高等院校力学学习辅导丛书
Exercise Series in Mechanics for Higher Education

弹性力学习题及解答

徐秉业 王建学 编著
Xu Bingye Wang Jianxue

3-44
4

清华大学出版社 Springer

高等院校力学学习辅导丛

Exercise Series in Mechanics for Higher Education

弹性力学习题及解答

徐秉业 王建学 编著

Xu Bingye Wang Jianxue

清华大学出版社

北京

Springer

内容简介

这是一本与作者所编写的《弹性力学》配套的教学参考书。书中所给出的解答以及求解过程对于初学这门课程的学员具有一定的启发意义。学员最好首先独立解题，然后再参阅本书的解题过程和分析结果，这样不仅能加深解题的印象，而且对培养独立思考以及独立分析问题和解决问题的能力是很有好处的。希望这本《弹性力学习题及解答》对于"弹性力学"的教学能起到良好的促进作用。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13501256678　13801310933

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学习题及解答/徐秉业，王建学编著．—北京：清华大学出版社，2007.7
（高等院校力学学习辅导丛书）
ISBN 978-7-302-13125-0

Ⅰ. 弹… Ⅱ. ①徐…②王… Ⅲ. 弹性力学—高等学校—解题 Ⅳ. O343-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 055607 号

责任编辑：杨　倩
责任校对：王淑云
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175
投稿咨询：010-62772015
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座
邮　　编：100084
邮购热线：010-62786544
客户服务：010-62776969
印 装 者：北京市清华园胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：175×245　**印　张**：6.75　**字　数**：133 千字
版　　次：2007 年 7 月第 1 版　**印　次**：2007 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：13.50 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：010-62770177 转 3103　　产品编号：010384-01

目　　录

第 1 章

绪　论

题 1-1

弹性力学的任务是什么?

题 1-2

试说明在什么情况下必须用弹性力学求解问题而不能用材料力学?

题 1-3

弹性力学的基本假设是什么? 为什么要采用这些假设?

题 1-4

弹性力学中符号有哪些规定? 采用这些规定有什么意义?

题 1-5

弹性力学中有哪几类载荷? 它们各有什么特点?

题 1-6

平面问题和空间问题有哪些不同?

题 1-7

平面应力问题和平面应变问题的区别是什么? 试举几个工程实际中典型的平面应力或平面应变问题的实例。

题 1-8

圣维南原理的主要内容是什么? 这一原理对弹性力学分析问题时有什么重要作用? 试举例说明。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

题 1-9

为什么说圣维南原理在分析薄壁结构时有时不适用?

题 1-10

逆解法和半逆解法主要思路是什么? 在求解具体问题时,哪一方法更为实用?

答案参见徐秉业,王建学编著。弹性力学,第 1 章。北京:清华大学出版社,2006。

第2章 平面问题

题 2-1

如图 2-1 所示厚度为 1 的楔体，材料密度为 ρ，左侧作用有密度为 ρ_1 的液体，试写出其应力边界条件。

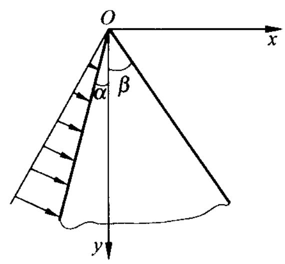


图 2-1

解：左侧面 $l=-\cos\alpha, m=-\sin\alpha, x=-y\tan\alpha$

$$\begin{cases} -\cos\alpha\cdot\sigma_x-\sin\alpha\cdot\tau_{xy}=\rho_1 gy\cos\alpha \\ -\cos\alpha\cdot\tau_{xy}-\sin\alpha\cdot\sigma_y=\rho_1 gy\sin\alpha \end{cases}$$

右侧面 $l=\cos\beta, m=-\sin\beta, x=y\tan\beta$

$$\begin{cases} \cos\beta\cdot\sigma_x-\sin\beta\cdot\tau_{xy}=0 \\ \cos\beta\cdot\tau_{xy}-\sin\beta\cdot\sigma_y=0 \end{cases}$$

