



毛 纲 源 考 研 数 学 辅 导 系 列

MAOGANGYUAN KAOYAN SHUXUE FUDAO XILIE

◇ 题型全面 紧扣大纲

帮你高效复习

◇ 方法新颖 技巧独特

助君考研成功

毛纲源 编著

2008

考研数学(四)

常考题型解题方法技巧归纳

华中科技大学出版社

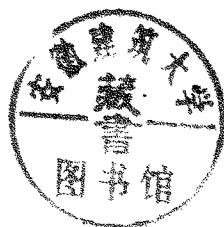
<http://www.hustp.com>

毛纲源考研数学辅导系列

考研数学(四)

常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著



华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学(四)常考题型解题方法技巧归纳/毛纲源 编著. -2 版—武汉:华中科技大学出版社,2007 年7 月

ISBN 978-7-5609-2974-3

I. 考… II. 毛… III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆CIP 数据核字(2003)第 059874 号

考研数学(四)常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著

责任编辑:王汉江

封面设计:潘 群

责任校对:陈 骏

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm 1/16

印张:32.5

字数:748 000

版次:2007 年7 月第2 版

印次:2007 年7 月第3 次印刷

定价:39.80 元

ISBN 978-7-5609-2974-3/O · 283

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前 言

为使考研同学能在较短时间内进行全面复习,提高考研应试能力和水平,作者根据最新数学考试大纲的要求,深入研究了历年来考研试题,结合作者多年来在考研辅导班授课经验,编写了《考研数学(数学四)常考题型及其解题方法技巧归纳》一书.该书自问世以来,历经三次全国统考,其内容每年都覆盖了试题的绝大部分题型,现已重印多次,畅销全国,以其题型全面、方法新颖、技巧独特、适于自学等特点深受全国广大考生的青睐.

本书经过此次修订增加了新增考点的有关内容,同时还纠正了差错,弥补了疏漏,更好地体现了考研数学大纲的思想和要求.

具体体现在以下几点.

首先,本书根据考研数学大纲的要求,将历年来考研数学试题按题型分类,对各类题型的解法进行了归纳总结,使考生能做到举一反三.数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好这些题型及其解题方法与技巧,会减少解题的盲目性,从而提高解题效率,考生的应试能力自然就得到了提高.同时也便于考生掌握考研数学(四)的大部分题型及其解题思路、方法与技巧,因而本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解.为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析,便于考生理解、记忆,避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法,这些简便算法新颖、独特,它们是作者多年来教学经验的总结,会大大提高考生的解题速度和准确性,使考生大大节省时间,因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注意培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力,对综合型题型进行了较多的分析和解说,以期提高考生在这方面的能力.与此同时,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,能灵活地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深,适于自学,选用例题尽量做到精而易终、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识,也为了更好地阅读本书,特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书,这就是本人编写的经济类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书:《经济数学(微积分)解题方法技巧归纳(第2版)》、《经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳(第2版)》、《经济数学(概率论与数理统计初步)解题方法技巧归纳(第2版)》.这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评,多次印刷,久销不衰.很多已考取的经济类硕士研究生不少都受益于这套丛书.我在撰写本书时,多处引用了这套丛书的内容和方法,如果能把丛书结合起来学习必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误、疏漏之处在所难免,恳请专家、读者指正.

编者

2007年3月

目 录

第 1 篇 微 积 分

1.1 函数	(1)
1.1.1 求几类函数的表达式	(1)
题型一 已知函数求其反函数的表达式	(1)
题型二 求分段函数的复合函数	(1)
题型三 利用函数概念求两类函数表达式	(3)
1.1.2 判别(证明)几类函数的奇偶性	(3)
题型一 判别经四则运算后的函数的奇偶性	(3)
题型二 判别自变量带相反符号的两同名函数的代数和的奇偶性	(3)
题型三 判别复合函数的奇偶性	(4)
题型四 判别原函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 的奇偶性	(4)
题型五 判别含子函数 $f(x) = (a^{kx} \pm 1)/(a^{kx} \mp 1)$ 的函数的奇偶性	(5)
1.1.3 奇、偶函数的几个性质的应用	(5)
1.1.4 函数有界性的判定	(6)
题型一 判定在有限开区间内连续函数的有界性	(7)
题型二 判定在无穷区间内连续函数的有界性	(7)
题型三 判定分段连续函数的有界性	(8)
习题 1.1	(9)
1.2 极限、连续	(10)
1.2.1 极限的概念与基本性质	(10)
题型一 正确理解极限定义中的“ ϵ, N ”, “ ϵ, δ ”, “ ϵ, X ”语言的含义	(10)
题型二 正确区别无穷大量与无界量	(10)
题型三 正确运用极限的保序性、保号性	(11)
题型四 正确运用极限的四则运算法则、无穷大量运算法则及夹逼准则	(12)
1.2.2 求未定式极限	(12)
题型一 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限	(12)
题型二 求 $0 \cdot \infty$ 型极限	(15)
题型三 求 $\infty - \infty$ 型极限	(15)
题型四 求幂指函数型(0^0 型, ∞^0 型, 1^∞ 型)极限	(16)
题型五 求含变限积分的未定式极限	(20)
1.2.3 求数列极限	(22)
题型一 求无穷多项和的极限	(23)
题型二 求无穷多项积的极限	(24)
题型三 求由递推关系式给出的数列的极限	(24)
1.2.4 求几类子函数形式特殊的函数极限	(25)
题型一 求含 $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ 型的极限	(25)
题型二 求含根式差的函数极限	(26)
题型三 求含指数函数和差的函数极限	(26)
题型四 求含有界变量为因子的函数极限	(27)

