俄罗斯数学
教材选译

代数学引论（第三卷）

基本结构（第2版）

□ А. И. 柯斯特利金 著
□ 郭文彬 译

高等教育出版社
Higher Education Press

俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

代数学引论 (第三卷)

基本结构 (第2版)

□ A. И. 柯斯特利金 著

□ 郭文彬 译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2005–5734 号

А. И. Кострикин

Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры, 2001

Originally published in Russian under the title

Introduction to Algebra

Part III: Basic Algebra Structures by A. I. Kostrikin

图书在版编目 (CIP) 数据

代数学引论 (第 3 卷) 基本结构: 第 2 版 / (俄罗斯) 柯斯特利金著; 郭文彬译. —北京: 高等教育出版社, 2007.11

ISBN 978-7-04-022506-8

I.代… II.①柯…②郭… III.高等代数-高等学校-教材 IV.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 161754 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010–58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800–810–0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010–58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	16.25	**印　　次**	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	330 000	**定　　价**	35.00 元

物 料 号　22506–00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

近一段时间越来越流行着这样一种观点，即数学的许多领域不是别的，而是一些专门群体的不变量理论.

索福斯 · 李

前 言

教科书《代数学引论》[1]第三卷的内容可以认为是十分重要的，但应当相信，它作为前两卷的续编，并不过分抽象. 新概念相对来说不是很多，至少在前四章里是如此. 读者会遇到自己的老 "相识" (见 [BA I] 第 4 章和 [BA II] 第 7 章)，它们将把你带入内容丰富得多的领域. 最引人注目的应当是对一些例子的研究，它们占了整整四分之一的篇幅 (譬如第 1 章的 §1 的内容和第 3 章 §3 的内容自然属于此列). 除此之外，对例子的挑选是考虑到在代数和数学的其它分支之间搭建一座小桥. 如果读者最终能够对数学整体的感觉得到加强，那么作者在该第三卷提出的目标应当认为达到了. 最后的第 5 章便是为这一目标而写的，它自成一篇，基本上在专门课程内让学生掌握.

《代数学引论》是供大学就读的数学系所有大学生使用的，而不仅仅是供未来的代数学专家们使用，这一点已经不必再强调了. 因此对 "基本结构" 这一小标题应当宽容地对待，因为依然是那些群、环、域，它们只不过是按种类被扩展了 (偏重于几何)，而主要的还是在于因为有了线性表示的重要概念而得到了充实. 正是模和线性表示使不断出现在分析和几何中的代数和群得以实现.

A. И. 柯斯特利金

[1] 以下按原作者使用的记法，本书一至三卷分别记为 [BA I], [BA II] 和 [BA III] —— 译者注.

俄罗斯数学教材选译

•数学天元基金资助项目•

书名	作者
* 数学分析 (第一卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
* 数学分析 (第二卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
* 微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 数学分析讲义 (第 3 版)	Г. И. 阿黑波夫, В. А. 萨多夫尼奇, В. Н. 丘巴里阔夫
复分析导论 (第一卷)	Б. В. 沙巴特
复分析导论 (第二卷)	Б. В. 沙巴特
* 函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	А. Н. 柯尔莫戈洛夫, С. В. 佛明
* 复变函数论方法 (第 6 版)	М. А. 拉夫连季耶夫, Б. В. 沙巴特
* 常微分方程 (第 6 版)	Л. С. 庞特里亚金
奇异摄动方程解的渐近展开	А. Б. 瓦西里耶娃, В. Ф. 布图索夫
* 代数学引论 (第一卷) 基础代数 (第 2 版)	А. И. 柯斯特利金
* 代数学引论 (第二卷) 线性代数 (第 3 版)	А. И. 柯斯特利金
* 代数学引论 (第三卷) 基本结构 (第 2 版)	А. И. 柯斯特利金
* 微分几何与拓扑学简明教程	А. С. 米先柯, А. Т. 福明柯
* 现代几何学: 方法与应用 (第一卷) 几何曲面、变换群与场 (第 5 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 现代几何学: 方法与应用 (第二卷) 流形上的几何与拓扑 (第 5 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 现代几何学: 方法与应用 (第三卷) 同调论引论 (第 2 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 概率论(第一卷)(第 3 版)	А. Н. 施利亚耶夫
概率论(第二卷)(第 3 版)	А. Н. 施利亚耶夫
概率论习题集	А. Н. 施利亚耶夫
随机过程论	А. В. 布林斯基, А. Н. 施利亚耶夫
随机金融基础: 事实、模型与理论	А. Н. 施利亚耶夫
* 经典力学中的数学方法 (第 4 版)	В. И. 阿诺尔德
* 理论力学 (第 3 版)	А. П. 马尔契夫
* 连续介质力学 (第一卷)	Л. И. 谢多夫
连续介质力学 (第二卷)	Л. И. 谢多夫

说明: 加 * 者已出版.

