21世纪高职高专规划教材

应用高等数学（上册）

Yingyong Gaodeng Shuxue

首南祺 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

21 世纪高职高专规划教材

应用高等数学

（上　册）

主编　首南祺

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学．上册/首南祺主编．—北京：北京理工大学出版社，2007.9

ISBN 978-7-5640-1109-3

Ⅰ．应…　Ⅱ．首…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 148403 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)、68911084(读者服务部)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本／787 毫米×960 毫米　1/16
印　　张／15
字　　数／300 千字
版　　次／2007 年 9 月第 1 版　　2007 年 9 月第 1 次印刷
印　　数／1~5000 册　　　　　　　　责任校对／张　宏
定　　价／21.00 元　　　　　　　　　责任印制／吴皓云

前　言

数学的思想和方法广泛应用于工程技术、社会经济等领域，数学教育是高职高专教育中不可或缺的一部分. 数学教材建设是搞好高职高专数学教育的重要环节之一.

本套《应用高等数学》教材，根据教育部高教司关于高职高专高等数学的基本要求，贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，本着课程改革的目的，结合多年的教学实践，在以下几方面作了有益的尝试.

1. 引进了模块式教育理论. 在上册主要编入了一元函数微积分的内容，中册主要编入了多元函数微积分的内容，下册编入了线性代数、概率论与数理统计、积分变换等内容. 这样既满足不同专业对数学基本内容的不同要求，同时也满足不同学生对数学知识不同层次的需求；既满足了必修课开设的要求，又满足数学类公选课用书的要求. 这样，既便于教师教，也便于学生学.

2. 在内容编排上注意与初等数学的衔接性和高等数学前后知识的连贯性，结合学生的特点，注重从特殊到一般，从具体到抽象的认知规律，由浅到深，分散难点，突出重点.

3. 注重基本概念的引入，淡化定理的证明，简化数学的计算，强调知识的应用性. 部分定理采用几何直观的方法来解释和介绍，部分定理虽有证明，其目的是强调证明中的思路和方法，为学生解决实际问题提供方法上的指导. 同时选择了部分应用性较强的例题和习题，以提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力.

4. 适当编入了与数学知识和内容相关的背景知识，目的是加深学生对数学思想和方法的理解，激发学生学习数学的兴趣，达到教书育人的目的.

上册由首南祺主编，参与编写的有冯丽萍、冯喜全、陈丽平老师；中册由程贤锋主编，参与编写的有陈嫄、饶三平、邸振老师；下册由易敏主编，参与编写的有吕凤虎、张胜虎、凌和良、栾辉老师. 在全书的编写过程中，得到了南昌工程学院理学系主任陆伟锋博士、高等数学教研室主任龚建华副教授、楼天容教授、金本清副教授、胡平波博士等人的大力支持和热心指导，在此对他们表示深深的感谢！

由于水平有限，书中错误或不当之处在所难免，敬请读者不吝指正.

编　者

目　　录

第一章

函数、极限与连续

初等数学的主要研究对象是常量，而高等数学则以变量为其主要研究对象. 变量之间的依赖关系即为函数关系，函数在自然科学、工程技术以及经济、社会科学等领域中有着非常广泛的应用，而极限方法则是研究变量的一种最基本的方法. 本章着重介绍函数、极限与函数的连续性等高等数学中最基本的概念以及它们的一些基本性质.

第一节 函 数

一、集合

（一）集合

集合是数学中一个不加定义的基本概念，它是指某些指定的对象的总体. 例如，全体实数构成一个集合，一个班级的全体学生构成一个集合等. 习惯上用大写英文字母 $A, B, C\cdots$ 表示集合.

集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 集合的元素常用小写英文字母 $a, b, c\cdots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就称 a 属于 A，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a \notin A$.

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法.

列举法是把集合中的元素一一列举出来的方法. 由有限个元素组成的集合，可用列举其全体元素的方法来表示. 例如，由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A，可记作 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

描述法是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法，其中"确定的条件"指对象属于集合的充要条件，即适合该条件的任何对象都是集合的元素；反之，集合的任何元素都适合该条件. 由无穷多个元素组成的集合，通常用描述法表示. 设 M 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，就记作 $M=\{x \mid x \text{所具有的特征}\}$.

含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集.