式中 l,m 是斜截面法线与 x、y 轴之间夹角的方向余弦

题 2-2

试给出完全置于水中具有梯形截面无穷长档水墙(如图 2-2)的边界条件，画出当 $\alpha=45°$时的载荷曲线。

解：应力边界条件关系式

$$\begin{cases} \sigma_x\cdot l+\tau_{yx}\cdot m+\tau_{zx}\cdot n=F_x \\ \tau_{xy}\cdot l+\sigma_y\cdot m+\tau_{zy}\cdot n=F_y \\ \tau_{xy}\cdot l+\tau_{yz}\cdot m+\sigma_z\cdot n=F_z \end{cases}$$

① 对于 AA'面，$l=-1, m=0, n=0, F_x=\rho gy, F_y=0$

因此，$\sigma_x=-\rho gy, \tau_{xy}=0, \sigma_y=0$

② 在 AB 面上，$l=0, m=-1, n=0, F_x=0, F_y=\rho g h$

因此，$\sigma_x=0, \sigma_y=-\rho g h, \tau_{xy}=0$

③ 在 BB' 面上，$l=\cos\alpha, m=-\sin\alpha, n=0$

$$\begin{cases}\sigma_x \cdot l+\tau_{xy} \cdot m=-\rho g y \sin\alpha \\ \tau_{xy} \cdot l+\sigma_y \cdot m=\rho g y \cos\alpha\end{cases}$$

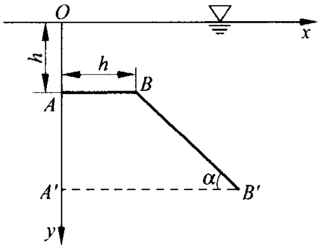


图 2-2

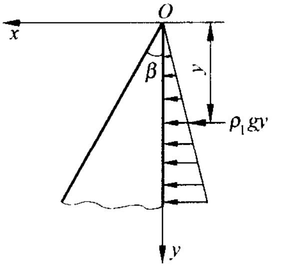


图 2-3

题 2-3

如图 2-3 所示三角形截面的坝体，其材料密度为 ρ，右侧承受密度为 ρ_1 的液体的压力，设其应力分量为

$$\sigma_x=ax+by$$
$$\sigma_y=cx+dy$$
$$\tau_{xy}=-dx-ay-\rho g x$$

试根据边界条件确定系数 a, b, c, d。

解：右侧面 $\sigma_x=-\rho_1 g y, \tau_{xy}=0$

斜面：$l=\cos\beta, m=-\sin\beta, x=y\tan\beta$

$$\begin{cases}l\sigma_x+m\tau_{xy}=0 \\ l\tau_{xy}+m\sigma_y=0\end{cases}$$

将 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 代入，联立解之，得

$$a=0, \quad b=-\rho_1 g, \quad d=-\rho_1 g\cot^2\beta-\rho g,$$

$$c=\frac{\rho g}{\tan\beta}-2\rho_1 g\cot^3\beta$$

题 2-4

如图 2-4 所示矩形截面梁，在均布载荷作用下，由材料力学得到应力分量为

$$\sigma_x=\frac{M}{I}y, \quad \tau_{xy}=\frac{QS}{I}$$

试检查该公式是否满足平衡微分方程和边界条件，并导出 σ_y 的表达式。

解：应力 σ_x 和 τ_{xy} 可写成

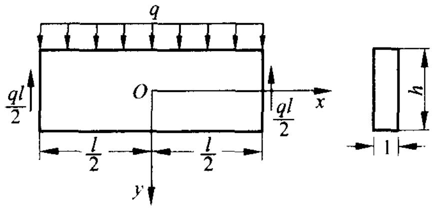


图 2-4

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{M}{I}y = \frac{\frac{ql^2}{8}-\frac{qx^2}{2}}{\frac{h^3}{12}}y = Ay - Bx^2y\\ \tau_{xy} &= \frac{QS}{I} = \frac{-qx}{\frac{h^3}{12}}\left(\frac{h^2}{8}-\frac{y^2}{2}\right) = -Cx + Bxy^2\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中，$A=\frac{3ql^2}{2h^3}$，$B=\frac{6q}{h^3}$，$C=\frac{3q}{2h}$。

