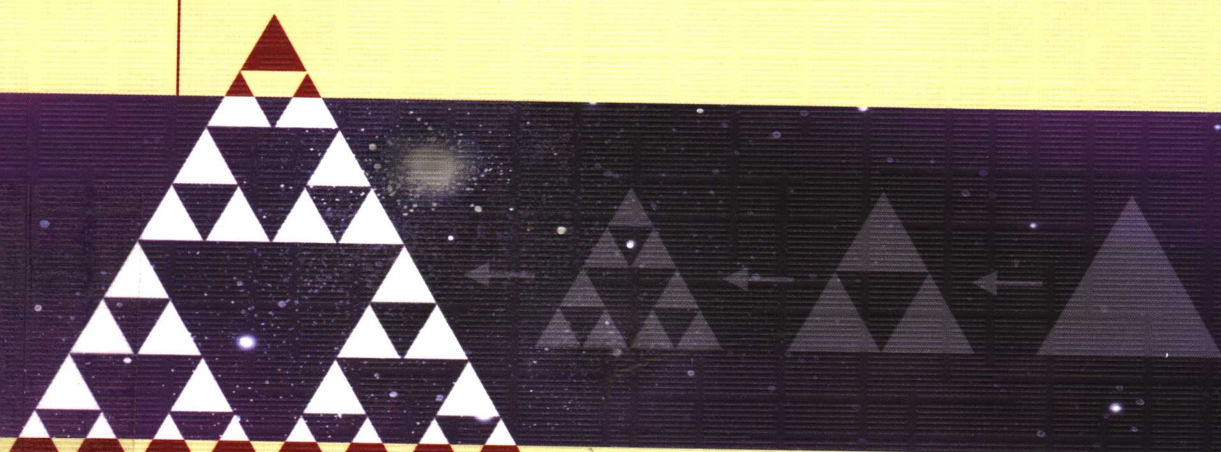
徐利治 编著

数学分析的方法及例题选讲

——分析学的思想、方法与技巧

Methods of Mathematical Analysis with Selective Examples

Ideas,Methods and Technics



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

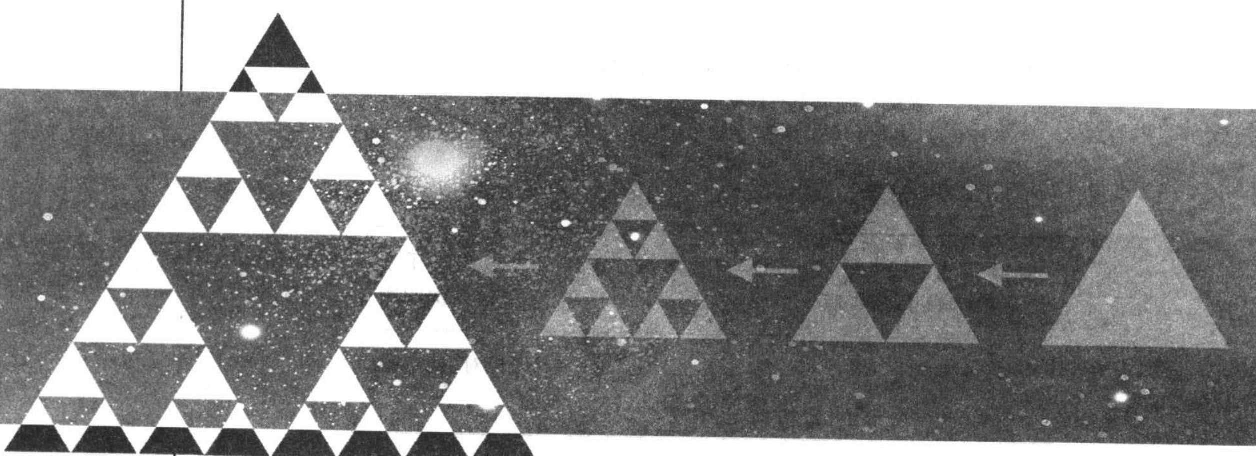
徐利治 编著

数学分析的方法及例题选讲

——分析学的思想、方法与技巧

Methods of Mathematical Analysis with Selective Examples

Ideas,Methods and Technics



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析的方法及例题选讲/ 徐利治编著. 一大连:大连理工大学出版社,2007.11