本书中用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 下面是一些常用的数集及其记法：全体自然数集记作 $\mathbf{N}$，全体整数集记作 $\mathbf{Z}$，全体有理数集记作 $\mathbf{Q}$，全体实数集记作 $\mathbf{R}$.

在集合之间，存在着“包含”与“相等”的关系. 对于两个集合 A 与 B，若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，就称集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$(或$B\supseteq A$)，这时也称集合 A 是集合 B 的子集. 例如，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$.

若 $A\subseteq B$且$B\subseteq A$，就称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

不含任何元素的集合称为空集.

（二）区间

区间是用得较多的一类数集.

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，则数集 $\{x\mid a<x<b\}$，称为开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$，其中 a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，此时，$a\notin(a,b)$ 且 $b\notin(a,b)$; 数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，其中 a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，此时，$a\in[a,b]$ 且 $b\in[a,b]$.

类似地，可定义 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$，$[a,b)$和$(a,b]$ 都称为半开区间.

上述这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是一些长度有限的线段. 此外，还有无限区间：引入记号 $+\infty$（读作正无穷大）及引出记号 $-\infty$（读作负无穷大），则区间 $[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$，$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$，$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$ 均为无限区间，这些无限区间在数轴上是一些长度为无限的射线或整个数轴.

（三）邻域

邻域也是一类常用的数集.

设 $a\in\mathbf{R}$，任意实数 $\delta>0$，则数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$，即 $(a-\delta,a+\delta)$，称为点 a 的一个 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$，其中点 a 称为此邻域的中心，δ 称为此邻域的半径. 从数轴上看，$U(a,\delta)$表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体. 在不要求说明邻域半径的情况下，邻域也可简记为 $U(a)$.

另外，数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$ 称为点 a 的 δ 去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$. 这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$. 从数轴上看，$\mathring{U}(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 且不等于点 a 的一切点 x 的全体. 在不要求说明邻域半径的情况下，去心邻域也可简记为 $\mathring{U}(a)$.

二、常量与变量

在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，会遇到很多的量，这些量一般可分为两种：一种是在考察的过程中保持不变的量，这种量称为**常量**；另一种是在考察的过程中会起变化

的量，称为**变量**. 例如，自由落体的下降时间和下降距离是变量，而质量在这一过程中可以看为常量.

一个量是常量还是变量，是依条件变化而变化的，并不是绝对的. 例如，重力加速度就小范围地区来说是常量，但就大范围地区来说则是变量.

通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量，用字母 $x,y,z,\cdots$ 表示变量.

三、函数概念

（一）函数的定义

在同一现象中所碰到的各种变量，通常并不是独立变化的，它们之间存在着依赖关系. 下面考察几个具体例子.

例 1 正方形的面积 S 与它的边长 a 之间存在着依赖关系：$S=a^2$. 当边长 a 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以唯一确定正方形面积 S 的相应数值.

例 2 在自由落体运动中，设物体的下落时间为 t，下落距离为 h，若取开始下落的时刻 $t=0$，则 h 与 t 之间存在着依赖关系 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$，其中 g 为重力加速度. 设物体到达地面的时刻为 $t=T$，则当 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可确定下落距离 h 的相应数值.

例 3 在中学的数学课程中，已经学过许多简单的函数，例如，直线函数 $y=ax+b$，$x\in\mathbf{R}$（其中 a,b 都是常数），又如三角函数 $y=2\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，对数函数 $y=\lg(1+x)$，$x\in(-1,+\infty)$ 等.

在以上依赖关系中，可以看到一些共同特征：都有一个数集和一个对应法则；对于数集中任意数值，按照对应法则都对应 $\mathbf{R}$ 中唯一一个数值. 把这种特征抽象出来，就得到**函数**的概念.

定义 设 A 是非空数集，若存在对应法则 f，使得对于 A 中任意数 x，按照对应法则 f，都有唯一一个 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 A 上的函数，表示为 $f:A\to\mathbf{R}, x\to f(x)$，数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值，记作 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量. 数集 A 称为函数 f 的定义域，函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数 f 的值域.

为了表述方便，本书约定在不引起混淆的情况下，用 $y=f(x),\ x\in A$ 表示函数 f. 当不需要指明函数 f 的定义域时，又可简写为 $y=f(x)$.