本例的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

将式(1)代入式(2)，第一式得到满足，由第二式得

$$\sigma_y = -\int\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}y = Cy - B\frac{y^3}{3} + D$$

利用边界条件$(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}}=0$，得 $D=-\frac{q}{2}$，由此得

$$\sigma_y = -\frac{q}{2}+\frac{3q}{2h}y-\frac{2q}{h^3}y^3\tag{3}$$

上式亦满足边界条件$(\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}}=-q$。

另外，由式(1)的第二式可知，它满足上下两个表面上$(\tau_{xy})_{y=\pm\frac{h}{2}}=0$ 的条件。在左侧及右侧表面上，利用圣维南原理，其边界条件亦满足。

由此可知，只有当 σ_y 由式(3)确定时，材料力学中所得到的解答才能满足平衡方程和边界条件，即满足弹性力学基本方程的解。

题 2-5

已知平面问题的应力分量为

$$\sigma_x = qxy,\quad \sigma_y = 0,\quad \tau_{xy} = c\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

试用平衡方程求出系数 c，并在图 2-5 所示板的左右侧面上画出面力的分布图(体力为零)。

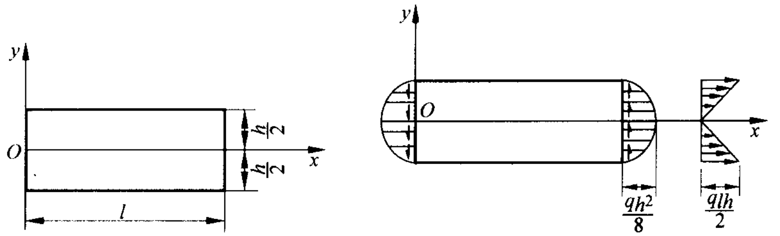


图 2-5

解：① 不计体力，平稳方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0\end{cases}$$

将 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 求偏导数代入上式，得

$$qy-2cy=0$$

故　$c=\dfrac{q}{2}$。

② $x=0$ 时，$\sigma_x=0$，$\tau_{xy}=c\left(\dfrac{h^2}{4}-y^2\right)$，$\tau_{xy}$ 的值为一抛物线。

当 $y=\pm\dfrac{h}{2}$ 时，$\tau_{xy}=0$；当 $y=0$ 时，$\tau_{xy}=\dfrac{ch^2}{4}$

$x=l$ 时，$\sigma_x=qly$，当 $y=0$ 时，$\sigma_x=0$；当 $y=\pm\dfrac{h}{2}$ 时，$\sigma_x=\pm\dfrac{qhl}{2}$

τ_{xy} 的变化规律与 $x=0$ 时一致，方向相反。

题 2-6

设物体变形时产生的应变分量为

$$\begin{cases}\varepsilon_x=A_0+A_1(x^2+y^2)+x^4+y^4\\ \varepsilon_y=B_0+B_1(x^2+y^2)+x^4+y^4\\ \gamma_{xy}=C_0+C_1xy(x^2+y^2+C_2)\end{cases}$$

$$\varepsilon_z=\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$$

试确定系数之间应满足的关系式。

解：首先求出 $\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$ 的表达式

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}=2A_1+12y^2$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2B_1 + 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 3C_1 y^2 + 3C_1 x^2 + C_1 C_2$$

由于是平面应变问题，故将以上各式代入变形协调方程，则得

$$2A_1 + 12y^2 + 2B_1 + 12x^2 = 3C_1 y^2 + 3C_1 x^2 + C_1 C_2$$

比较上式系数后，可得

$$C_1 = 4, \quad 2A_1 + 2B_1 = 4C_2 \quad 或 \quad A_1 + B_1 = 2C_2$$

题 2-7

已知图 2-6 所示的简支梁，在其表面上作用着均布载荷 q，试用半逆解法求出应力函数和各应力分量（不计体力）。

解：利用材料力学的结果可知，对于图所示简支梁，σ_x 主要由弯矩产生，τ_{xy} 由剪力产生，σ_y 主要由载荷 q 局部作用产生。q 为常数，故 σ_y 将不随 x 而变化，因此，设 σ_y 为 y 的函数，即 $\sigma_y = f(y)$。

