弹性层状体的求解方法

钟阳 殷建华 著

科学出版社
www.sciencep.com

弹性层状体的求解方法

钟 阳 殷建华 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书比较系统地介绍了弹性层状体的各种求解方法，并着重阐释了利用传递矩阵法和刚度矩阵法求解弹性层状体理论解的过程。主要内容包括弹性层状体的发展历史和研究现状，圆形荷载作用下弹性力学多层空间轴对称问题的各种解法，非轴对称多层空间课题的各种解法，弹性力学平面多层问题及空间多层问题的各种解法。

本书可作为高等院校道路工程专业本科高年级学生、研究生的教材，也可供从事道路工程设计等科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性层状体的求解方法/钟阳，殷建华著．—北京：科学出版社，2007
ISBN 978-7-03-018843-4

Ⅰ．弹…　Ⅱ．①钟…②殷…　Ⅲ．层状结构－弹性力学：工程力学
Ⅳ．TB125

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第051161号

责任编辑：童安齐／责任校对：刘彦妮
责任印制：吕春珉／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007年5月第一版　开本：B5(720×1000)
2007年5月第一次印刷　印张：11 3/4
印数：1—2 500　字数：234 000

定价：36.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)
销售部电话 010-62136131　编辑部电话 010-62137026(BA08)

前　　言

由于弹性层状体模型可以比较合理地体现自然沉积而成的地基土和分层修建的人工建筑物的实际情况，因此该模型在地震学、岩土工程、土木工程、水利工程等领域中得以非常广泛的应用。土木工程中的许多结构，例如房屋建筑的地基、铁路的路基、高速公路的路面、机场的跑道等等都是由不同的材料分层修建的，这一类结构的设计和分析都是以弹性层状半空间为理论依据的。因此，研究多层弹性体系也就成为土力学以及弹性力学的重要研究方向之一。

近年来，国内外学者针对这一体系进行了大量的研究工作，并且取得来许多丰富的成果。以高速公路沥青路面的分析设计和计算方法为例，目前，世界各国已经形成了多种以多层弹性体系为理论依据的计算程序，在美国有加利福尼亚研究所ELSYM程序、切夫隆研究公司的CHEV-5L程序，在荷兰阿姆斯特丹有壳牌研究工作组的BISAR程序，在澳大利亚有联邦科学与工业研究院的GCP-1程序，在我国有哈尔滨工业大学郭大智教授研制的APDS97程序等。上述方法都是采用由美国哥伦比亚大学的Burmister于1945年提出的应力函数法，从理论上讲，Burmister的方法可以解决任意多层地基的力学计算问题，但对于层数大于三的多层弹性体系，随着层数的增多，由定解条件得到的线性代数方程组的方程个数也将增多，因此运用代数运算的方法求解这些方程组而得到各层弹性体积分常数的文字表达式，将是十分困难的。另外，该方法的另一个致命的缺点，是其应力函数的选取问题，即由于选取应力函数没有一定的规律可以遵循，故大大地限制了该方法在这一领域中的应用。随着科学技术的发展及计算手段的提高，科学工作者不断探讨到新的求解方法。

传递矩阵法源于机械、结构的振动分析。这一方法用于弹性层状体的分析中，不但可以降低问题求解的难度，而且可以减小计算量。这一方法的最大优点是不必引入应力函数，而是直接从弹性力学的静力平衡方程、物理方程以及几何方程出发，构造出应力、位移与几何坐标偏微分之间的矩阵关系式，再通过对关系式进行几何坐标相对应的积分变换，得到矩阵微分方程，再进一步求解矩阵微分方程就可以得到传递矩阵。由于传递矩阵是4×4矩阵（如平面问题）或者是6×6矩阵（如空间问题），利用传递矩阵法求解N层弹性体，永远是N个4×4矩阵之间的相乘或者是N个6×6矩阵之间的相乘，进而可以大大地减小计算量，提高计算速度。当然，传递矩阵法也存在着一定的缺点，例如传递矩阵的元素中都含有正指数项，计

