和热心帮助.

最后, 作者特别感谢我的妻子李景华教授. 她的热情鼓励、鼎力支持和默默奉献伴随作者走过了多年的求学、治学和科研的坎坷之路, 没有她的支持和鼓励, 作者很难在学术上有所建树, 更谈不到本书的问世.

由于作者的水平所限, 本书可能有很多不妥或谬误之处, 作者殷切希望读者不吝赐教.

朱尚伟
2007 年 3 月于太原

目　　录

第一部分　最优控制理论的数学基础

第二部分 最高阶偏导数具有时滞的变分不等式的最优控制

第三部分 一个约束最优控制问题的显式解

第一部分

最优控制理论的数学基础

第 1 章 拓扑学基础

近几十年来, 点集拓扑学已经成为各个数学分支的公共基础, 而且点集拓扑学中的许多术语、结论和方法已经渗透到其他学科之中, 有些基本术语或基本符号已经以默认其含义的形式在各类文献中通用. 本章简略介绍点集拓扑学中的一些基本概念和结论, 作为全书后续部分的基础, 其中给出的许多记号将在本书后续部分中一直沿用. 作为一个独立的数学分支, 点集拓扑学的内容非常丰富, 本章只对本书后续部分中可能涉及的有关内容作了简略的介绍, 需要深入了解相关内容的读者可参阅各节末尾推荐的参考文献.

§1.1 集合论基本记号

假定读者熟悉集合论中有关集合的交、并、差以及空集、子集、包含等基本概念和运算性质, 我们给出本书常用的一些基本记号. 本书分别用记号 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 表示全体整数、全体非负整数、全体正整数、全体有理数、全体实数与全体复数所构成的集合, 恒以 $\varnothing$ 表示空集.

对于非空集合 S, 本书中分别以 $E\bigcap F$, $E\bigcup F$, $E\setminus F$ 和 $E^c=S\setminus E$ 等表示 S 的子集 E 与 F 的交集、并集、差集和 E 在"全集"或"全空间" S 中的余集. 以 S 的所有子集为元素的集合称为 S 的**幂集**, 以 2^S 表示. 我们也常将集合称为"点集", 非空集合中的元素称为"点"; 以非空集合的某些子集为元素的集合常称为"集族". 具有某种代数结构或拓扑结构的非空点集称为空间.

设 m 为大于 1 的整数, $X_j(j=1,\cdots,m)$ 为非空点集, 引用记号

$$\prod_{j=1}^{m} X_j = X_1\times\cdots\times X_m = \{\,(x_1,\ \cdots,\ x_m)\mid x_j\in X_j,\ \ j=1,\cdots,\ m\,\},$$

称为 $X_j\ \ (j=1,\ \cdots,\ m)$ 的 **Cartesian 乘积**. 每个 X_j 称为**因子集**.

当 $X_j=X\ \ (j=1,\ \cdots,\ m)$ 时, 记为 $\prod\limits_{j=1}^{m} X_j = X^m$.

对于 $\prod\limits_{j=1}^{m} X_j$ 中的非空子集 M, 点集

$$M_j=\{\,x\in X_j\mid \text{存在 } (x_1,\ \cdots,\ x_m)\in M,\ \text{使得 } x_j=x\,\}$$

称为 M 在 X_j 中的**投影**.

§1.2 映 射

§1.2.1 映射的基本概念

假定 X, D 与 Y 均为非空集合, 且 $D\subset X$, T 为某种"对应法则". 如果对于 D 中任意一点 x, 通过对应法则 T 可以确定 Y 中**唯一的一点** $y=T(x)$ 与 x 对应, 则称该法则 T 是 $D\longrightarrow Y$ 的一个映射. Y 中与 x 对应的点 $y=T(x)$ 称为点 x 在映射 T 下的象, 称 x 为点 $T(x)$ 的原象或逆象. 分别称 D 与 $R(T)=\{\,T(x)\,\big|\,x\in D\}$ 为映射 T 的定义域与值域, 称 Y 为映射 T 的值域空间. 称 $X\times Y$ 中集合

$$G(T)=\{\,(x,y)\in X\times Y\,\big|\,x\in D,\ \ y=T(x)\,\}$$

为映射 T 的图象.