订购办法:

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购. 书款通过邮局汇款或银行转帐均可. **购书免邮费**, 发票随后寄出.

通过邮局汇款:

北京西城区德外大街 4 号高教读者服务部

邮政编码: 100011

通过银行转帐:

单位名称: 北京高教沙滩读者服务部

开 户 行: 北京银行德外支行

银行帐号: 700120102030302

单位地址: 北京西城区德外大街 4 号

电　　话: 010–58581118, 010–58581117, 010–58581116, 010–58581115, 010–58581114

传　　真: 010–58581113

高等教育出版社自然科学学术出版中心

高等教育出版社是教育部所属的国内最大的教育出版基地，其自然科学学术出版中心下设研究生教育与学术著作分社和自然科学学术期刊分社，正努力成为中国最重要的学术著作出版单位和最大的学术期刊群出版单位.

研究生教育与学术著作分社充分发掘国内外出版资源，为研究生及高层次读者服务，已出版《教育部推荐研究生教学用书》、《当代科学前沿论丛》、《中国科学院研究生院教材》、《中国工程院院士文库》、《长江学者论丛》等一系列研究生教材和优秀学术著作.

自然科学学术期刊分社主要负责教育部大型英文系列学术期刊出版项目 *Frontiers in China* 中基础科学、生命科学、工程技术类期刊的出版工作，目标是搭建国内学术界与海外交流的平台，以及国内学术期刊界合作的平台.

地　　址：北京市朝阳区惠新东街4号富盛大厦15层

邮　　编：100029

网　　址：http://academic.hep.com.cn

购书电话：010-58581114/1115/1116/1117/1118

目 录

第 1 章　群论的构造

本章展开在 [BA I] 第 4 章中引入的群的概念. 首先指出的是, 我们这里注重的不是抽象群, 那是属于许多专业课程的事, 而是用于了解各种自然的群的 "作用". 正是各种具体的群的实现推动了一般群论的发展, 并树立了它为有益的数学研究工具的声望. 以一些个别的 (但也是重要的) 例子为背景研究群同态 (群的满同态、群的同构) 以及群论构造的想法变得更加迫切. 这使我们能够将复杂的研究对象变得更简单.

§1 小维数的典型群

1. 一般概念　线性代数和几何教程给我们提供了新的群的范例, 这些范例值得较详细的谈谈. 在仿射空间、欧几里得空间、埃尔米特空间和辛空间中保留一个固定点 (譬如, 坐标原点) 不变的变换群中分离出一些子群, 由此产生了那些称之为典型群的 $\mathrm{GL}(n), \mathrm{SL}(n), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{Sp}(n)$. 我们指出, 它们在李群中真正的地位已在 [BA II] 中提到, 同时将要在第 2 章简要的论述. 我们并不打算全面地描写典型群的性质, 那是其它书的任务. 在 n 不大的情况下, 我们称典型群是小维的. 对于群 $\mathrm{GL}(n), \mathrm{SL}(n)$, 我们在前面已经遇到过 (见 [BA I]). 为了回避对几何的较大依赖性, 人们在空间中选择了标准正交基, 并由此产生了正交群和酉群的矩阵形式的等价定义:

$$\mathrm{O}(n) = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) | {}^t A \cdot A = A \cdot {}^t A = E\right\},$$

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) | \det\ A = 1\},$$

$$\mathrm{U}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | A^* \cdot A = A \cdot A^* = E\},$$
$$\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n) | \det\ A = 1\}.$$

其中 $A^* = \overline{{}^tA}$ 为 $A = (a_{ij})$ 的转置矩阵并将元素 a_{ij} 用其复数共轭 $\overline{a_{ij}}$ 代替所得的矩阵. 群 $\mathrm{SL}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{SU}(n)$ 分别称为**特殊 (线性、正交、酉) 群**. 特别地,

$$\mathrm{O}(1) = \{\pm 1\}, \quad \mathrm{SO}(1) = 1 := \{1\},$$
$$\mathrm{U}(1) = \left\{e^{i\varphi} | 0 \leqslant \varphi < 2\pi\right\}, \quad \mathrm{SU}(1) = 1,$$
$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \middle|, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \right\} \cong \mathrm{U}(1).$$