算时经常会出现溢出或病态矩阵现象，从而导致计算上的失败。

刚度矩阵法是有限元方法的核心内容，将这一方法用于弹性层状体的分析中可以克服传递矩阵法的缺点。与传递矩阵法一样，刚度矩阵法也不需要引入应力函数，而是直接从弹性力学及矩阵理论出发，首先利用相应的积分变换推导出单层弹性体的刚度矩阵，然后按传统的有限元方法组成总体刚度矩阵，再通过求解由总体刚度矩阵所构成的代数方程以及相应的积分逆变换，就可求出荷载作用下多层弹性问题的解。由于刚度矩阵的元素中只含有负指数项，计算时不会出现溢出或病态矩阵现象，因此利用这种方法的计算非常稳定。

有关利用传递矩阵和刚度矩阵法求解弹性层状体的文献都发表于各类刊物中，尚未见到有关的专著出版。作者撰写这本书的目的就是为了弥补这方面的不足。本书共 8 章。第 1 章为绪论，叙述了弹性层状体的发展历史和研究现状，介绍了传递矩阵法和刚度矩阵法的基本思想。第 2 章为基本数学知识，列出了在以后各章推导过程中所要用到的数学知识。第 3 章为弹性力学基本方程，分别列出了弹性力学在直角坐标系下的空间和平面问题，以及在柱面坐标系下的空间问题的基本方程式。第 4 章为弹性力学空间轴对称问题的各种解法，给出了求解弹性力学空间轴对称问题一般解的六种方法。第 5 章为弹性力学非轴对称空间课题的应力与位移，讨论了弹性力学非轴对称空间课题的应力与位移的各种解法。第 6 章为平面弹性问题的传递矩阵和刚度矩阵解法，给出了推导弹性力学平面弹性问题的传递矩阵和刚度矩阵各种方法。第 7 章阐述弹性多层半空间问题的传递矩阵和刚度矩阵解法。第 8 章为介绍多层弹性半空间问题的温度应力。本书仅仅讨论了弹性层状体的静力问题，对动态问题、温度等问题，作者将在撰写的下一本书中提及。

书中的主要内容大多数是作者多年来在国内外著名刊物上发表过的研究成果，但是由于所涉及的问题的复杂性以及作者的水平有限，因此书中难免存在着缺点和不足之处，恳请读者批评指正。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

第1章 绪　　论

§1-1　层状弹性理论的历史回顾

在土木工程和岩土工程中，地基是一个非常复杂的体系。由于在几何方面，天然地基往往呈大面积的不规则层状结构，在材料特性方面，岩土本身的非线性又相当强，这就使得在计算地基的内力和变形时会遇到很多力学和数学上的困难。为了模拟这种层状结构，人们曾采用了各种方法，比如取其弹性参数的加权平均值来将其粗略等效成为均质弹性体，但都因为忽略了其本质上的层状结构而得不到满意的结果。显然，要想精确地模拟这种层状结构，只能采用层状的力学体系模型。另外，实际工程中也用一些人工分层修建的结构，例如公路中的柔性路面。建立这样的层状结构模型，是运用科学原理来解决实际工程问题的一种有效方法。但如果试图建立一个包罗万象的力学模型来分析层状结构体系的内力，势必出现过于复杂甚至无法求解的局面，如果采用回避矛盾的办法，根据实际经验确定层状结构的内力，又将过于简单化，并具有相当大的局限性。因此，在建立模型时，应该力图采用某些假设，抓住主要矛盾，忽略次要因素，使层状结构体系的力学模型得以简化，从而获得理论解答。建立的力学模型越完善，所得的理论结果就越接近实际。尽管如此，但仍然存在一定的差距。这种理论与实践的不一致性，可通过各种实验手段对理论结果加以修正，取得理论与实践的统一。实践证明，这种理论加修正的方法是解决实际工程设计问题的行之有效的办法。当前，发展比较完善的层状弹性体系理论，与实际地基土层的真实情况尚有很大的差异。如果采用近代已有所研究的非线性弹性力学、塑性理论、黏弹性理论、流变学等来分析层状结构问题，则在力学上和数学上还有很多难以克服的难题，甚至无法求解，即使求得理论解，又因参数过多，不能在实际中得以应用。尽管将层状弹性体系理论应用于非线性较强的岩土材料仍然只能给出粗略的解答，但它应该说已经是一个不小的进步。当然，有关这方面问题的研究是今后发展的方向。