对于非空点集 $D\subset X$, 由 $I_{D,X}(x)=x\ (\forall x\in D)$ 定义的映射 $I_{D,X}$ 称为 $D\longrightarrow X$ 的嵌入映射或恒等嵌入; $I_X=I_{X,X}$ 称为 X 上的恒等映射或单位映射. 在特定的上下文中, 常常将 $I_{D,X}$ 或 I_X 简写为 I.

对于 $D\longrightarrow Y$ 的映射 T, 如果对于任意的 x_1, $x_2\in D$, 当 $x_1\neq x_2$ 时, 恒有 $T(x_1)\neq T(x_2)$, 则称 T 为单射或可逆映射; 如果 $R(T)=Y$, 则称 T 为满射或到上映射; 如果 T 既为单射又为满射, 则称 T 为双射或 $D\longrightarrow Y$ 的一一对应.

在本书中, 我们引入记号

$$[X\,;\,Y]=\{\,T\,\Big|\,T\text{ 为 }X\longrightarrow Y\text{ 的映射}\,\}.$$

对于 $D\subset X$ 及 $T\in[D\,;\,Y]$, 当我们只强调"全集"或"全空间" X 以及 **D 是 X 的某非空子集**而不强调 D 本身时, 常常以 $D(T)$ 表示 D 而不明确指出 D 本身, 称 T 是 $X\supset D(T)\longrightarrow Y$ 的映射.

设非空点集 D_1, D_2, X 与 Y 满足 $D_1\subset D_2\subset X, T_1\in[D_1\,;\,Y]$, $T_2\in[D_2\,;\,Y]$, 且对于任意的 $x\in D_1$, 都有 $T_2(x)=T_1(x)$, 则称 T_2 为 T_1 在 D_2 上的延拓或扩张, 称 T_1 为 T_2 在 D_1 上的限制, 记为 $T_1=T_2\Big|_{D_1}$ 或 $T_1\subset T_2$.

对于 $X\supset D(T)\longrightarrow Y$ 的**单射** T, 定义

$$D(T^{-1})=R(T);\quad T^{-1}(y)=x,\quad \forall y=T(x)\in R(T),\text{这里 }x\in D(T)\,.$$

称 $Y\supset R(T)\longrightarrow X$ 的映射 T^{-1} 为 T 的逆映射.

显然, 若 T 为可逆映射, 则 T^{-1} 也是可逆映射, 且 $(T^{-1})^{-1}=T$.

当非空点集 D 与 Y 为某种空间时, 点映射 $T\in[D(T)\,;\,Y]$ 也常常称为算子或变换. 若 $\mathbf{K}$ 为数域, $f\in[D\,;\,\mathbf{K}]$, 则称 f 为 D 上的函数或泛函. 值域空间为实数域 $\mathbf{R}$ 和复数域 $\mathbf{C}$ 的映射分别称为实函数(或实泛函)和复函数(或复泛函).

§1.2.2 象集映射与逆象映射

对于 $X \supset D(T) \longrightarrow Y$ 的映射 T, 由

$$E \mapsto T(E) = \{\, y \in Y \mid y = T(x) \text{ 对某个 } x \in E \bigcap D(T) \text{ 成立} \,\}, \quad \forall E \subset X$$

与

$$G \mapsto T^{-1}(G) = \{\, x \in D(T) \mid T(x) \in G \,\}, \quad \forall G \subset Y$$

可以分别定义 $2^X \longrightarrow 2^Y$ 与 $2^Y \longrightarrow 2^X$ 的两个集值映射, 分别称为 T 诱导的象集映射与原象映射或逆象映射, 并分别以 T 与 T^{-1} 表示它们. 相对于集值映射 $T \in [2^X\,;\,2^Y]$ 和 $T^{-1} \in [2^Y\,;\,2^X]$, 我们将 $T \in [D(T)\,;\,Y]$ 和 $T^{-1} \in [R(T)\,;\,X]$ (当 T 可逆时) 称之为点映射.