ISBN 978-7-5611-3809-0

Ⅰ. 数… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 178979 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp cn URL:http://www.dutp.cn

辽宁星海彩色印刷中心印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:175mm×250mm 印张:19.75 字数:216 千字

2007 年 11 月第 1 版 2007 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟 责任校对:婕 琳

封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-3809-0 定 价:36.00 元

再版序言

我从事数学教学、科研工作60余年，使我真正体验到"数学思想是永恒的智慧，分析方法是多姿的技艺."

幸好在年青时代，我就重视学习数学分析中的智慧和技艺，才使我能在漫长的数学生涯里一直感觉到工作的轻松愉快和乐趣.但我确实未能想到，我的一本老书——《数学分析的方法及例题选讲》(1955年初版)经历半个世纪之后，大连理工大学出版社还决定为它提供再版的机会！无疑，出版社的负责人是有远见卓识的.

这里我乐意谈一段往年的小故事.1953～1954年我任教于东北人民大学(现称吉林大学)时期，我的亲密同事王湘浩、江泽坚两位先生(已故世)曾热诚地建议我为数学本科三、四年级学生合班开设了一门叫作"分析方法"的课程.这是因为我们有着一个不约而同的共识："经典数学分析中的思想方法和技巧是丰富多彩的，对每一位年青的数学工作者说来，及早掌握这些方法与技艺，将在一生的工作实践中受益无穷."

接着，1954～1955年我们相继指导两个毕业班学生写作毕业论文时，发现有些学生竟能应用学到手的分析方法写出一些值得发表的作品(这些作品曾陆续发表在《东北人民大学自然科学学报》上).这使我们深感欣慰.

当年我的讲稿是参照 G. Polya 与 G. Szegö 合作名著《数学分析中的问题和定理》的题材风格编写而成的. 初稿曾带到北京请我西南联大时代的老师许宝騄先生审阅了一遍. 他很赞成书稿中突出了"Abel 方法"的位置. 他说这种方法扩展了人们判断一般级数的敛散性的本事. 在许先生的有益建议下,我修订了初稿并在每一章之末补加了"注释". 后来闻知,读者们很欢迎这些"注释".

书稿先由商务印书馆于 1955 年 12 月出版,1958 年又由高等教育出版社重印过一次. 但两次印数总额只有 7000 余册.

20 世纪 80 年代初,我国迎来了"科学的春天". 我曾多次收到各地读者来信建议再版该书. 很凑巧,当年杭州大学(后并入浙江大学)有我的一位朋友王兴华教授,已采用我的书为数学系高年级生讲授了两个学期,并有增订原书的建议. 这样,我们便愉快地通过了合作,作为高等学校教学参考书,于 1983 年由高等教育出版社推出原书的修订版. 到 1984 年出版印数即高达 5 万册,并于 1988 年获得国家优秀教材一等奖.

修订版的特点是,对原书的第二、第三、第四各章都增添了一些新题材,甚至加进了一些新的研究结果. 但由于考虑到篇幅太大,略去了讲述"各种类型极限问题"的第五章. 我们的本意是希望把原书第五章的题材内容扩展成为第二本书. 可是由于种种原因,当初的意愿始终未能实现.

多年来不少数学界的朋友与熟人,都认为原书第五章有不可替代的重要性. 我个人也觉得各种类型的极限问题蕴含有数学分析中各种最美妙的智慧与技艺. 因此,当大连理工大学出版社提议再版我 1955 年问世的原著时,我立即表示欣然同意,并乐意合

作实现此事.我要感谢大连理工大学出版社的同志,正是他们的卓越见识和精心合作,才使得我的一本老书能再次获得为读者们服务的机会.

徐利治

2007 年 9 月于北京寓所

序

1953 年，笔者在东北人民大学，为数学系三、四年级合班开设了一门学期课程，简称“分析方法”. 这本书的题材，便是根据原来的讲稿为基础，经过整理改写而成的.