关于函数概念的几点说明:

（1）根据函数的定义，每个函数都存在定义域. 对于一个函数，在没有明确指出其定义域时，就认为函数的定义域是使得此函数有意义的实数 x 的集合. 例如，函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在没有指明定义域的情况下，其定义域就是使得函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合，即

$[-1,1]$.

对于具有实际意义的函数，它的定义域要受实际意义的约束．例如，在上述例 1 中，从函数本身来看，自变量可以取任意实数，但是由于正方形的边长不能取负值，所以其定义域是 $(0,+\infty)$.

（2）在上述函数定义中指出："对于 A 中任意数 x，按照对应法则 f，都有唯一一个 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应"，这样的对应称为单值对应．函数 f 称为单值函数，本书将着重讨论.

（3）函数的值域是由相应的函数值的全体所组成的集合，并不一定就是 $\mathbf{R}$.

下面举几个函数的例子.

例 4 函数 $y=c$（其中 c 常数），其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{c\}$.

例 5 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

例 6 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，这个函数称为绝对值函数.

例 7 对于任意实数 x，对应的 y 是不超过 x 的最大整数．显然，对于任意实数 $x\in\mathbf{R}$，都有唯一一个 y 与之对应．这是一个函数，记作 $y=[x]$，称为取整函数，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{Z}$．例如，$[2.5]=2,[3]=3,[0]=0,[-3.1]=-4$.

例 8 函数 $y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$.

在例 7 和例 8 中发现，有时一个函数要用几个式子来表示．这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子表示的函数通常称为**分段函数**.

（二）函数的四种特性

1. 函数的单调性

定义 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义．若对于 A 中任意 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)(f(x_1)\geqslant f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 A 单调增加（单调减少）；若上述不等式改为 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 A 严格增加（严格减少）.

函数 $f(x)$ 在 A 单调增加、单调减少与严格增加、严格减少，统称为函数 $f(x)$ 在 A 单调．若 A 是区间，则此区间称为函数 $f(x)$ 的单调区间.

在不要求明确指出是否严格单调的情况下，约定把单调增加、严格增加统称为单调增加，把单调减少、严格减少统称为单调减少.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-\infty,0]$ 上单调减少；函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 单调增加.

2. 函数的奇偶性

定义 设函数 $f(x)$ 定义在数集 A. 若对于任意 $x\in A$，有 $-x\in A$，且 $f(-x)=-f(x)(f(-x)=f(x))$，则称函数 $f(x)$ 是奇函数（偶函数）.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在其定义域中的任何对称区间上都是奇函数，则函数 $f(x)=\cos x$ 在其定义域中的任何对称区间上都是偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

3. 函数的有界性

定义 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义. 若存在实数 M，使得对于任意 $x\in A$，都有 $f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant M)$，则称函数 $f(x)$ 在 A 内有上界（下界），而 M 称为函数 $f(x)$ 在 A 内的一个上界（下界）.

若存在实数 M，使得对于任意 $x\in A$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，即函数 $f(x)$ 在数集 A 上既有上界又有下界，则称函数 $f(x)$ 在 A 内有界；若这样的实数 M 不存在，即对于任意实数 M，总存在 $x_0\in A$，使得 $|f(x_0)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 A 内无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，数“1”是它的一个上界，数“-1”是它的一个下界；而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内没有上界，只有下界，所以它在 $(0,1)$ 内无界.

4. 函数的周期性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域为数集 A. 若存在 $T>0$，使得对于任意 $x\in A$，有 $x\pm T\in A$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是周期函数，T 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

若 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期，则 $2T$ 也是它的周期，这是因为 $f(x+2T)=f(x+T+T)=f(x+T)=f(x)=f(x-T)=f(x-T-T)=f(x-2T)$. 用数学归纳法可证明：若 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z}^+)$ 也是它的周期. 若函数 $f(x)$ 有最小正周期，通常将最小正周期称为函数的周期.

例如，函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$、$\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

但并不是每个周期函数都有最小正周期. 例如，常数函数 $f(x)=1$，对于任意 $T\in\mathbf{R}$且$T>0$，都有 $f(x\pm T)=1=f(x)$，所以任意正实数均为 $f(x)=1$ 的周期，它没有最小正周期.

（三）反函数

定义 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义. 若对于任意 $x_1,x_2\in A$，有 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，则称函数在 A 上是单射.