记号 T 或 T^{-1} 具有 $T \in [D(T)\,;\,Y]$ 与 $T \in [2^X\,;\,2^Y]$ 或 $T^{-1} \in [R(T)\,;\,X]$ 与 $T^{-1} \in [2^Y\,;\,2^X]$ 的双重含义, 我们用“点映射”与“集值映射”明确区分它们是在哪种含义下被使用的. 后面的大部分场合中, 记号 T 或 T^{-1} 是“点映射意义下的映射”还是“集值映射意义下的映射”往往可由特定的上下文明确, 所以除非特别需要, 我们一般不再指出它们是“点映射”还是“集值映射”.

需要注意的是, 点映射 $T^{-1} \in [R(T)\,;\,X]$ 仅当 T 为可逆映射时才有定义, 而集值映射 $T^{-1} \in [2^Y\,;\,2^X]$ 对于任意的映射 T 都有定义.

对于 $X \supset D(T) \longrightarrow Y$ 的映射 T, 逆象映射 T^{-1} 具有下述性质:

(i) $T^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $T^{-1}(Y) = T^{-1}(R(T)) = D(T)$; 若 $B_1 \subset B_2 \subset Y$, 则 $T^{-1}(B_1) \subset T^{-1}(B_2)$;

(ii) $T^{-1}\Big(\bigcup\limits_\lambda E_\lambda\Big) = \bigcup\limits_\lambda T^{-1}(E_\lambda)$, $\quad T^{-1}\Big(\bigcap\limits_\lambda E_\lambda\Big) = \bigcap\limits_\lambda T^{-1}(E_\lambda)$, $\forall \{E_\lambda\} \subset 2^Y$;

(iii) $T^{-1}(A \setminus B) = T^{-1}(A) \setminus T^{-1}(B)$, $\forall A,\ B \in 2^Y$;

(iv) $A \bigcap D(T) \subset T^{-1}(T(A))$, $\forall A \in 2^X$; $T(T^{-1}(B)) = B \bigcap R(T)$, $\forall B \in 2^Y$;

(v) 如果 T 为单射, 则逆象映射 T^{-1} 恰好等于点映射 T^{-1} 所诱导的象映射.

§1.2.3 映射的乘积

设 T 是 $X \supset D(T) \longrightarrow Y$ 的映射, S 是 $Y \supset D(S) \longrightarrow Z$ 的映射, 若 $R(T) \bigcap D(S) \neq \varnothing$, 则称映射 T 与 S 可乘; 当 T 与 S 可乘时, 由

$$D(ST) = T^{-1}(R(T) \textstyle\bigcap D(S)), \quad (ST)(x) = S(T(x)), \quad \forall x \in D(ST)$$

定义的 $X \supset D(ST) \longrightarrow Z$ 的**点映射** ST 称为映射 T 与 S 的乘积. 一般说来, 当映射 T 与 S 可乘时, S 与 T 未必可乘; 若 S 与 T 也可乘, 且 $ST = TS$, 则称 S 与 T 可换.

命题 1.2.1　映射的乘积具有下述性质：

(i) 有限个可乘映射[1] 的乘积满足结合律, 一般不满足交换律;

(ii) 若 $T = T_1 \cdots T_k$, 则 T 可逆的充分必要条件是 $T_1, \cdots, T_k$ 都可逆; 当 T 可逆时, $T^{-1} = T_k^{-1} \cdots T_1^{-1}$.