题型五	求含 $\ln f(x)$ 的函数极限, 其中 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 1$	(28)
1.2.5	由含未知函数的极限, 求与该函数有关的另一极限	(28)
1.2.6	求极限式中待定常数	(29)
题型一	求有理函数极限式中的待定常数	(29)
题型二	确定分式函数极限式中的待定常数	(30)
题型三	求 $\infty \pm \infty$ 型的根式极限式中的待定常数	(31)
题型四	求含变项积分的极限式中的待定常数	(31)
1.2.7	比较和确定无穷小量的阶	(32)
题型一	比较无穷小量的阶	(33)
题型二	确定无穷小量为几阶无穷小量	(33)
题型三	利用无穷小量阶的比较求待定常数	(34)
1.2.8	讨论函数的连续性及间断点的类型	(35)
题型一	判断初等函数的连续性	(35)
题型二	讨论分段函数的连续性	(36)
题型三	讨论含参变量的极限式所定义的函数的连续性	(37)
题型四	判断函数间断点的类型	(37)
1.2.9	根据分段函数的连续(可导)性确定其待定常数	(39)
题型一	根据分段函数的连续性确定待定常数	(39)
题型二	根据分段函数的可导性确定待定常数	(40)
1.2.10	连续函数性质的两点应用	(41)
题型一	利用连续函数性质证明中值等式命题	(41)
题型二	证明方程实根的存在性	(43)
1.2.11	极限在经济活动分析中的应用	(43)
题型一	计算连续复利	(43)
题型二	求解贴现问题	(44)
题型三	计算生产函数的极限	(44)
习题 1.2		(45)
1.3	一元函数微分学	(48)
1.3.1	导数定义的两点应用	(48)
题型一	求与增量比(差商)有关的极限	(48)
题型二	讨论函数在某点的可导性	(49)
1.3.2	讨论分段函数的可导性及导函数的连续性	(53)
题型一	讨论分段函数的可导性	(53)
题型二	讨论分段函数的导函数的连续性	(54)
题型三	讨论特殊分段函数的连续性、可导性及其导函数的连续性	(56)
1.3.3	讨论含绝对值的函数的可导性	(56)
题型一	讨论含因子 $ x-a $ 的函数的可导性	(56)
题型二	讨论含绝对值函数 $ f(x) $ 的函数的可导性	(57)
1.3.4	求一元函数的导数和微分	(59)
题型一	求复合函数的一阶与二阶导数	(59)
题型二	求反函数的导数	(60)
题型三	求乘除因子较多且有指数运算或幂指运算的函数的导数	(61)
题型四	求分段函数的导数	(62)
题型五	求带绝对值的函数的导数	(62)
题型六	求某些简单函数的高阶导数	(63)
题型七	求由一个方程所确定的隐函数的导数	(65)

题型八	求一元函数的微分	(66)
1.3.5	利用微分中值定理的条件及其结论解题	(68)
1.3.6	利用罗尔定理证明中值等式	(70)
题型一	证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $cf'(\xi) = bg'(\xi)$, c, b 为常数	(70)
题型二	证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi) = 0$	(71)
题型三	证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$ ($g(x) \neq 0$)	(72)
题型四	证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$	(73)
题型五	证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - b(\xi)] = b$	(73)
题型六	证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ (n 为正整数)	(74)
题型七	证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $g(\xi)f'(\xi) + h(\xi)f(\xi) = Q(\xi)$	(74)
题型八	证明题设中有定积分等式的中值等式	(75)
题型九	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F^{(k)}(\xi) = 0$ ($k \geq 2$)	(76)
1.3.7	拉格朗日中值的应用	(77)
题型一	证明(隐)含函数差值的中值等式或中值不等式	(77)
题型二	证明其导函数与原来函数性质之关系	(78)
题型三	求解与函数差值有关的问题	(80)
题型四	利用拉格朗日中值定理的几何意义证明中值等式	(80)
题型五	求中值的极限位置	(81)
1.3.8	利用柯西中值定理证明中值等式	(81)
题型一	证明两函数差值之比的中值等式	(82)
题型二	证明两函数导数之比的中值等式	(82)
题型三	证明使用柯西定理的两函数没有给出的中值等式	(83)
1.3.9	证明两个中值所满足的中值等式	(84)
1.3.10	利用导数讨论函数性态	(86)
题型一	证明函数在某区间上是常数	(86)
题型二	证明(判别)函数的单调性	(86)
题型三	利用极限式讨论函数是否取得极值	(88)
题型四	求函数的单调区间、极值、最值	(89)
题型五	求曲线的凹凸区间与拐点	(92)
1.3.11	讨论函数图形与函数性态的关系	(95)
题型一	求曲线的渐近线	(95)
题型二	利用函数性态作函数图形	(97)
题型三	利用导函数的图形确定原来函数的性态	(99)
1.3.12	讨论方程根的个数	(99)
题型一	讨论不含参数的方程根的个数	(99)
题型二	讨论含参数的方程根的个数及其所在区间	(101)
1.3.13	利用导数证明不等式	(102)
题型一	证明含或可化为函数差值的不等式	(102)
题型二	利用函数单调性证明不等式	(103)
题型三	利用函数的最值证明不等式	(105)
题型四	证明含两个常数的数值不等式	(107)
1.3.14	导数几何意义的应用	(108)
题型一	求平面曲线的切线方程和法线方程	(108)
题型二	求解与切线在坐标轴上的截距有关的问题	(109)
题型三	求解与两曲线相切的有关问题	(110)
1.3.15	导数在经济活动分析中的应用	(111)
题型一	计算弹性	(112)