所谓层状弹性体系，是指半无限弹性体分成若干水平层，每层内部都是均质各向同性的弹性体，但层与层之间的弹性参数是不相同的，层与层之间的接触条件可以分为完全接触和滑动接触两种。

在弹性层状理论体系没有发表以前，岩土工程和柔性路面的设计常采用 Boussinesq 对弹性均质半空间体在单个竖向集中荷载作用下的应力与位移的理论解。作为岩土力学的主要理论基础之一，这个解答自从问世以来在近代土力学中获

得了广泛的应用。直到现在，利用 Boussinesq 解答所得到的弹性均质半空间体内任一点的竖向正应力的表达式，仍是岩土工程界广为使用的沉降计算方法——分层总和法的基础。由于弹性层状理论在路面力学、岩土力学和复合材料力学等领域有着重要的应用价值，因此关于弹性层状理论的计算研究几十年来一直持续不断。1945 年，美国哥伦比亚大学的 Burmister 采用 Hankel 积分变换的方法得到了双层和多层弹性体系在轴对称荷载作用下应力和位移计算的理论解。但由于计算式的复杂冗长，当时仅提供了 $\mu=0.5$ 时双层体系的中心弯沉值，以至在相当长时期内，它并不能很快地付诸于实际应用。英国的 Fox 和 Acum 于 1948～1951 年间，采用 Burmister 的方法，对双层体系和三层体系在层间是连续和滑动的条件下计算出当 $\mu=0.5$ 时的一系列的应力值表。苏联学者科岗于 1952～1958 年间，发表了一系列关于双层和三层弹性体系应力和变形计算的文献，列出了一定数量的计算图表。法国学者 Jeufroy 等于 1957～1959 年间在有关文献中列出了三层体系（看成为双层体系上的板）计算应力和位移的诺谟图，其中的计算也采用了 $\mu=0.5$。Schiffman 于 1957～1962 年在有关文献中叙述了三层体系的理论解，并详细讨论了数值解的方法与技巧，其中也包括了数值分析所需要的详细步骤以及误差分析，以便用现代高速电子计算机获得可靠解答。英国 Shell 实验研究室，在 Acum 和 Fox 采用电子计算机计算三层体系的应力方面获得大量数据之后，于 1962 年由 Thornton 研究中心的 Jones 发表了三层体系当 $\mu=0.5$ 时参数范围较为广泛的计算图表，这些数据和图表后来为研究人员所广为引用。

在单个集中水平力作用下，均质弹性半空间体内应力和位移计算的理论解是由 Cerruti 在 1882～1888 年提出的。之后，它曾在土力学和地基基础中得到一定的实践运用，但它的进一步发展只是到了近代才受到人们的重视。1955～1956 年牟歧鹿楼采用 Hankel 变换法，求解出弹性半空间体在水平荷载作用下的位移和应力分量的一般解。20 世纪 60 年代，Barber 和 Schiffinan 则把牟歧鹿楼的解推广到层状体系上去，此后有 Westmann 和 Gerrard 等给出了若干数值解，并制成图表。在 20 世纪 70 年代，日本的松岗健一和我国的许志鸿也对此课题进行了研究，给出了不少计算结果。目前，采用积分变换法求解任意 N 层弹性体系应力和变形的计算机程序，在美国有加利福尼亚研究院的 ELSYM 程序、Chevron 研究公司的 CHEV-5L 程序，在荷兰的阿姆斯特丹有 Shell 研究工作组的 BISAR 程序，在澳大利亚有联邦科学与工业研究院的 GCP-1 程序等，后两者也适用于计算水平力作用下的应力和变形。例如 Shell 国际石油公司的 BISAR 程序可以计算在圆面积垂直和水平荷载下应力和变形，并可以考虑层间接触条件为完全连续、无摩阻力、部分摩阻力等情况。我国从 1962 年起，开始开展柔性路面设计方法的研究。1964 年，同济大学公路工程研究所对双层和三层弹性体系（层间连续和层间滑动）在圆形均布垂直荷载下的应力和位移进行了较全面的数值计算，提出了数据表及计算图。此后，又进行了水平荷载作用下应力和位移的计算，以便通过叠加求出在垂直和水平