自然对应

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mapsto e^{i\varphi}$$

是 SO(2) 对应到 U(1) 的一个同构. 因为复数 $e^{i\varphi}, 0 \leqslant \varphi < 2\pi$, 的几何表示是 $\mathbb{R}^2$ 中具有单位半径的圆 S^1, 所以人们也称群 SO(2) 与圆 S^1 为**拓扑等价**. 这个术语的真正涵义在几何课程中是清楚的.

群 SO(2) 与 SO(3) 之间的明显的联系要小得多. 我们来初步地讲一讲群 SU(2) 的几何变换, 它将使我们得到群 SO(3) 的几何变换.

2. 群 SU(2), SO(3) 的参数化 由著名的欧拉定理, 三维欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 的正常旋转的群 SO(3) 的每个元素是围绕某一固定轴的旋转. 譬如说, 矩阵

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

对应的是围绕轴 Oz 和 Ox 的角度为 φ 和 θ 的两个旋转. 利用欧拉角 φ, θ, ψ $(0 \leqslant \varphi, \psi < 2\pi, 0 \leqslant \theta < \pi)$ 的旋转的参数化 (它们的几何意义目前我们暂时不感兴趣), 任意矩阵 $A \in \mathrm{SO}(3)$ 可以写为

$$A = B_\varphi C_\theta B_\psi, \tag{2}$$

这里 $B_\varphi, C_\theta, B_\psi$ 是上面 (1) 中形式的矩阵.

下面令

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2).$$

则

$$g^* = {}^t\bar{g} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

因为 $g\in \mathrm{U}(2) \Longleftrightarrow g^*=g^{-1}$, 所以 $\delta=\overline{\alpha}, \gamma=-\overline{\beta}$. 于是, 对于任意 $g\in \mathrm{SU}(2)$ 有

$$g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2+|\beta|^2=1. \tag{3}$$

反之, 如果 g 是形如 (3) 的矩阵, 那么显然 $g\in\mathrm{SU}(2)$. 因此群 SU(2) 中的每个元被满足 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ 的复数对 α,β 唯一确定. 如果令 $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2, \beta=\beta_1+i\beta_2$, 其中 $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}, i=\sqrt{-1}$, 那么条件 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ 转化为

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_1^2+\beta_2^2=1,$$

于是可以说, 群 SU(2) 拓扑等价 (同胚) 于四维实空间中的球面 S^3.

我们将注意力转移到酉矩阵

$$b_\varphi=\begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad c_\theta=\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

正如线性代数教程所证明的 (在所给条件下验证也是直接的), 对于形如 (3) 的酉矩阵 g, 存在酉矩阵 u 使得

$$g=ub_\varphi u^{-1}, \tag{5}$$

其中 φ 由方程 $\alpha_1=\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$ 所确定. 同样指出, 对于任意矩阵 (3), 当 $\alpha\beta\neq 0$ 时, 可以有形式

$$a(\varphi,\theta,\psi)=b_\varphi c_\theta b_\psi=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2}\cdot e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} & i\sin\dfrac{\theta}{2}e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}} \\ i\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot e^{\frac{i(\psi-\varphi)}{2}} & \cos\dfrac{\theta}{2}e^{\frac{-i(\varphi+\psi)}{2}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中[①]

$$0\leqslant\varphi<2\pi,\ 0\leqslant\theta<\pi,\ -2\pi\leqslant\psi<2\pi.$$

这只要令

$$|\alpha|=\cos\frac{\theta}{2}, \quad \operatorname{Arg}\alpha=\frac{\varphi+\psi}{2},$$
$$|\beta|=\sin\frac{\theta}{2}, \quad \operatorname{Arg}\beta=\frac{\varphi-\psi+\pi}{2},$$

运用这样的事实: 每个复数 z 有两个实参数 $|z|$ 和 $\arg z$ ($\operatorname{Arg} z$ 是幅角 $\arg z$ 的主值).

现在我们开始解决这一节的主要问题.

①后面我们将看到, φ,θ,ψ 就是欧拉角. 酉矩阵 $\pm g$ 对应 $\mathbb{R}^2$ 中的同一个旋转, ψ 的变化范围缩小为半个区间 $[0,2\pi]$.