题型二	计算边际函数	(112)
题型三	求解与边际和弹性有关的应用题	(113)
题型四	求解经济应用中一元函数的最值问题	(115)
习题 1.3		(118)
1.4 一元函数积分学		(123)
1.4.1 原函数与不定积分的关系		(123)
题型一	判别一函数是否为分段函数的原函数	(123)
题型二	已知某函数,求其原函数	(124)
题型三	已知某函数的一个原函数,求该函数	(125)
题型四	已知某函数的原函数,求与该函数有关的函数的不定积分	(126)
题型五	已知 $f(x)$ 的一个原函数,求 $\int x^k f^{(k)}(x) dx$	(126)
1.4.2 计算不定积分		(127)
题型一	计算被积函数仅是一个(或一类)函数的不定积分	(127)
题型二	计算 $\int f(x)g(x)dx$	(128)
题型三	计算简单无理函数的不定积分	(128)
题型四	求 $\int \frac{1}{(ax+b)^k} f(x) dx$	(131)
题型五	求 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$	(131)
题型六	简化计算有理真分式的不定积分	(133)
题型七	求三角函数的不定积分	(134)
1.4.3 利用定积分定义求某些积和式的数列极限		(135)
题型一	求一因式为 $1/n$ 的积和式的数列极限	(136)
题型二	求取对数后能产生因式 $1/n$ 的积和式的数列极限	(136)
题型三	求分母能化为 $n+1/i$ 的积和式的数列极限	(136)
1.4.4 计算定积分的若干方法与技巧		(137)
题型一	利用圆的面积计算定积分	(137)
题型二	计算对称区间上的定积分	(138)
题型三	计算周期函数的定积分	(138)
题型四	比较或估计定积分的大小	(140)
题型五	求解含定积分的函数方程	(141)
题型六	计算几类须分子区间积分的定积分	(141)
题型七	计算含参数的定积分	(143)
题型八	计算需换元计算的定积分	(145)
题型九	计算被积函数含抽象函数导数的(不)定积分	(145)
题型十	计算被积函数含抽象函数的定积分的值	(146)
1.4.5 求解与变限积分有关的问题		(147)
题型一	求变限积分的导数	(147)
题型二	求含变限积分的定积分	(148)
题型三	讨论变限积分函数的性态	(149)
题型四	由变限积分所满足的函数方程,求未知函数或其积分值	(152)
1.4.6 证明定积分等式		(154)
题型一	证明定积分的变换公式	(154)
题型二	证明定积分中值等式	(156)
1.4.7 定积分不等式的常用证法		(156)
1.4.8 计算反常积分		(160)

题型一	计算无穷区间上的反常积分	(160)
题型二	判别 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 与 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ ($a>0$) 的敛散性	(164)
题型三	计算无界函数的反常积分	(164)
题型四	判别 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ 与 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 的敛散性	(166)
1.4.9	定积分的应用	(166)
题型一	求曲边梯形的面积及其绕坐标轴旋转的体积	(167)
题型二	计算非曲边梯形的面积及其绕坐标轴旋转的体积	(170)
题型三	求由含参数 a 的某曲线和其他曲线围成的平面图形的面积 S 及绕坐标轴 旋转的体积 V , 并求当 a 为何值时, S 和(或) V 取最大值	(172)
题型四	由某曲线所围图形的面积或其旋转体体积反求该曲线	(174)
题型五	求函数在区间上的平均值	(175)
题型六	由其变化率求经济函数或其改变量	(175)
题型七	由边际函数求(最优)总函数	(176)
习题 1.4		(177)
1.5	二元函数微积分学	(181)
1.5.1	二元函数微分学中的几个概念	(181)
1.5.2	计算偏导数与全微分	(184)
题型一	计算显函数的偏导数	(184)
题型二	求带函数记号的复合函数偏导数	(186)
题型三	计算由一个方程确定的隐函数的导数	(189)
题型四	求由方程组确定的隐函数的导数	(190)
题型五	求二元函数的全微分	(191)
1.5.3	二元函数微分学的应用	(193)
题型一	求闭域上连续的二元函数的极值和最大值	(195)
题型二	求解经济应用中的(无)条件最(极)值问题	(196)
1.5.4	交换二次积分次序与转换二次积分	(198)
题型一	交换二(累)次积分的积分次序	(198)
题型二	转换二次积分	(200)
1.5.5	用直角坐标系计算二重积分	(200)
题型一	根据积分区域选择积分次序计算二重积分	(200)
题型二	根据被积函数选择积分次序计算二重积分	(201)
题型三	利用奇偶性和对称性计算二重积分	(203)
题型四	分块计算二重积分	(205)
题型五	计算无界区域上较简单的二重积分	(206)
题型六	已知某二元连续函数 $f(x, y)$ 及其二重积分满足某一方程, 求该函数	(209)
题型七	判断(证明)二重积分值的大小	(209)
1.5.6	用极坐标系计算二重积分	(210)
题型一	计算圆域 $x^2 + y^2 \leq a$ ($a>0$) 上的二重积分	(210)
题型二	计算圆域 $x^2 + y^2 \leq 2ax$ ($a>0$) 上的二重积分	(211)
题型三	计算圆域 $x^2 + y^2 \leq -2ax$ ($a>0$) 上的二重积分	(212)
题型四	计算圆域 $x^2 + y^2 \leq 2by$ ($b>0$) 上的二重积分	(213)
题型五	计算圆域 $x^2 + y^2 \leq -2by$ ($b>0$) 上的二重积分	(214)
题型六	计算圆域 $x^2 + y^2 \leq 2ax + 2by + c$ ($a, b>0$) 上的二重积分	(214)
习题 1.5		(215)
1.6	常微分方程	(218)