荷载综合作用下的应力和位移值。从理论上来说，根据上述 Burmister 的层状弹性体系的一般理论可以解决任意多层地基的力学计算问题，但对于层数大于 3 的多层弹性体系，随着层数的增多，由定解条件得到的线性代数方程组的方程个数也将增多，因此运用代数运算的方法求解这些方程组而得到各层弹性体积分常数的文字表达式将是十分困难的。为了避免求解大型线性方程组，Bufer 和 Bahar 分别于 1971 年和 1972 年各自独立地提出了传递矩阵法，即利用 Cayley-Hamilton 定理，分别对二维和三维弹性层状体系求出了传递矩阵。在国内，西安公路研究所的王凯根据弹性力学基本方程式，运用“递推回代法”由有关的线性代数方程组解出了任意 N 层弹性连续体系各层应力、位移积分公式中积分常数的表达式，并通过对表达式的分析以及相应的数学运算，得到了适用于 N 层体系的应力、位移积分计算的一系列公式。此外，1984 年朱照宏用高阶矩阵代数法、郭文复用分层求逆子阵的矩阵法以及邓学钧于 1986 年提出的矩阵分析方法都成功地解决了一些实际问题。1985 年，华东水利水电学院的张子明等用初始函数法依据层间与基底的不同情形，导出了轴对称荷载作用下成层地基位移和应力计算的一般公式。1986 年，王林生又利用 Laplace-Hankel 变换，从空间轴对称问题的位移法基本方程出发，直接导出了单层地基的初参数解答，然后又利用矩阵递推规律，导出多层地基在两种边界条件和两种接触条件下表面沉陷的统一公式。1992 年，本书的作者钟阳等将轴对称课题弹性力学基本方程变换成用层间位移和应力表示的四个一阶偏微分方程组（用矩阵关系式表示），通过引入 Hankel 变换将其化成四个一阶的常微分方程组，最后求解该微分方程组的特征值和特征函数，进而得到传递矩阵，然后应用传递矩阵方法推导出了多层弹性半空间轴对称问题在轴对称荷载作用下，层间完全接触情况的解析解。1995 年，钟阳等又将该方法推广到弹性层状体系的非轴对称课题中。1993 年，浙江大学金波等利用积分变换及矩阵递推方法得到了任意 N 层弹性平面应变及轴对称问题内部作用对称或轴对称荷载时的基本解，显然这是弹性层状体系传递矩阵分析方法的一个拓展，然后根据这个基本解，1996 年，金波等又提出求解传递矩阵的逆矩阵的公式，并在应力和位移的计算上，对荷载作用面上下分别采用两种不同的传递矩阵，该成果解决了传递矩阵方法在程序实现上的困难，使采用这种方法的数值计算程序很容易在微机上实现并保证一定的数值精度。1997 年，大庆石油学院的孟凡顺等从柱坐标系下弹性力学基本方程出发，经关于方位角的傅里叶变换及关于径向的 Hankel 变换，建立了弹性介质层的传递矩阵，利用层间完全接触条件，给出了多层半无限弹性体在任意荷载作用下的理论解。

§1-2　现行层状弹性理论求解方法中存在的问题

目前，用于分析求解多层弹性空间问题的方法主要有三种。第一种是 Burmister 方法，第二种是传递矩阵法，第三种是刚度矩阵法。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