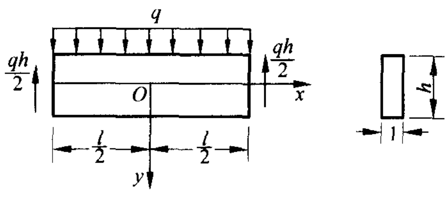


图　2-6

由 $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$，得 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f(y)$。进行积分，得

$$\varphi = \frac{x^2}{2} f(y) + x f_1(y) + f_2(y)$$

因为 q 为常量，根据应力函数在边界上的性质可知，φ 应对称于 Oyz 平面，故上式中 $f_1(y) = 0$，即有

$$\varphi = \frac{x^2}{2} f(y) + f_2(y) \tag{1}$$

将上式带入协调方程，得

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^4 f(y)}{\mathrm{d}y^4} x^2 + \frac{\mathrm{d}^4 f_2(y)}{\mathrm{d}y^4} + 2 \frac{\mathrm{d}^2 f(y)}{\mathrm{d}y^2} = 0$$

上式是 x 的二次方程，它在整个梁内均应满足，即 x 可为任意值，因此有

$$\frac{\mathrm{d}^4 f(y)}{\mathrm{d}y^4} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 f_2(y)}{\mathrm{d}y^4} + 2 \frac{\mathrm{d}^2 f(y)}{\mathrm{d}y^2} = 0 \tag{3}$$

由式(2)得

$$f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D \tag{4}$$

将上式代入式(3)，得

$$\frac{\mathrm{d}^4 f_2(y)}{\mathrm{d}y^4} = -12Ay - 4B$$

对上式进行积分，并略去不影响应力分量的一次项及常数项，得

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$f_2(y)=-\frac{A}{10}y^5-\frac{B}{6}y^4+Ey^3+Fy^2 \tag{5}$$

将式(4)和式(5)代入式(1),得应力函数为

$$\varphi=\frac{x^2}{2}(Ay^3+By^2+Cy+D)-\frac{A}{10}y^5-\frac{B}{6}y^4+Ey^3+Fy^2 \tag{6}$$

由此得应力分量为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{x^2}{2}(6Ay+2B)-2Ay^3-2By^2+6Ey+2F\\
\sigma_y&=Ay^3+By^2+Cy+D\\
\tau_{xy}&=-x(3Ay^2+2By+C)
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

利用边界条件求系数。在上、下两个面上的边界条件为

$$(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}}=0,\quad (\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}}=-q,\quad (\tau_{xy})_{y=\pm\frac{h}{2}}=0$$

将以上条件代入式(7),得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{h^3}{8}A+\frac{h^2}{4}B+\frac{h}{2}C+D=0\\
&-\frac{h^3}{8}A+\frac{h^2}{4}B-\frac{h}{2}C+D=-q\\
&\frac{3}{4}h^2A+hB+C=0\\
&\frac{3}{4}h^2A-hB+C=0
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

联立求解上式,得

$$A=-\frac{2q}{h^3},\quad B=0,\quad C=\frac{3q}{2h},\quad D=-\frac{q}{2}$$

将所求系数代入式(7),应力分量为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=-\frac{6q}{h^3}x^2y+\frac{4q}{h^3}y^3+6Ey+2F\\
\sigma_y&=-\frac{2q}{h^3}y^3+\frac{3q}{2h}y-\frac{q}{2}\\
\tau_{xy}&=\frac{6q}{h^3}xy^2-\frac{3q}{2h}x
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

在梁的左、右两个端面上,应满足符合圣维南原理的边界条件,例如在梁的右端应有

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)_{x=\frac{l}{2}}\mathrm{d}y=0,\quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)_{x=\frac{l}{2}}y\mathrm{d}y=0,$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\tau_{xy})_{x=\frac{l}{2}}\mathrm{d}y=-\frac{ql}{2}$$