正如书名所标志的那样，这本书主要是以介绍数学分析中的一些典型方法为目的. 因此它和一般分析学教本是有区别的.

全书分五章，共包容命题、例题和习题 600 余例. 其中绝大部分都给出了证明、解法或提示，并且在每章之末还作了一些重点注释. 这些注释对于了解若干典型命题的意义与方法精神的要点相信是有帮助的.

从这本书的内容性质来看，它的主要用处是这样：(一)可作为一般进修高等数学分析者的补充读物和分析课程的教学参考书. (二)可供大学数学专业的高年级生为训练分析技术及解题能力之用. 书中一部分的例题和习题，还可以作为数学分析课堂作业的题材.

这本书有它的特点和用处，但是也还有一些缺点存在着：第一，在各种题材的配置上，并没有做到与其重要程度成比例. 第二，在各个章节中，对于若干典型命题的意义和方法精神，还缺少随时的说明和总结. 好在由于各个章节，都带有一定程度的独立性质，因此使用本书的读者们，只要善于识别轻重，并随时总结要点，也就不会受这些缺点的影响.

固然在这本书中，对于绝大部分的命题和例题，已经给出了证明或提示．但对于使用本书的青年读者来说，笔者十分希望他们能对其中的大部分题目独立地演习一遍；或者参考其解法要点，然后把证明或解题的步骤详细写出．这就是说，使用本书时，需要尽量加入自己的劳动．事实上，也只有这样，才能收到较好的效果．

北京大学数学力学系的许宝騄教授，曾分出他一部分休养的时间，为本书原稿校阅一遍，并提示若干改进意见．笔者在此向他致以至诚的感谢．又东北人民大学的同事江泽坚副教授在我编写本书的过程中，曾给以若干提议和鼓励，在此也向他表示谢意．

最后，我也对本书的审稿者和编辑者所付出的劳动及其宝贵意见表示谢忱．

徐利治

1955 年 1 月于长春东北人民大学

数学家是怎样思考和解决问题的[①]

我想历史上有许多位杰出的数学家的思想方法和解决问题的方法是特别值得介绍的.比如,16～17世纪的Descartes、18世纪的Euler、18～19世纪的Lagrange、Gauss、Abel、Jacobi、Galois,还有近代的Poincaré、S. Ramanujan和现代的P. Erdös等等,这些数学家不仅是解题的能手,而且也是发明创造的大师.在这里自然不可能全面地介绍他们研究问题的思想方法,而只能用举例的方式,概略地谈谈他们**分析解决数学难题的一般策略和手段**(当然也必然谈及他们的一般方法原则).

首先介绍Descartes.他并不是一位纯粹的专业数学家,而是一位哲学思想家.他致力于哲学的沉思可能比在数学思考上花费的时间更多.**哲学家往往具有纵观全局的气魄,喜欢从事物的联系上思考最基本、最普遍的问题**,因此他成为解析几何学的发明者是不足为怪的!事实上,解析几何就是通过联想发明的.

据历史记载,Descartes在一次患病之后,一天早晨醒来,躺在床上琢磨着几何学与代数学的关系问题.通过"联想",忽然领悟几何上最简单的对象"**直线**"能和代数上最简单的对象"**一次方程**"联系起来,**利用点的坐标概念**能在两者之间建立对应关系.

---

① 本文是作者1982年9月24日在长春给参加全国数学竞赛的选手们所作报告的一部分.原载中国科学院心理研究所、长春教育学院、长春数学学会编的《数学学习心理》,1988,第2期,收入本书时作了校订.

Euclid 时代人们就已经知道直线可以看成是由点运动而成的，从而表示**点位置**的坐标(x,y)也就成为一对变量. 这样，Descartes 不仅形成了解析几何的原始思想，而且还创立了变量概念.

Descartes 又进一步揭示了圆锥曲线(圆、椭圆、抛物线、双曲线)和二元二次方程的对应关系 . 他写了一本《几何学》的名著，从而成为解析几何学的创始人.

"联想"能导致伟大的创造发明. 上述 Descartes 发明解析几何的故事，正好给我们提供了一个光辉的例子.