从理论上讲，Burmister 的方法可以解决任意多层地基的力学计算问题，但对于层数大于 3 的多层弹性体系，随着层数的增多，由定解条件得到的线性代数方程组的方程个数也将增多，因此运用代数运算的方法求解这些方程组而得到各层弹性体积分常数的文字表达式将是十分困难的。该方法的另一个致命的缺点是其应力函数的选取问题。由于选取应力函数没有一定的规律可以遵循，大大的限制了该方法在这一领域中其他问题应用，例如弹性层状体的温度问题、动态问题等的求解。

传递矩阵法的最大优点是不必引入应力函数，而是直接从弹性力学的静力平衡方程、物理方程以及几何方程出发，建立应力、位移关于几何坐标偏微分之间的矩阵关系式，再通过对关系式进行与几何坐标相对应的积分变换，得到矩阵微分方程，求解矩阵微分方程就可以得到传递矩阵。由于传递矩阵是 4×4 矩阵（如平面问题）或者是 6×6 矩阵（如空间问题），利用传递矩阵法求解 N 层弹性体，永远是 N 个 4×4 矩阵之间的相乘或者是 N 个 6×6 矩阵之间的相乘，进而可以大大的减小计算量，提高计算速度。传递矩阵法的最大缺点是传递矩阵的元素中都含有正指数项，计算时经常会出现溢出或病态矩阵现象，从而导致计算失败。

刚度矩阵法可以克服传递矩阵法的缺点。与传递矩阵法一样，刚度矩阵法也不需要引入应力函数，直接从弹性力学及矩阵理论出发，首先利用相应的积分变换推导出了单层弹性体的刚度矩阵，然后按传统的有限元方法组成总体刚度矩阵。通过求解由总体刚度矩阵所构成的代数方程以及相应的积分逆变换，就可求出荷载作用下多层弹性问题的解。由于刚度矩阵的元素中只含有负指数项，计算时不会出现溢出或病态矩阵现象，所以利用这种方法的计算非常稳定。

传递矩阵法和刚度矩阵法是求解多层弹性状体方法中的较好方法，这两种方法不但可以用于静力问题，还可以用于动力问题的求解，是今后发展的方向。

§ 1-3 状态空间变量传递矩阵法在弹性层状体系中的应用现状

传递矩阵方法最初应用于结构振型分析计算，随着计算机的广泛应用，作为矩阵分析法中比较简单易行的传递矩阵方法应用也越来越广。状态空间变量传递矩阵法比较适用于工程结构单元首尾相连的链状体系，如连续梁、框架、滑轮机转轴、层状地基、叠层板等，只要通过简单的矩阵连乘就可把单元合成整体结构矩阵。状态空间变量传递矩阵法无论对哪种计算体系，都具有形式相同的层间传递关系和基本一致的运算过程，因此该方法在机械、土木、航天等领域有着广泛的应用前景。

状态空间变量法在弹性层状体系中的应用已取得了很多成果。Bahar 于 1972 年提出了传递矩阵法，利用 Cayley-Hamilton 定理，分别对二维和三维的各向同性弹性层状体推出了传递矩阵。Benitez 和 Rosakis 利用状态空间法，推导出单层和

多层各向同性无限大物体的点力解，并给出了状态变量的积分表达式。范加让在其著作中给出了状态空间法的详细介绍，并利用三角级数展开求解以前无法精确求解的各种边界条件的层状板壳问题。丁浩江由横观各向同性弹性力学基本方程出发，推导出含应力和位移两类变量的混合方程，利用傅里叶变换和邹道勤等得出的横观各向同性弹性力学问题的通解，求解出状态变量传递矩阵的具体形式。他们最终得出的横观各向同性弹性体点力解可直接退化到无限体的 Kelvin 解和半无限体的 Mindlin 解。丁浩江等用状态空间法分析了层状板问题。王建国用状态空间法分析了层状压电结构问题。金波和唐锦春等利用积分变换及状态空间法得出了任意 N 层弹性体平面应变及轴对称问题的 Mindlin 解。用得出的 Mindlin 解构造出 Green 函数代入 Somigliana 关系式，从而得出计算多层弹性体内部任意点位移的公式。钟阳等利用 Hankel 变换及状态空间法得出了多层弹性地基半空间轴对称和非轴对称问题的解析解。王建国等利用状态空间法分析了多层各向异性地基轴对称问题。陈光敬等利用 Hankel 变换，将传递矩阵法运用于横观各向同性半无限弹性体，推导了横观各向同性下的传递矩阵，并据此推导了均质横观各向同性体 Boussinesq 课题。杨勇等和艾智勇等根据 Burmister 轴对称弹性层状理论，运用传递矩阵法得到了多层弹性地基内部作用竖向集中力和水平力时应力和位移的解析表达式（广义 Mindlin 课题解）。由于传递矩阵法的优势在于不用预设应力函数，所以在一些很难确定应力函数（如温度场、动力等）的状况下，该法被推广使用。同时传递矩阵法概念清晰，求解方便，所以得到了广泛应用。