1.6.1	求解几类一阶微分方程	(218)
题型一	求解变量可分离的一阶微分方程	(218)
题型二	求解一阶齐次微分方程 $y' = f(y/x)$	(219)
题型三	求解一阶线性非齐次方程	(221)
题型四	求解以 x 为因变量, y 为自变量的一阶线性方程	(222)
题型五	求以分段函数为非齐次项或系数的一阶线性微分方程的连续解	(223)
题型六	求解其他形式给出的一阶微分方程	(224)
1.6.2	常微分方程的简单应用	(225)
题型一	求解与几何量有关的问题	(225)
题型二	求解简单的经济应用题	(226)
习题 1.6		(227)

第 2 篇 线 性 代 数

2.1	计算行列式	(229)
2.1.1	计算具体行列式	(229)
题型一	计算非零元素主要在一行或两条对角线上的行列式	(229)
题型二	计算非零元素在三条线上的行列式	(231)
题型三	计算行(列)和相等的行列式	(233)
题型四	计算范德蒙行列式	(233)
题型五	求代数余子式线性组合的值	(234)
2.1.2	克莱姆法则的应用	(237)
2.1.3	计算抽象矩阵的行列式	(240)
题型一	计算由行(列)向量表示的矩阵的行列式的值	(240)
题型二	计算含零子块的四分块矩阵的行列式	(242)
习题 2.1		(243)
2.2	矩阵	(245)
2.2.1	证明抽象矩阵的可逆性	(245)
题型一	证明矩阵 A 可逆, 且 $A^{-1} = B$	(245)
题型二	已知 $AB + aA + bB + cE = O$ (a, b, c 为常数), 证明有关矩阵可逆	(245)
题型三	证明和(差)矩阵可逆	(247)
题型四	证明矩阵不可逆	(247)
2.2.2	矩阵元素给定, 求其逆矩阵的方法	(247)
题型一	计算二阶矩阵的逆矩阵	(248)
题型二	计算分块矩阵的逆矩阵	(248)
2.2.3	求解伴随矩阵的有关问题	(249)
题型一	计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式	(249)
题型二	求与伴随矩阵有关的逆矩阵	(252)
题型三	求与伴随矩阵有关的矩阵的秩	(253)
题型四	求伴随矩阵	(254)
题型五	证明伴随矩阵的性质	(254)
2.2.4	求 n 阶矩阵高次幂的方法	(255)
2.2.5	求矩阵的秩	(260)
题型一	求元素具体给定的矩阵的秩	(260)
题型二	求抽象矩阵的秩	(261)
题型三	已知矩阵的秩, 求其待定常数	(263)
2.2.6	分块矩阵的乘法运算	(264)