定义 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义. 若 $f(x)$ 在 A 上是单射，则对于任意 $y\in f(A)$，其中 $f(A)=\{f(x)|x\in A\}$，都存在唯一一个 $x\in A$，使得 $f(x)=y$，这就建立了一个由 $f(A)$ 到 A 的新的对应关系，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(A)$.

关于反函数有以下说明：

（1）由反函数的定义可以看出，并不是每个函数都有反函数，只有单射的函数才有反函数.

（2）一般来说，函数在其定义域内不一定存在反函数. 但是，将函数限定在定义域的某个子集内，就可能存在反函数. 例如，三角函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $\mathbf{R}$ 内不存在反函数，但是，在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内存在反函数 $x=\arcsin y$.

（3）由反函数的定义可以看出，反函数的定义域恰好是原函数的值域，反函数的值域恰好是原函数的定义域.

（4）习惯上，把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记作 $y=f^{-1}(x)$.

（5）在平面直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是相同的. 但是，当将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 表示为 $y=f^{-1}(x)$ 时，在同一个平面直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像就不同了，它们关于直线 $y=x$ 对称.

思考题

1. 设函数 $f(x),g(x)$ 有相同的定义域，证明：

（1）若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是偶（奇）函数，则 $f(x)+g(x)$ 是偶（奇）函数.

（2）若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是偶（奇）函数，则 $f(x)g(x)$ 是偶函数.

（3）若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一个是偶函数，另一个是奇函数，则 $f(x)g(x)$ 是奇函数.

2. 证明：定义在对称区间上的任意函数，可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

（提示：令 $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$）

3. 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在数集 A 有界，则函数 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$ 在数集 A 也有界.

习题1-1

1. 设 $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$，求下列函数值：$f(0),f(1),f(-x+1)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}3x & |x|>1\\ x^2 & |x|<1\\ 2 & |x|=1\end{cases}$，求 $f(0),f(1),f(-2)$.

3. 指出下列函数中哪些是相同的函数.

(1) $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$　　(2) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=x+1, g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$　　(4) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$

(5) $f(x)=\lg x^3, g(x)=3\lg x$

4. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}-\sqrt{x+3}$　　(2) $y=\arcsin(x-3)$

(3) $y=\sqrt{5-x}+\ln(x-1)$　　(4) $y=\begin{cases}1+x & -1\leqslant x<0\\ 0 & x=0\\ 1-x & 0<x\leqslant 1\end{cases}$

5. 判断下列函数的单调性.

(1) $y=2x^2+1$　　(2) $y=3^{-x}$

(3) $y=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ 2-|x| & |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

6. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x|x|$　　(2) $y=x^3\sin\dfrac{1}{x}$　　(3) $y=x^2\cos x$

(4) $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$　　(5) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$　　(6) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

7. 判断下列函数在它们各自的定义域内是否有界.

(1) $y=\dfrac{1}{x}$　　(2) $y=\arctan x$

(3) $y=\ln(1+x)$　　(4) $y=x^2$

8. 判断下列函数是否为周期函数，如果是周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(px+q)$（其中 p,q 为常数，且 $p\neq 0$）

(2) $y=\sin 3x+\tan\dfrac{x}{2}$　　(3) $y=\sin\dfrac{x}{2}+1$

(4) $y=\sin^2 x$　　(5) $y=x\cos x$

9. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-1$　　(2) $y=10^{x+1}$　　(3) $y=\sqrt[3]{x+1}$

第二节　初等函数

一、基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数这六类函数统称为基本初等函数.

（一）常数函数

函数 $y=c$ 或 $f(x)=c, x\in\mathbf{R}$，其中 c 是常数，称为**常数函数**. 它的图像是通过点 $(0,c)$，且平行于 x 轴的直线（如图 1–1 所示）.

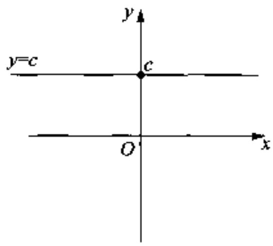

图 1–1

常数函数是有界函数、周期函数（没有最小正周期）. 常数函数在其定义域中的任何对称区间内是偶函数（特别地，当 $c=0$ 时，它还是奇函数）. 常数函数既是单调增加函数又是单调减少函数.