第 2 章　有关的数学知识

§ 2-1　伽 玛 函 数

1. 第二类欧拉积分

具有如下形式的广义积分

$$\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \tag{2-1}$$

称为第二类欧拉积分，当 $p>0$ 时，这个广义积分收敛，由它所确定的函数，称为 p 的伽玛函数，记作

$$\Gamma(p)=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \tag{2-2}$$

2. Γ 函数的性质

① 递推关系

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p) \tag{2-3}$$

② 若 n 为自然数，且 $p>n$，则有

$$\Gamma(p)=(p-1)(p-2)\cdots(p-n)\Gamma(p-n) \tag{2-4}$$

即

$$\Gamma(p)=\left[\prod_{k=1}^{n}(p-k)\right]\Gamma(p-n) \tag{2-5}$$

③ 若 $p>0$，且 m 为非负整数，则有

$$\Gamma(p+m)=(p+m-1)(p+m-2)\cdots p\Gamma(p) \tag{2-6}$$

即

$$\Gamma(p+m)=(p)_m\Gamma(p) \tag{2-7}$$

式中

$$(p)_m=\frac{\Gamma(p+m)}{\Gamma(p)}$$

当 $p=1$，则有

$$\Gamma(m+1)=m! \tag{2-8}$$

§ 2-2　超几何方程

1. 超几何方程

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x}+[c-(a+b+1)x]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-aby=0 \tag{2-9}$$

式中，a、b、c 为不依赖于 x 的常数。

上述超几何方程的一个级数解称为超几何函数，记作

$$\mathrm{F}(a,b,c,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{k!(c)_k}x^k \tag{2-10}$$

式中

$$(\lambda)_k=\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}$$

2. 超几何函数的性质

1）当 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $x=0$，则有

$$\mathrm{F}(a,b,c,x)=1 \tag{2-11}$$

2）对称性

$$\mathrm{F}(a,b,c,x)=\mathrm{F}(b,a,c,x) \tag{2-12}$$

3）超几何函数与初等函数的关系。

当常数 a、b、c 为一定值时，超几何函数可以用初等函数表示

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{F}(-a,b,b,x)=(1+x)^a\\
&\mathrm{F}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},x^2)=\sqrt{1-x^2}\\
&\mathrm{F}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2)=\frac{\arcsin(x)}{x}\\
&\mathrm{F}(\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},-x^2)=\frac{\arctan(x)}{x}\\
&\mathrm{F}(1,1,2,-x)=\frac{\ln(1+x)}{x}\\
&\mathrm{F}(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},x^2)=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}\\
&\mathrm{F}(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},\frac{1}{2},\sin^2x)=\cos ax\\
&\mathrm{F}(\frac{1+a}{2},\frac{1-a}{2},\frac{3}{2},\sin^2x)=\frac{\sin ax}{a\sin x}\\
&\mathrm{F}(a,a+\frac{1}{2},\frac{1}{2},x)=\frac{(1+\sqrt{x})^{-2a}+(1-\sqrt{x})^{-2a}}{2}\\
&\mathrm{F}(a,a+\frac{1}{2},2a,x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2})^{1-2a}\\
&\mathrm{F}(2a,a+1,a,x)=(1-x)^{-2a-1}(1+x)
\end{aligned}\right\} \tag{2-13}$$