联想是一种思维活动，简单地说就是把不同事物联系起来的一种思想方法.

在日常生活中人们也常常靠联想去解决问题. 比如，天下雨，家里既没有雨伞，又没有雨衣，出门怎么办？ 雨衣中有塑料雨衣，忽然联想到家里有块塑料布，于是就用塑料布顶在头上作为雨衣的代用品，这就是靠联想解决问题的.

还有一个很有趣的例子. 有一个乒乓球掉进一根埋在地下垂直的管道中无法取出来，桌子上放着一壶水，聪明的人**联想到水和球在一起能使球浮起来的现象**，于是把水倒进管道中去，就把乒乓球取出来了.

现在我们来讲讲 Euler 的故事. Euler 一生中解决了许许多多的数学问题，在数学上作出了许多重要贡献. 从初等数学到高等数学的各门数学中，到处都可以见到 Euler 的名字. 正如 18 世纪法国数学家兼天文学家 Laplace 说过的，"Euler 是我们大家的老师".

Euler 特别善于用**联想和归纳法**解决问题. 例如，大家知道，代数多项式可以分解因子. 通过因子分解，令各一次因式为零便

可求出该代数方程的各个根. 反之，如果各根为已知，则**多项式**便可用各根做成的一次式为因式连乘起来，从而多项式便可**表示成因子连乘积**. 那么，像 $\sin x$ 这样的函数能否表示成因子连乘积呢？这是 Euler 通过联想解决的大难题之一. 已知

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

于是，$\sin x$ 便可看成是一个无限次的代数多项式. Euler 把它和代数多项式因子分解定理作比较，便联想到 $\sin x$ 也应该能表示成因子连乘积. 但因为 $\sin x = 0$ 有无穷多个根：$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$，所以 $\sin x$ 应表示成无穷多个因子乘积. 于是，通过联想和类比，Euler 便发现 $\sin x$ 可分解成下列因子连乘积：

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots,$$

这便是著名的 Euler 公式. 这个公式利用数学分析方法可以获得严格的证明. 特别有趣的是，如果把上式右端展开，可以看出 $-x^3$ 的系数是

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots = \frac{1}{3!},$$

从而得到自然数平方之倒数的级数和公式

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

这又恰好解决了 Jacques Bernoulli 在 Euler 生前若干年提出的一个难题. Bernoulli 一生解决过许多数求和问题，但对平方数倒数的级数求和问题却始终未能解决，因此曾公开提出过上述难题. 这一难题经过数十年之后才为 Euler 所解决，解答即如上述.

数学上的许多定理和公式是用**联想法和类比法发现的**. 类比法就是对两个或几个相似的东西进行联想，把它们中间**某个较熟**

悉的性质转移到和它相似的对象上去，从而作出相应的判断或推理. 比如，有时人们考虑问题时常说"我想到办法了"，其实就是联想到了.

联想也是一种能力. 需要通过学习和工作实践去培养. 大凡一个人的知识越丰富，它的联想范围便越广阔，因而联想能力也越强. 所谓"联想翩翩，海阔天空"，这不仅对文学作家是必要的，而且对数学家也是必要的. 因而缺乏联想，就很难有所创新，有所发现. 历史上的杰出数学家不仅擅长于"联想"，而且还都是使用"**归纳法**"的能手. 归纳法就是从特殊到一般的思想方法，无数特殊性的事物中往往蕴含着某种共同性的东西或普遍关系，把这种共同性的东西或普遍关系找出来表述为一般性命题或普遍公式，这就是归纳法. 著名数学家 Gauss 就说过，他在数论上的许多定理都是靠一般归纳法发现的，至于证明，则是后来补上的. 大家学过"**数学归纳法**"，这是一种适用于发现和论证自然数命题的归纳法. 它也是从特殊过渡到一般的思想方法. **数学归纳法非常重要.** 对搞数学的人来说，不说天天用到它，也是年年月月用到它. 当人们碰到一个与自然数 n 有关的数学问题时，如果一时无法下手，就应该首先观察简单的情形，即观察 $n=1$，$n=2$ 或 $n=3$ 时，问题的解（或答案）应该怎样. 如果连最简单的情形**问题答案**都无法确定，那么对**一般情形**自然就更无从琢磨了. 因此，要重视特例，**耐心地观察特例**，善于分析特例，并从中猜想出普遍性的结论. 这就是使用归纳法的重要步骤. 当然，还要学会从 $n=k$ 过渡到 $n=k+1$ 的演绎推理方法.