2.2.7	求解矩阵方程	(266)
题型一	求解含或能化为含单位矩阵加项的矩阵方程	(266)
题型二	求解只含一个未知矩阵的矩阵方程	(268)
题型三	求解含多个未知矩阵的矩阵方程	(269)
题型四	已知一矩阵方程,求方程中某矩阵的行列式	(271)
2.2.8	初等变换与初等矩阵关系的应用	(272)
题型一	用初等矩阵表示相应的初等变换	(272)
题型二	利用初等矩阵的性质计算矩阵	(273)
2.2.9	求解与矩阵等价的有关问题	(274)
题型一	判别两矩阵等价	(274)
题型二	利用等价的性质求解有关问题	(275)
习题 2.2		(276)
2.3	向量	(280)
2.3.1	求解与向量组线性相关性有关的问题	(280)
题型一	用定义判定向量组线性相(无)关	(280)
题型二	判定向量组的线性相关性	(282)
题型三	证明两类向量组的线性相关性	(283)
题型四	已知向量组的线性相关性,求其待定常数	(286)
2.3.2	判定一向量(组)能否由另一向量组线性表出	(287)
题型一	判定分量已知的分量能否由向量组线性表出	(287)
题型二	判定一抽象向量能否由向量组线性表出	(289)
题型三	判定一向量组可否由另一向量组线性表出	(290)
2.3.3	向量组的秩与其极大无关组的求(证)法	(291)
题型一	求分量给出的向量组的秩及其极大无关组	(291)
题型二	将向量用极大无关组线性表出	(292)
题型三	证一向量组为极大无关组	(293)
2.3.4	两向量组等价的常用证法	(294)
2.3.5	两向量组秩的关系的常用证法	(296)
2.3.6	将线性无关向量组正交规范化	(299)
习题 2.3		(300)
2.4	线性方程组	(302)
2.4.1	判定线性方程组解的情况	(302)
题型一	齐次线性方程组解的判定	(302)
题型二	非齐次线性方程组解的判定	(303)
2.4.2	由其解反求方程组或其参数	(306)
题型一	已知 $AX=0$ 的解的情况,求 A 中参数	(306)
题型二	已知 $AX=b$ 的解的情况,求方程组中参数	(307)
题型三	已知一基础解系,反求其齐次线性方程组	(307)
2.4.3	证明一组向量为基础解系的常用方法	(308)
2.4.4	基础解系和特解的求法	(309)
2.4.5	求解含参数的线性方程组	(312)
题型一	求解方程个数与未知数个数相等的含参数的方程组	(312)
题型二	求解方程个数与未知数个数不等的含参数的方程组	(316)
题型三	求解参数仅出现在常数项的方程组	(316)
题型四	求通解满足一定条件的含参数的方程组	(317)
2.4.6	求抽象线性方程组的通解	(318)

题型一	A 没有具体给出,求 $AX=0$ 的通解	(318)
题型二	已知 $AX=b$ 的特解,求其通解	(319)
题型三	已知 A 的列向量的线性关系式,求 $AX=b$ 的通解	(321)
2.4.7	求(证明)两线性方程的(有)非零公共解	(322)
题型一	已知两线性方程组,求其公共解	(322)
题型二	已知两线性方程组的通解,求其非零公共解	(323)
题型三	已知一方程组的通解及另一方方程组,求其非零公共解	(324)
题型四	证明两齐次线性方程组有非零公共解	(325)
题型五	求解与两线性方程组同解的有关问题	(325)
习题 2.4		(326)
2.5	矩阵的特征值、特征向量	(329)
2.5.1	求矩阵的特征值、特征向量	(329)
题型一	求元素已给出的矩阵的特征值、特征向量	(329)
题型二	求抽象矩阵的特征值、特征向量	(333)
2.5.2	由特征值和(或)特征向量反求其矩阵	(335)
题型一	由特征值和(或)特征向量求矩阵的待定常数	(335)
题型二	已知特征值、特征向量反求其矩阵	(337)
2.5.3	已知一矩阵的特征值、特征向量,求相关矩阵的特征值、特征向量	(338)
2.5.4	判别矩阵能否相似对角化	(339)
题型一	判别元素给定的矩阵能否对角化	(339)
题型二	判别抽象矩阵能否对角化	(341)
2.5.5	相似矩阵性质的简单应用	(342)
题型一	判定两矩阵是否相似	(342)
题型二	计算相似矩阵的特征值	(342)
题型三	计算相似矩阵的行列式	(343)
题型四	求相似矩阵的秩	(343)
题型五	确定相似矩阵中的参数	(343)
2.5.6	将矩阵化为相似对角矩阵的计算	(343)
题型一	求方阵 A 中待定常数及可逆阵 P ,使 $P^{-1}AP=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$	(343)
题型二	求对称阵 A 中待定常数及正交阵 Q ,使 $Q^{-1}AQ=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$	(345)
习题 2.5		(347)
2.6	二次型	(350)
2.6.1	求二次型的矩阵表示及其秩	(350)
题型一	将二次型写成矩阵形式并求出其矩阵	(350)
题型二	求二次型的秩	(351)
2.6.2	化二次型为标准形或规范形	(352)
题型一	化二次型为标准形或规范形	(353)
题型二	已知标准形,反求该二次型及所用的坐标变换	(355)
2.6.3	求二次型中的参数	(356)
题型一	已知二次型和其标准形,求其参数	(356)
题型二	求正定二次型中的参数或所满足的条件	(357)
2.6.4	判别或证明二次型(实对称矩阵)的正定性	(358)
题型一	判别或证明二次型的正定性	(358)
题型二	证明抽象实对称矩阵的正定性	(359)
2.6.5	证明(判别)两矩阵合同	(363)
习题 2.6		(366)