将式(9)代入以上各式，则由第一个条件得 $F=0$，由第二条件得 $E=\frac{ql^2}{4h^3}-\frac{q}{10h}$，而第三个条件是满足的。最后得应力函数为

$$\varphi=\frac{q}{5h^3}y^5-\frac{q}{h^3}x^2y^3+\left(\frac{ql^2}{4h^3}-\frac{q}{10h}\right)y^3+\frac{3q}{4h}x^2y-\frac{q}{4}x^2 \tag{10}$$

应力分量为

$$\begin{cases}\sigma_x=-\dfrac{6q}{h^3}x^2y+\dfrac{4q}{h^3}y^3+\dfrac{3ql^2}{2h^3}y-\dfrac{3q}{5h}y\\ \sigma_y=-\dfrac{q}{2}\left(1+\dfrac{y}{h}\right)\left(1-\dfrac{2y}{h}\right)^2\\ \tau_{xy}=\dfrac{6q}{h^3}xy^2-\dfrac{3q}{2h}x\end{cases}$$

题 2-8

建造在水中的墙体，下端为无限长，承受载荷如图 2-7(a)所示，虚线表示作用墙体的侧向力 P 的位置。若应力函数为

$$\varphi=Ay^3+Bx^2+Cxy+Dx^3y+Ex^3$$

试求在 $y=3h$ 处截面上的应力分量及轴线在 x 方向的位移表达式(水的密度为 ρ)。

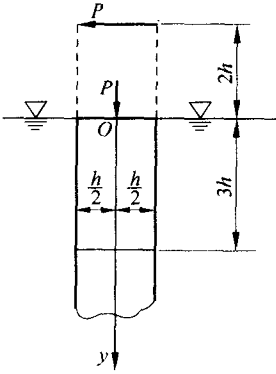


图　2-7(a)

解：由应力函数求得应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=6Ay\\ \sigma_y&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=2B+6Dxy+6Ex\\ \tau_{xy}&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-C-3Dx^2\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

由以下五个边界条件求解 A,B,C,D,E 常数。

① 在 $x=\pm\frac{h}{2}$ 处，$\sigma_x=-\rho gy$，即 $6Ay=-\rho gy$，由此求得 $A=-\frac{\rho g}{6}$。

② 在 $x=\pm\frac{h}{2}$ 处，$\tau_{xy}=0$，即 $-C-3D\frac{h^2}{4}=0$，由此求得 $C=-\frac{3}{4}Dh^2$。

③ 在 $y=0$ 处，$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y\mathrm{d}x=-P$，即 $2Bh=-P$，由此求得 $B=-\frac{P}{2h}$。

④ 在 $y=0$ 处，$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y x\mathrm{d}x=2Ph$，即 $\frac{1}{2}Eh^3=2Ph$，由此求得 $E=\frac{4P}{h^2}$。

⑤ 在 $y=0$ 处，$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy}\mathrm{d}x=P$，即 $-Ch-\frac{1}{4}Dh^3=P$，或 $4Ch+Dh^3=-4P$。

由条件②及条件⑤可求得

$$D=\frac{2P}{h^3},\quad C=-\frac{3P}{2h}$$

将以上求得的各系数代入式(1)中，则得应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\rho g y\\ \sigma_y&=-\frac{P}{h}+\frac{12P}{h^3}xy+\frac{24P}{h^2}x\\ \tau_{xy}&=\frac{3P}{2h}-\frac{6P}{h^3}x^2\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

在 $y=3h$ 处，由上式可求得该截面上的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-3\rho g h\\ \sigma_y&=-\frac{P}{h}+\frac{60P}{h^2}x\\ \tau_{xy}&=\frac{3P}{2h}-\frac{6P}{h^3}x^2\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

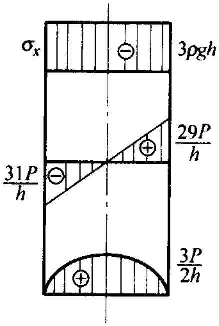


图 2-7(b)

应力的分布如图 2-7(b)所示。

为求应变分量，利用平面应变状态下的物理方程，即

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1+\mu}{E}[(1-\mu)\sigma_x-\mu\sigma_y]\\ \varepsilon_y&=\frac{1+\mu}{E}[(1-\mu)\sigma_y-\mu\sigma_x]\\ \gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