Gauss 在十八九岁时，就研究了古代几何学流传下来的"圆等分问题"，即用**直尺和圆规如何等分圆周的问题**，也就是如何作正

n 边形的问题. 历史上早就知道正三角形、正五边形的尺规作图法. 但正七边形、正 13 边形、正 17 边形等等如何用尺规作图呢? 这也是当年的著名难题. Gauss 通过联想、类比和归纳法, 在他 19 岁时(1796 年), 发现了正 17 边形的尺规作图法. 他非常兴奋, 并因此确立了献身数学事业的志愿. 后来, 他果然成为一位杰出的大数学家. 多年前我写过一本小册子《浅谈数学方法论》. 书中有一个"附录", 就专门介绍了 Gauss 解决正 17 边形之尺规作图问题的方法过程, 并谈到了他的一般分圆定理. 这个定理就是用归纳法导出的光辉成果, 它彻底解答了**哪些正多边形才是能够用尺规作图的大难题**.

我的那本小册子还谈到了"**倒推分析法**"和"**抽象分析法**". 这些也都是解决数学问题的重点方法. 书中特别以 Euler 解决"Koenigsberg **七桥问题**"为例, 说明了**抽象分析法**的思想过程.

搞数学研究的人, 一辈子都离不开"抽象分析法". 这种方法包含如下的基本过程:

第一步, 必须把**应用问题**(或实际问题)表现成**数学问题**. 这就需要使用**数学语言**、**数学概念**和**数学符号**去表述问题. 例如, 解代数应用题时, 用 x、y 等表示未知数, 用 a、b 等表示已知数, 并按照题设条件, 用等式将这些字母联结起来变成**方程式**. 这就把应用题转化为数学问题. 这一步用的是**抽象分析法**. 因为用 x、y 等代表应用问题中的未知量, 就已经是一种抽象的表示法. 至于把应用问题中的某种**具体条件或关系**表述成抽象的数学等式或方程式, 就更是抽象分析后的结果. 使用抽象分析法, 必须看透问题的本质, 抓住主要环节, 略去次要环节.

第二步, 对已经表述成**数学形式**的数学问题再使用演绎推理

或逻辑分析法或计算方法等去求得答案.

当然,已经形成的数学问题有大有小,有难有易.下面我专门谈论一下处理和解决数学问题的**一般原则**.

面对一个数学问题,为了便于下手解决,首要的一步,就是要设法**简化问题**.简化的意思有两层,一层是**转化问题形式**,就是把问题改换一个提法,即**改述成另一个相当的形式**,而使得改换后的形式比较"熟悉",能和自己已知的知识联系起来,从而可利用已知的知识去求得解决.Pólya 所写的《归纳与类比》、《数学的发现》和《怎样解题》这三部书中就有不少例子谈到了问题变形的技巧.学习数学命题时,必须懂得什么叫**必要条件**,什么叫**充分条件**,什么是既必要又充分的条件——简称"充要条件".彻底**理解充要条件的概念**并善于使用这种概念去分析、观察问题,那就会转化问题的形式.使面貌生疏的问题转化为面貌熟悉的问题,这样就便于用已知知识来解决问题.

"简化问题"的另一层意思,就是**分解问题**.即把问题分解成**若干组成部分**,也就是把一个较大或复杂的问题分解成一些"**子问题**"或"**小问题**",然后把每个小问题各个击破,最后合拢起来也就解决了整个问题.

综上所述,"**简化**"包括"**转化**"和"**分解**".优秀的数学工作者或解题能手,往往都能掌握**转化问题和分解问题**的技巧.这种技巧是怎样获得的呢?当然要靠多解题、多思考、多总结经验.最好是多看看历史上著名数学家是怎样做的,从中受些启发.