（二）幂函数

函数 $y=x^{\mu}$，其中 μ 是常数，称为**幂函数.**

幂函数的定义域、性质和图像，要根据 μ 的值来确定. 例如，当 $\mu=2$ 时，$y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它是偶函数、无界函数，它在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $[0,+\infty)$ 内单调增加（如图 1–2 所示）；当 $\mu=3$ 时，$y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它是奇函数、单调增加函数、无界函数（如图 1–3 所示）.

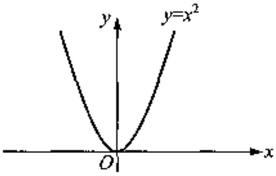

图 1–2

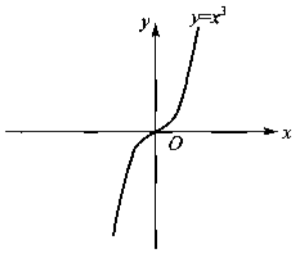

图 1–3

（三）指数函数

函数 $y=a^x$（a 是常数且 $a>0$，$a\neq 1$）称为**指数函数**，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是单调减少的.

指数函数的图像总在 x 轴的上方，且通过点 $(0,1)$（如图 1–4 所示）.

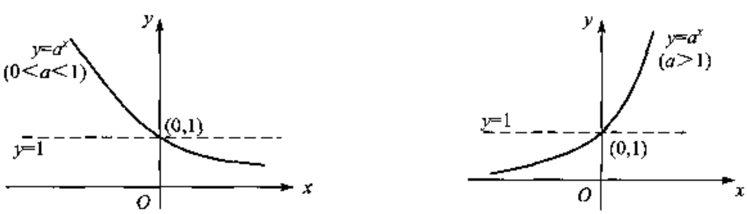

图 1–4

（四）对数函数

指数函数的反函数，记作 $y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0, a\neq 1$）称为**对数函数**，它的定义域是 $(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调减少的.

对数函数的图像与它所对应的指数函数的图像关于直线 $y=x$ 对称. 对数函数的图像总在 y 轴的右方，且通过点 $(1,0)$（如图 1–5 所示）.

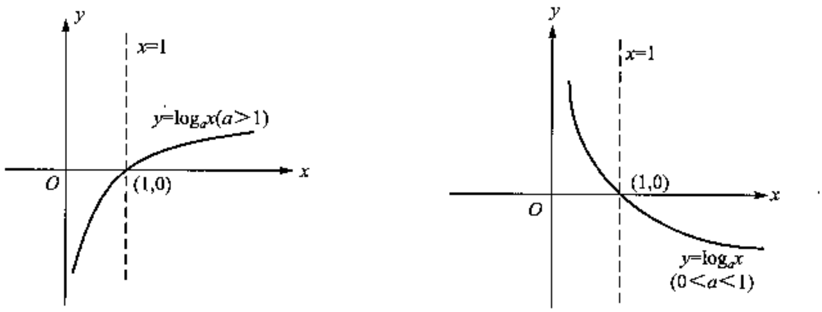

图 1–5

（五）三角函数

常用的三角函数有正弦函数 $y=\sin x$（如图 1–6 所示）、余弦函数 $y=\cos x$（如图 1–7）、正切函数 $y=\tan x$（如图 1–8）、余切函数 $y=\cot x$（如图 1–9），其中自变量以弧度作单位来表示.

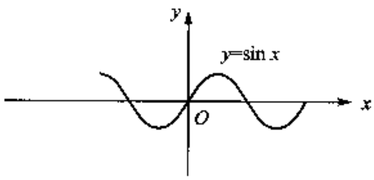

图 1–6

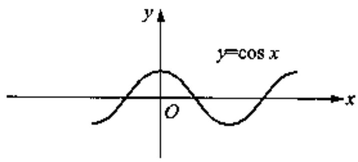

图 1–7

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，它是奇函数、有界函数，以 2π 为周期，在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 内单调减少.

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，它是偶函数、有界函数，以 2π 为周期，在 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 内单调增加，在 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 内单调减少.

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\mathbf{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$，它是奇函数、无界函数，以π为周

期，在$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加.