将式(2)所示应力分量代入上式得，

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1+\mu}{E}\left[-(1-\mu)\rho g y+\mu\frac{P}{h}-\mu\frac{12P}{h^3}xy-\mu\frac{24P}{h^2}x\right]\\ \varepsilon_y&=\frac{1+\mu}{E}\left[-(1-\mu)\frac{P}{h}+\mu\rho g y+(1-\mu)\left(\frac{24P}{h^2}x+\frac{12P}{h^3}xy\right)\right]\\ \gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\left(\frac{3}{2}\frac{P}{h}-\frac{6P}{h^3}x^2\right)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

为求位移分量，由几何方程积分，即利用上式的前两式可以求得。

$$\begin{aligned}u&=\int\varepsilon_x\mathrm{d}x\\ &=\frac{1+\mu}{E}\left[-(1-\mu)\rho g yx+\mu\frac{P}{h}x-\mu\frac{6P}{h^3}x^2y-\mu\frac{12P}{h^2}x^2\right]+f(y)\end{aligned}$$

$$v=\int\varepsilon_y\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1+\mu}{E}\left[-(1-\mu)\frac{P}{h}y + \frac{1}{2}\mu\rho g y^2 + (1-\mu)\left(\frac{24P}{h^2}xy + \frac{6P}{h^3}xy^2\right)\right] + g(x)$$

由以上两式求得$\frac{\partial u}{\partial y}$和$\frac{\partial v}{\partial x}$代入式(5)的第三式，则得

$$\frac{1+\mu}{E}\left[-\mu\frac{6P}{h^3}x^2 - (1-\mu)\rho g x\right] + \frac{\partial f(y)}{\partial y}$$

$$+\frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\frac{24P}{h^2}y + (1-\mu)\frac{6P}{h^3}y^2\right] + \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

$$= \frac{2(1+\mu)}{E}\left(\frac{3}{2}\frac{P}{h} - \frac{6P}{h^3}x^2\right)$$

将上式整理，则有

$$\frac{1+\mu}{E}\left[-(1-\mu)\rho g x + \left(-\mu\frac{6P}{h^2} + \frac{12P}{h^3}\right)x^2\right] + \frac{\partial g(x)}{\partial x} = A$$

$$\frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\frac{24P}{h^2}y + (1-\mu)\frac{6P}{h^3}y^2\right] + \frac{\partial f(y)}{\partial y} = B$$

且有

$$A+B=\frac{1+\mu}{E}\frac{3P}{h}$$

由以上可以求得

$$g(x) = -\frac{1+\mu}{E}\left[(2-\mu)\frac{2P}{h^3}x^3 - (1-\mu)\rho g\frac{x^2}{2}\right] + Ax + C$$

$$f(y) = -\frac{1-\mu^2}{E}\frac{6P}{h^2}\left(2y^2 + \frac{y^3}{3h}\right) + By + D$$

其中 A,B,C,D 可由 $x=0, y=3h$ 处，$u=0, v=0$ 及$\frac{\partial u}{\partial y}=0$，求得

$$A = \frac{(1+\mu)(42\mu-41)}{E}\frac{3P}{h}$$

$$B = \frac{1-\mu^2}{E}\frac{126P}{h}$$

$$C = \frac{3(1+\mu)}{E}\left[(1-\mu)P - \frac{1}{2}\mu\rho g h^2\right]$$

$$D = -216\frac{1-\mu^2}{E}P$$

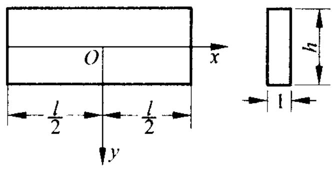
最后可求得墙体轴线在 x 方向的位移表达式为

$$(u)_{x=0} = -\frac{1-\mu^2}{E}\frac{2P}{h^3}(y^3 + 6hy^2 - 63h^2y + 108h^3)$$

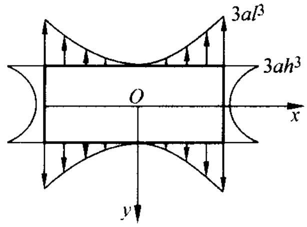
题 2-9

已知函数 $\varphi=a(x^4-y^4)$，试检查它能否作为应力函数？若能，试写出应力分量

(不计体力),并求出图 2-8(a)所示矩形薄板边界上的面力。



(a)