第3篇 概 率 论

3.1 随机事件和概率	(368)
3.1.1 随机事件间的关系及运算	(368)
题型一 用式子表示事件关系及其运算	(368)
题型二 利用事件运算的性质或图示法简化事件算式	(369)
题型三 求满足一定条件的事件关系	(370)
3.1.2 直接计算随机事件的概率	(370)
题型一 计算古典型概率	(370)
题型二 计算几何型概率	(372)
题型三 计算贝努利概型中事件的概率	(374)
3.1.3 间接计算随机事件的概率	(376)
题型一 计算和事件的概率	(376)
题型二 计算差事件的概率	(377)
题型三 计算积事件的概率	(377)
题型四 求与包含关系有关的事件的概率	(378)
题型五 求与条件概率有关的事件的概率	(378)
题型六 求与他事件有关的单个事件的概率	(379)
题型七 判别或证明事件概率不等式	(379)
3.1.4 几个计算概率公式的实际应用	(380)
题型一 用加法公式求解实际问题	(380)
题型二 用条件概率与乘法公式求解实际问题	(381)
题型三 用全概率公式和贝叶斯公式求解实际问题	(381)
题型四 利用抽签原理计算事件概率	(385)
3.1.5 事件独立性的判别方法	(386)
习题 3.1	(389)
3.2 一维随机变量及其分布	(391)
3.2.1 分布列、概率密度及分布函数性质的应用	(391)
题型一 判别分布列、概率密度及分布函数	(392)
题型二 确定与分布有关的待定常数	(393)
3.2.2 求分布列(概率分布)、概率密度及分布函数	(395)
题型一 求概率分布(分布律)及分布函数	(395)
题型二 求连续型随机变量的分布函数	(397)
题型三 求概率密度	(399)
3.2.3 利用常用分布计算事件的概率	(399)
题型一 利用二项分布计算贝努利概型中事件的概率	(399)
题型二 利用超几何分布计算事件的概率	(400)
题型三 利用泊松分布计算事件的概率	(401)
题型四 利用均匀分布计算事件的概率	(402)
题型五 利用指数分布计算事件的概率	(402)
题型六 利用正态分布计算事件的概率	(404)
3.2.4 求随机变量函数的分布	(407)
题型一 求离散型随机变量函数的概率分布	(407)
题型二 求连续型随机变量函数的分布	(408)
题型三 讨论随机变量函数分布的性质	(413)
习题 3.2	(415)
3.3 二维随机变量的联合概率分布	(417)
3.3.1 求二维随机变量的分布	(417)
题型一 求二维离散型随机变量的联合概率分布(联合分布律)	(417)
题型二 求二维随机变量的边缘分布	(420)

题型三	由联合分布求边缘分布、条件分布	(422)
题型四	由边缘分布及条件分布,求联合分布	(425)
题型五	已知分区域定义的联合密度,求其分布函数	(427)
3.3.2	随机变量的独立性	(427)
题型一	判别两离散型随机变量的独立性	(427)
题型二	判别两连续型随机变量的独立性	(428)
题型三	利用独立性确定联合分布中的待定常数	(432)
3.3.3	计算二维随机变量取值的概率	(433)
题型一	计算两离散型随机变量运算后取值的概率	(433)
题型二	求二维连续型随机变量落入平面区域内的概率	(435)
题型三	求与 $\max(X,Y)$ 或 (和) $\min(X,Y)$ 有关的概率	(436)
题型四	求系数为随机变量的二次方程有根、无根的概率	(437)
3.3.4	二维随机变量函数的分布	(439)
题型一	已知 (X,Y) 的联合分布律,求 $Z=g(X,Y)$ 的分布律	(439)
题型二	已知 (X,Y) 的概率密度,求其分量和、差、积、商的分布	(441)
题型三	已知 X,Y 的分布,求 $\max(X,Y)$ 与 $\min(X,Y)$ 的分布	(445)
习题 3.3		(446)
3.4	随机变量的数字特征	(449)
3.4.1	求一维随机变量的数字特征	(449)
题型一	求随机变量的数学期望与方差	(449)
题型二	求随机变量函数的数学期望与方差	(453)
题型三	计算随机变量的矩	(456)
3.4.2	求二维随机变量的数字特征	(457)
题型一	已知 (X,Y) 的联合密度(或联合分布律),求 $E(X),E(Y),D(X),D(Y)$	(457)
题型二	求 (X,Y) 的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望和方差	(460)
题型三	计算协方差和相关系数	(463)
3.4.3	计算两类分布的数字特征	(467)
题型一	计算正态分布的数字特征	(467)
题型二	计算 $Z=\max(X,Y)$ 或 (和) $W=\min(X,Y)$ 的数字特征	(469)
3.4.4	讨论随机变量相关性与独立性的关系	(471)
题型一	确定两随机变量相关与不相关	(471)
题型二	讨论相关性与独立性的关系	(472)
3.4.5	已知数字特征,求分布中的待定常数	(474)
3.4.6	求解实际应用题和综合应用题	(475)
题型一	求解涉及随机变量分布、期望和方差的实际应用题	(475)
题型二	求解与概率论及其他数学分支有关的综合应用题	(477)
习题 3.4		(480)
3.5	中心极限定理	(483)
3.5.1	用切比雪夫不等式估计事件的概率	(483)
3.5.2	大数定律成立的条件和结论	(485)
题型一	利用三个大数定律之条件、结论解题	(487)
题型二	求随机变量序列依概率的收敛值	(488)
3.5.3	两个中心极限定理的简单应用	(489)
题型一	利用棣莫弗-拉普拉斯定理近似计算事件的概率	(489)
题型二	已知随机变量取值的概率,估计取值范围	(490)
题型三	应用列维-林德伯格中心极限定理之条件、结论解题	(491)
题型四	近似计算 n 个随机变量之和取值的概率	(492)
题型五	已知 n 个随机变量之和取值的概率,求个数 n	(492)
习题 3.5		(493)
习题答案与提示		(495)

第1篇 微 积 分

1.1 函 数

1.1.1 求几类函数的表达式

题型一 已知函数求其反函数的表达式

求反函数的方法是在原函数 $y=f(x)$ 中解出 x , 再交换 x 与 y 的位置即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$, 同时得到 f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.