数学问题经过简化之后,不见得马上就能解决.这时还需作进一步分析.对于较难的问题,数学家们有时往往**凭直观和经验去猜测**问题的可能"**答案**"和可能的"**解决途径**".

怎样去猜测？这又往往要使用联想和类比方法. 又怎样去探求解决途径呢？一旦有了比较自信的认为合理的"猜测答案"之后，数学家又往往采取**倒推法**去寻找解决问题的途径(包括利用倒推法去探求答案成立的**条件**等). 有时还需要补充使用尝试成功法或试探法.

国外有些科学方法学专家和心理学家已经在研究"联想的规律"、"类比的方法"、"猜测的技巧"等. 我想这方面的研究是很重要的，因为它有助于培养人们的创造发明和解决问题的能力.

数学符号简单介绍

$[x]$系表示实数x的最大整数部.亦即$[x]$为一合乎如此条件的整数:$[x] \leqslant x < [x]+1$.

$\{x\}$系表示实数x的最近整数.亦即$\{x\}$为一合乎如此条件的整数 $|\{x\}-x| < \frac{1}{2}$.

$\exp(x)$ 表示 x 的指数函数.亦即 $\exp(x)=e^x$.

$\operatorname{sgn} x$ 表示一个 Kronecker 氏记号:

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}+1 & (\text{当 } x>0),\\ 0 & (\text{当 } x=0),\\ -1 & (\text{当 } x<0).\end{cases}$$

$\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的最大值.

$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的最小值.

$|a_{ik}|_1^n$ 或 $\det[a_{ik}]$ 表示以 a_{ik} 为元素的 n 级行列式.

$\{a_n\}$ 或$\{a_n\}_1^\infty$ 表示一个叙列:$a_1,a_2,a_3,\cdots$.

$a_n \to a$ 表示当 $n\to\infty$ 时,$\lim a_n = a$.

$x\to a+$ 或 $x\to a+0$ 表示变量 x 从右方向趋于a.有时亦记作 $x\downarrow a$.同理,$x\to a-$ 或 $x\to a-0$ 表示 x 从左方向趋于a.亦可记作 $x\uparrow a$.

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ 与$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ 系分别表示于 $n\to\infty$ 时之 a_n 的上极限与下极

限. 同理,$\overline{\lim\limits_{x\to a}}f(x)$ 与 $\underline{\lim\limits_{x\to a}}f(x)$ 即表示 $f(x)$ 于 $x\to a$ 时的上极限与下极限.

$\sup f(x)$ 与 $\inf f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 系分别表示 $f(x)$ 在间隔 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的最小上界(上确界)与最大下界(下确界). 有时亦分别记作 $\overline{\operatorname{bound}}_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ 与 $\underline{\operatorname{bound}}_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

$f_n(x)\xrightarrow{1}f(x)(n\to\infty;a\leqslant x\leqslant b)$ 系表示函数序列 $f_n(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 的间隔上一致地趋于 $f(x)$. 亦可记作 $\lim f_n(x)\overset{1}{=}f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$.

$a_n\sim b_n$ 表示当 $n\to\infty$ 时 $a_n/b_n\to 1(b_n\neq 0)$.

$a_n\prec b_n$ 或 $b_n\succ a_n$ 系表示 $a_n/b_n\to 0(b_n\neq 0)$.

$o(a_n)$ 系表示这样一个变量,它与 a_n 之比以零为极限. 亦即于 $n\to\infty$ 时,$o(a_n)\prec a_n$.

$O(a_n)$ 系表示这样一个变量,它与 a_n 之比的绝对值有一个有限的上界$(a_n>0)$.

$\overline{O}(a_n)$ 系表示这样一个变量,它与 a_n 之比的极限值为一异于零的常数$(a_n>0)$.

$a\in A$ 表示元素 a 属于集合 A.

$\sum\limits_{C}$ 表示在条件 C 之下求和. 例如 $\sum\limits_{a\in A}f(a)$ 即表示对 A 中之一切元素 a 而求和.

$P\longrightarrow Q$ 表示命题(或定理)P 隐含命题(或定理)Q.

$P\longleftrightarrow Q$ 表示命题 P 及 Q 可以相互推导.