(b)

图 2-8

解:由 $\varphi=a(x^4-y^4)$,得

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=24a,\quad \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=-24a$$

代入双调和方程

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=24a+0-24a=0$$

即所给函数满足双调和方程,故可作为应力函数。

应力分量为

$$\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-12ay^2\\ \sigma_y=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=12ax^2\\ \tau_{xy}=-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0\end{cases}$$

利用边界条件

$$\begin{cases}\sigma_x l+\tau_{xy}m=\bar{f}_x\\ \tau_{xy}l+\sigma_y m=\bar{f}_y\end{cases}$$

上边界:$l=0$, $m=-1$, $\bar{f}_x=0$, $\bar{f}_y=-\sigma_y=-12ax^2$

下边界:$l=0$, $m=1$, $\bar{f}_x=0$, $\bar{f}_y=\sigma_y=12ax^2$

左边界:$l=-1$, $m=0$, $\bar{f}_x=-\sigma_x=12ay^2$, $\bar{f}_y=0$

右边界:$l=1$, $m=0$, $\bar{f}_x=\sigma_x=-12ay^2$, $\bar{f}_y=0$

面力的分布如图 2-8(b)所示。

题 2-10

试证函数 $\varphi=\frac{qx^2}{4}\left(-\frac{4y^3}{h^3}+\frac{3y}{h}-1\right)+\frac{qy^2}{10}\left(\frac{2y^3}{h^3}-\frac{y}{h}\right)$是一个应力函数,并指出它在图 2-9(a)所示矩形板和坐标系中能解决什么问题(设矩形板长为 l,高为 h,体力不计)。

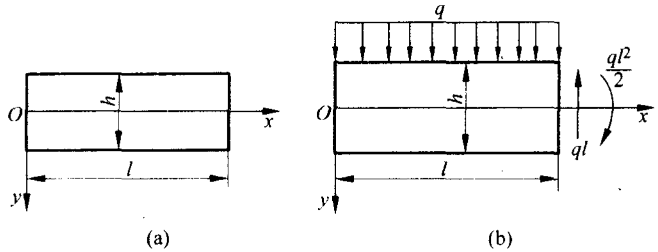


图　2-9

解：双调和方程为

$$\nabla^4\varphi=\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0 \tag{1}$$

将函数 φ 代入调和方程式(1)，

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=0,\quad \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=24\frac{qy}{h^3},\quad 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=-24\frac{qy}{h^2}$$

式(1)显然满足，故 φ 可作为应力函数。

应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{6qx^2y}{h^3}+\frac{4qy^3}{h^3}-\frac{3qy}{5h}\\ \sigma_y&=\frac{q}{2}\left(-\frac{4y^3}{h^3}+\frac{3y}{h}-1\right)\\ \tau_{xy}&=\frac{qx}{2}\left(\frac{12y^2}{h^3}-\frac{3}{h}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

边界条件

$$\left.\begin{aligned}l\sigma_x+m\tau_{xy}&=\bar{f}_x\\ l\tau_{xy}+m\sigma_y&=\bar{f}_y\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在板的上边界处：　$y=-\frac{h}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant l$

$$l=0,\quad m=-1,\quad \bar{f}_x=0,\quad \bar{f}_y=q$$

代入式(3)，得　$\sigma_x=\frac{3qx}{h^2}-\frac{q}{5},\quad \sigma_y=-q,\quad \tau_{xy}=0$

在板的下边界处：　$y=\frac{h}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant l$

$$l=0,\quad m=-1,\quad \bar{f}_x=0,\quad \bar{f}_y=0$$

代入式(3)，得　$\sigma_x=\frac{3qx}{h^2}+\frac{q}{5},\quad \sigma_y=0,\quad \tau_{xy}=0$

在板的左端边界处：

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com