如 $y=f(x)$ 为分段函数, 且在各分段区间上都是单调函数, 则分别求出各分段区间上的反函数就得到该分段函数的反函数, 且 $f(x)$ 的每段的值域就是其反函数的定义域.

例 1[1996 年 2]^① 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1-2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x-16, & x > 2. \end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的反函数的表达式.

解 (1) 当 $x < -1$ 时, $y=1-2x^2 < -1$, 在 $y=1-2x^2$ 中解出 x , 得到 $x=-\sqrt{(1-y)/2}$, 交换 x 与 y 的位置得到反函数为 $y=-\sqrt{(1-x)/2}, x < -1$.

(2) 当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $-1 \leq y \leq 8$. 在 $y=x^3$ 中解出 x , 得到 $x=\sqrt[3]{y}$, 交换 x 与 y 的位置得到反函数为 $y=\sqrt[3]{x}, -1 \leq x \leq 8$.

(3) 当 $x > 2$ 时, $y=12x-16 > 8$, 在 $y=12x-16$ 中解出 x , 得到 $x=(y+16)/12$, 交换 x 与 y 的位置得到反函数为 $y=(x+16)/12, x > 8$.

综上得到 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式为

$$g(x)=f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{(1-x)/2}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ (x+16)/12, & x > 8. \end{cases}$$

题型二 求分段函数的复合函数

常用代入法或分段代入法求之.

类型(一) 求内、外层函数只有一个是分段函数的复合函数.

^① 例 1[1996 年 2]表示例 1 是 1996 年数学二的考题. 在数学四的往年试题中没有出现过求反函数的题型. 而如今它也是数学四的考点, 比较重要, 在此特将数学二的这道试题选作例题. 下同.

$$\text{例 2 设 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} g(x) = e^x, \text{ 求 } f[g(x)], g[f(x)].$$

解 将 $f(x)$ 中及其定义域中的 x 一律用 $g(x)$ 代替得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |g(x)| < 1, & \text{解 } |g(x)| < 1 \text{ 即解 } e^x < 1 \text{ 得到 } x < 0; \\ 0, & |g(x)| = 1, & \text{解 } |g(x)| = 1 \text{ 即解 } e^x = 1 \text{ 得到 } x = 0; \\ -1, & |g(x)| > 1. & \text{解 } |g(x)| > 1 \text{ 即解 } e^x > 1 \text{ 得到 } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{故得到 } f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

下面求 $g[f(x)]$. 同样将 $g(x)$ 中及其定义域中的 x 一律用 $f(x)$ 替代得到 $g[f(x)] = e^{f(x)}$, 而

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \text{ 故 } g[f(x)] = \begin{cases} e^1, & |x| < 1, \\ e^0, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1, \end{cases} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

类型(二) 求内、外层函数都是分段函数的复合函数.

设 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq \varphi_1(x), \\ f_2(x), & x > \varphi_2(x); \end{cases} g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \leq \psi_1(x), \\ g_2(x), & x > \psi_2(x). \end{cases}$ 为求 $f[g(x)]$, 先将 $g(x)$ 代入 $f(x)$

表达式中的所有 x , 得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} f_1[g(x)], & g(x) \leq \varphi_1[g(x)], \\ f_2[g(x)], & g(x) > \varphi_2[g(x)]. \end{cases} \quad \text{①}$$

再将 $g(x)$ 的分段表达式 $g_1(x)$ 分别代入式①、式②中右端的 $g(x)$, 并将所得不等式与 $g_1(x)$ 的自变量的变化范围 $x \leq \varphi_1(x)$ 求交. 对 $g(x)$ 的另一分段表达式 $g_2(x)$ 也同样处理, 于是得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} f_1[g_1(x)], & g_1(x) \leq \varphi_1[g_1(x)], & x \leq \psi_1(x), & \text{③} \\ f_2[g_1(x)], & g_1(x) > \varphi_2[g_1(x)], & x \leq \psi_1(x), & \text{④} \\ f_1[g_2(x)], & g_2(x) \leq \varphi_1[g_2(x)], & x > \psi_2(x), & \text{⑤} \\ f_2[g_2(x)], & g_2(x) > \varphi_2[g_2(x)], & x > \psi_2(x). & \text{⑥} \end{cases}$$

分别求解式③、式④、式⑤、式⑥中的不等式组(其中有些不等式组可能无解), 即得复合函数 $f[g(x)]$ 各段自变量的取值范围.

$$\text{例 3 设 } f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1, \\ x, & x \geq 1; \end{cases} g(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2-1, & x \geq 0. \end{cases} \text{ 求 } f[g(x)].$$