(iii) $X \supset D(T) \longrightarrow Y$ 的映射 T 可逆的充分必要条件是存在 $Y \supset D(S) \longrightarrow X$ 的映射 S, 使得 $ST = I_{D(T)}, TS = I_{R(T)}$, 且此时 S 也可逆, 并有 $S = T^{-1}, T = S^{-1}$.

§1.3　点集的势

点集 X 中所含元素的 "个数" 称为 X 的*基数*或*势*[2], 记为 $\overline{\overline{X}}$.

对于非空点集 X 与 Y, 如果存在双射 $T \in [X\ ;\ Y]$, 则称 X 与 Y *对等*或*具有相等的势*, 记为 $X \sim Y$ 或 $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$; 否则称 X 与 Y 不对等, 记为 $\overline{\overline{X}} \neq \overline{\overline{Y}}$. 当 X 的某个子集与 Y 对等时, 记为 $\overline{\overline{X}} \geqslant \overline{\overline{Y}}$ 或 $\overline{\overline{Y}} \leqslant \overline{\overline{X}}$; 当 $\overline{\overline{X}} \geqslant \overline{\overline{Y}}$ 且 $\overline{\overline{X}} \neq \overline{\overline{Y}}$ 时, 称 X 的*势大于* Y *的势*, 记为 $\overline{\overline{X}} > \overline{\overline{Y}}$ 或 $\overline{\overline{Y}} < \overline{\overline{X}}$. 对于任意非空点集 X, 规定 $\overline{\overline{X}} > 0$.

不能与它的任何真子集对等的点集称为*有限集*; 与它的某个真子集对等的点集称为*无限集*或*无穷集*; 与正整数集合 $\mathbf{N}$ 对等的点集称为*可数集*或*可列集*. 与正整数集合 $\mathbf{N}$ 的某子集对等的点集称为*至多可列集*.

空集 $\varnothing$ 的势规定为 0. 对于 $n \in \mathbf{N}$ 及 $X = \{\, x_1, \cdots, x_n \,\}$, 规定 $\overline{\overline{X}} = n$. 正整数集合 $\mathbf{N}$ 的势称为*可列势*, 记为 $\aleph_0$, 即 $\overline{\overline{\mathbf{N}}} = \aleph_0$. 当 $\overline{\overline{X}} > \aleph_0$ 时, 称 X 为*不可列集*. 实数集是不可列集, 其势称为*连续势*, 记为 $\aleph_1$, 即 $\overline{\overline{\mathbf{R}}} = \aleph_1$.

我们将有关势的一些基本结论陈述于下：

(i) Bernstein 定理：对于任意点集 X 与 Y, 如果 $\overline{\overline{X}} \geqslant \overline{\overline{Y}}$ 且 $\overline{\overline{Y}} \geqslant \overline{\overline{X}}$, 则 $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$;

(ii) 势的三歧性定理：对于任意点集 X 与 Y, $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$, $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ 与 $\overline{\overline{X}} > \overline{\overline{Y}}$ 三者必有且仅有一式成立;

(iii) 对于任意点集 X, 恒有 $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{2^X}}$;

(iv) 任意一个无限点集都有可列真子集;

(v) 点集 X 为可列集的充分必要条件是 $X = \{\, x_j \mid j \in \boldsymbol{N} \,\}$;

(vi) 至多可列集的子集是至多可列集, 至多可列个至多可列集的并集是至多可列集;

(vii) 若 X 为无限集, Y 为至多可列集, 则 $\overline{\overline{X \bigcup Y}} = \overline{\overline{X}}$;

(viii) $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{Q}$ 都是可列集; $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ 以及它们的任一区间或区域都具有连续势 $\aleph_1$;

---

[1] 这里指按照特定的次序两两可乘.

[2] 基数（或势）概念的严格定义相当复杂, 需要公理集合论的许多准备知识, 请参看文献 [94] 的第十四章. 这里给出的只是一种直观描述.