§ 2-3　Bessel 函数

1. Bessel 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1 - \frac{v^2}{x^2})y = 0 \tag{2-14}$$

Bessel 微分方程的一个这个无穷级数解叫做 v 阶第一类 Bessel 函数(简称 v 阶贝塞尔函数),记作

$$\mathrm{J}_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{v+2k}}{k!\Gamma(v+k+1)} \tag{2-15}$$

式中，$\Gamma(v+k+1)$为伽玛函数。

2. 整数阶 Bessel 函数的基本性质

1) 若 n 为正整数,则有

$$\mathrm{J}_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

2) 若 $x \geqslant 0$,则有

$$\mathrm{J}_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$$

3) 若 x 为实数,则有

$$|\mathrm{J}_0(x)| \leqslant 1$$

4) 若 x 为实数,则有

$$|\mathrm{J}_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (n \neq 0)$$

图 2-1 和图 2-2 分别给出零阶和一阶 Bessel 函数的图形。

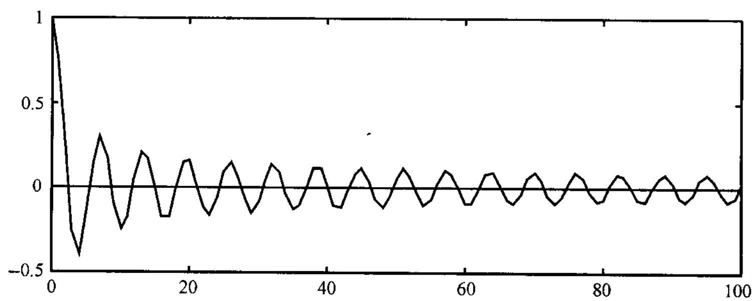

图 2-1　零阶 Bessel 函数

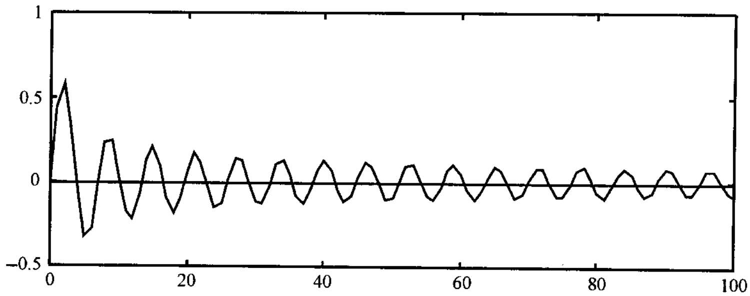

图 2-2　一阶 Bessel 函数

3. 整数阶 Bessel 函数的递推关系

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathrm{J}_n(x)=\frac{x}{2n}[\mathrm{J}_{n-1}(x)+\mathrm{J}_{n+1}(x)]\\
&\mathrm{J}_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}\mathrm{J}_n(x)-\mathrm{J}_{n-1}(x)\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{J}_n(x)=\mathrm{J}_{n-1}(x)-\frac{n}{x}\mathrm{J}_n(x)\\
&\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m[x^n\mathrm{J}_n(x)]=x^{n-m}\mathrm{J}_{n-m}(x)\\
&\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m[x^{-n}\mathrm{J}_n(x)]=(-1)^m x^{-n-m}\mathrm{J}_{n+m}(x)
\end{aligned}
\right\}
\tag{2-16}
$$

4. Bessel 函数的渐进展开式

$$
\mathrm{J}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[A_n(x)\cos\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)-B_n(x)\sin\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right]
\tag{2-17}
$$

式中

$$
A_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n,2k)}{(2x)^{2k}};\quad B_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n,2k+1)}{(2x)^{2k+1}}
$$

$$
(n,0)=1;\quad (n,m)=(-1)^m\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-m\right)};\quad (-n,m)=(n,m)
$$

5. 半整数阶 Bessel 函数

当 Bessel 函数的阶数为半整数时，即 $n=\pm\frac{1}{2}$，贝塞尔函数可以用初等函数表达。在路面力学计算中，当采用柱面坐标系求解层状弹性体系，并且假定外荷载为

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com