解 先将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 及其定义域表达式中的 x , 得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} e^{g(x)}, & g(x) < 1, \\ g(x), & g(x) \geq 1. \end{cases} \quad \text{①}$$

再将 $g(x)$ 的分段表达式分别代入式①与式②右端的 $g(x)$, 并将所得的不等式与 $g(x)$ 相应段上自变量的取值范围求交, 得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} e^{x+1}, & x+1 < 1, & x < 0, & \text{③} \\ x+1, & x+1 \geq 1, & x < 0, & \text{④} \\ e^{x^2-1}, & x^2-1 < 1, & x \geq 0, & \text{⑤} \\ x^2-1, & x^2-1 \geq 1, & x \geq 0. & \text{⑥} \end{cases}$$

显然式④中不等式组无解, 式③、式⑤、式⑥中不等式组的解分别为 $x < 0$; $0 \leq x < \sqrt{2}$; $x \geq \sqrt{2}$.

因而

$$f[g(x)] = \begin{cases} e^{x+1}, & x < 0, \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2}, \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2}. \end{cases} \quad (7)$$

题型三 利用函数概念求两类函数表达式

设 $f[\varphi(x)] = \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 为已知函数. 常利用函数概念, 求解两类函数的表达式: 一是已知 f 求函数(中间变量) φ 的表达式, 二是已知 φ 求 f 的表达式.

类型(一) 已知 $f[\varphi(x)] = \psi(x)$ 和 $f(x)$, 求 $\varphi(x)$ 的表达式.

因 f 已知, 如存在反函数, 则 $\varphi(x) = f^{-1}[\psi(x)]$.

例 4 [1992 年 4] 已知 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 的定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 按照复合函数的定义, 从 $f(x)$ 的表达式可得复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的一般形式: $f[\varphi(x)] = \sin \varphi(x)$. 将它与题设的 $f[\varphi(x)]$ 的表达式比较即得 $\sin[\varphi(x)] = f[\varphi(x)] = 1 - x^2$.

因正弦函数存在反函数, 故得到 $\varphi(x)$ 的表达式: $\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$. 其定义域为 $D = \{x \mid |1 - x^2| \leq 1\} = \{x \mid 0 \leq x^2 \leq 2\} = \{x \mid |x| \leq \sqrt{2}\}$, 即 $\varphi(x)$ 的定义域为闭区间 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

类型(二) 已知 $f[\varphi(x)] = \psi(x)$ 和 $\varphi(x)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

若 $\varphi(x)$ 存在反函数, 常令 $t = \varphi(x)$, 则 $x = \varphi^{-1}(t)$, 从而 $f(t) = \psi[\varphi^{-1}(t)]$.

例 5 已知 $f(x + 1/x) = x^2 + 1/x^2$, 求 $f(x)$.

解 令 $t = x + 1/x$, 由 $x^2 + 1/x^2 = (x + 1/x)^2 - 2$ 即得 $f(t) = t^2 - 2$, 即 $f(x) = x^2 - 2$.

1.1.2 判别(证明)几类函数的奇偶性

题型一 判别经四则运算后的函数的奇偶性

命题 1.1.2.1 (1) 奇函数乘(除)偶函数 = 奇函数; (2) 奇函数乘(除)奇函数 = 偶函数; (3) 偶函数乘(除)偶函数 = 偶函数; (4) 奇函数加(减)奇函数 = 奇函数; (5) 偶函数加(减)偶函数 = 偶函数; (6) 不恒为零的偶函数(奇函数)加(减)不恒为零的奇函数(偶函数)为非奇非偶函数; (7) 偶(奇)函数乘以非奇非偶函数, 一般不再是偶(奇)函数.

例 1 [1987 年 2] $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是() 函数.

(A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

解 显然 $|x \sin x|$ 为偶函数, $e^{\cos x}$ 也为偶函数, 由命题 1.1.2.1 知其乘积 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 亦为偶函数. 仅(D)入选.

题型二 判别自变量带相反符号的两同名函数的代数之和的奇偶性

命题 1.1.2.2 设 $f(x)$ 为定义在 $[-a, a]$ (a 可以为无穷) 上非常数的任意函数, 则

(1) $f(x) + f(-x)$ 为偶函数; (2) $f(x) - f(-x)$ [或 $f(-x) - f(x)$] 为奇函数.

即自变量带相反符号且为非常数的两同名函数之和为偶函数, 之差为奇函数.

例 2 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非常数的任意函数, 试判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) + f(-x) + g(x) + g(-x)$; (2) $f(x) - f(-x) + g(x) + g(-x)$;

(3) $f(x) - f(-x) - g(x) + g(-x)$; (4) $f(x) + f(-x) - g(x) - g(-x)$.

解 (1) 因 $f(x) + f(-x)$, $g(x) + g(-x)$ 均为偶函数, 其和必为偶函数.

(2) 因 $f(x) - f(-x)$ 为奇函数, $g(x) + g(-x)$ 为偶函数, 其和为非奇非偶函数.

(3) 因 $f(x) - f(-x)$, $g(x) - g(-x)$ 均为奇函数, 其差为奇函数.