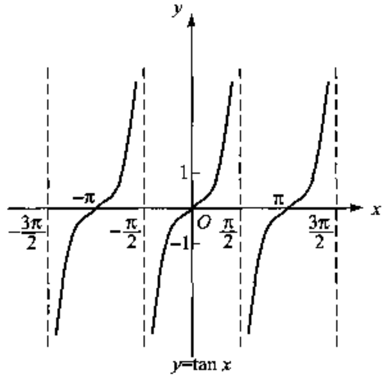

图 1-8

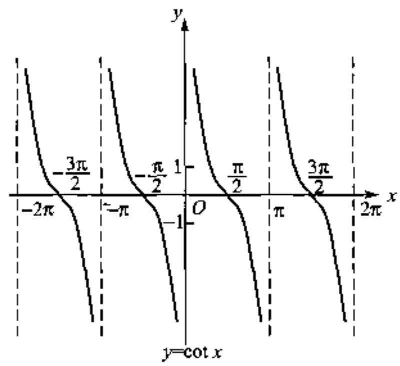

图 1-9

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\mathbf{R}-\{k\pi\}$，值域为 $\mathbf{R}$，它是奇函数、无界函数，以 π 为周期，在 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 内单调减少.

另外，还有两个三角函数，它们是正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，它们都是以 2π 为周期的周期函数.

（六）反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的反函数依次为反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$. 值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，它是奇函数、有界函数，在 $[-1,1]$ 内单调增加.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，它是有界函数，在 $[-1,1]$ 内单调减少.

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，它是奇函数、有界函数，在 $\mathbf{R}$ 内单调增加.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,\pi)$，它是有界函数，在 R 内单调减少.

二、复合函数

定义 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 A，且

$A\cap D_1\neq\varnothing$，那么对于任意 $x\in\{x\mid\varphi(x)\in A\cap D_1\}$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有唯一确定的 $u\in A\cap D_1$ 与之对应，由于 $A\cap D_1\neq\varnothing$，因此对于这个 u 值，通过函数 $y=f(u)$ 有唯一确定的 y 值与之对应. 这样，对于任意 $x\in\{x\mid\varphi(x)\in A\cap D_1\}$，通过 u 有唯一确定的 y 值与之对应，从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量.

例如，函数 $y=\ln(x-1)$ 可以看作是由 $y=\ln u$ 与 $u=x-1$ 复合而成的，函数 $y=2^{x^2}$ 可以看作是由 $y=2^u$ 与 $u=x^2$ 复合而成的.

关于复合函数有以下几点需要说明:

（1）并不是任何两个函数都能复合的，条件“$A\cap D_1\neq\varnothing$”非常重要. 例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 这是因为 $y=\arcsin u$ 的定义域 $D_1=[-1,1]$，而 $u=2+x^2$ 的值域 $A=[2,+\infty)$，$A\cap D_1=\varnothing$. 这样对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何 x 所对应的 u 值（都大于或等于 2），都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

（2）由两个函数所生成的复合函数的定义域，与原来的两个函数的定义域未必相同，需另外讨论. 例如，$y=\arcsin x^2$ 由 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2$ 复合而成，其中 $u=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，但是复合函数 $y=\arcsin x^2$ 的定义域为 $[-1,1]$.

（3）上面定义了由两个函数生成的复合函数，不难将复合函数的概念推广到有限个函数生成的复合函数情形. 例如，三个函数 $y=\sqrt{u},u=\ln v,v=2x+3$ 可生成复合函数 $y=\sqrt{\ln(2x+3)}$，$x\in[-1,+\infty)$，其中 u,v 为中间变量.

（4）不仅能够将若干个简单函数复合，还能反过来将复合函数分解为若干个简单函数. 例如，函数 $y=\sqrt{\lg\arcsin x}$ 可分解为 $y=\sqrt{u},u=\lg v,v=\arcsin x$. 分解的法则是“由外到内，逐层分解”.

三、初等函数

定义 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的，并可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\sqrt{2+x^3},\ y=\lg x-\sin x,\ y=x\sqrt{\cos\dfrac{x}{3}},\ y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 等都是初等函数.

本书中所讨论的函数主要是初等函数. 当然，非初等函数也是存在的，例如上一节例 7 中的取整函数和例 8 中的分段函数.

思考题

1. 判断函数 $y=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$，$y=\sqrt{x^2}$ 是否表示同一个函数. 若是表示同一个函数，此函数