工程振动基础知识要点及习题解答

邢誉峰 著

北京航空航天大学出版社

工程振动基础
知识要点及习题解答

邢誉峰　著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书给出了北京市高等教育精品教材《工程振动基础》的各章知识要点、例题分析以及习题答案。对第1章、第4章和第6章给出了补充例题，对全书各章都增加了偏重工程应用、内容丰富的补充习题及解答。其中除了和教材内容直接相关的题目外，还包括与转子动力学、陀螺力、Timoshenko梁、变高度和变厚度梁频率计算，以及用刚硬翼段二维模型详细讨论机翼颤振特性和虚拟激励方法等有关的题目。这些补充题的求解过程具有技巧性、启发性。

本书在文字上力求准确、精练，强调分析问题的正确思路，可以作为工程力学、航空航天工程、机械工程和土木工程等工程专业的振动力学课程的辅助教材，也可以作为从事与机械振动有关工作的工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程振动基础知识要点及习题解答/邢誉峰著. —北京：北京航空航天大学出版社，2007.9

ISBN 978-7-81124-107-5

Ⅰ.工… Ⅱ.邢… Ⅲ.工程力学—振动理论—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.TB123

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第080096号

工程振动基础

知识要点及习题解答

邢誉峰 著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(100083) 发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：787×960 1/16 印张：14.5 字数：325千字

2007年9月第1版 2007年9月第1次印刷 印数：2 000册

ISBN 978-7-81124-107-5 定价：23.00元

前言

随着工程技术的发展，振动问题在各个工程领域愈来愈受到重视。机械振动理论及其分析技术已经逐渐成为工程技术人员必备的知识。

在航空航天、机械、土建和水利等领域所设专业的本科生和研究生的教学中，振动力学是一门重要的专业基础课程。这门课程要求学生掌握机械振动的基本理论及其分析方法，并能够初步用理论和数值模拟技术研究和解决工程中存在的振动问题。

《工程振动基础》全书除绪论外共 10 章，主要内容包括：单自由度系统的振动、多自由度系统的振动、连续系统的振动，以及线性系统固有振动特性的近似分析方法、非线性振动及其近似分析方法、自激振动和参数振动、混沌振动、振动问题的稳定性理论和随机振动。全书注重基本概念、基本理论和方法以及应用，注重振动过程的物理分析。全书各章附有复习思考题，以强化基本概念、基本方法和基本理论；还附有适量的习题，以加深对内容的理解和运用。

自《工程振动基础》一书出版后，作者收到了读者和兄弟院校教师的大量信件，询问是否有习题解答。本书正是为了满足这些要求和促进工程振动教学工作更好地开展而编写的。

本书总结了《工程振动基础》各章的主要内容，给出了例题和各章习题的详细解答，为个别章节补充了例题。另外，还为各章增加了偏重工程应用、内容丰富的补充习题及解答。在补充题中除了和教材内容直接相关的题目外，本书第 1 章和第 2 章还包括转子动力学题目；第 3 章给出了关于离心摆式吸振器原理和与陀螺力有关的题目；第 4 章给出了关于 Timoshenko 梁和用波动方法分析杆受质量冲击的题目；第 5 章给出了如何用瑞利–里兹法来近似计算变高度和变厚度梁频率

的题目；第 6 章给出了非线性系统亚共振解和绘制复杂系统极限环的题目；第 7 章给出了几类由线性弹簧组成的典型非线性题目；第 8 章给出了用刚硬翼段二维模型详细讨论机翼颤振的题目；第 9 章给出了双摆系统和极限环确定及其稳定性分析的题目；第 10 章给出了关于虚拟激励方法的题目。这些补充题的求解过程具有技巧性、启发性。

编写本书的指导思想是力求文字准确、精练，强调分析问题的正确思路。本书吸取了国内外振动力学教材的精彩习题和例题。在本书编写过程中，得到了作者的学生罗务揆、冯伟、杨阳和黄天力等人的帮助。本书承蒙北京航空航天大学陈桂彬教授的审阅并提出了许多宝贵意见，作者谨表示衷心感谢。

限于水平，书中若有不足或错误之处，恳请读者指正。作者希望本书的出版，对教师备课、学生自学和工程技术人员应用振动力学理论解决工程问题有一定的裨益。

作　者

2007 年 4 月

目 录

第 1 章　单自由度线性系统的自由振动

知识要点和例题分析

1.1　无阻尼系统的自由振动

1.1.1　振动微分方程的建立

本章给出的建立系统微分方程的四种方法中，除了能量守恒定律方法适合保守系统之外，牛顿运动定律、拉格朗日方程方法和虚功原理都是普遍适用的方法。

1. 牛顿运动定律

牛顿运动定律可以用于质点、刚体和结构微元体运动微分方程的建立。对于自由度数比较少、受力分析也不复杂的系统，一般可以考虑用牛顿运动定律来建立系统的运动微分方程。牛顿运动定律适合惯性坐标系中物体各种运动的描述，但要注意有关物理量的方向。

2. 拉格朗日方程

拉格朗日方程中用到的广义坐标通常不要求具有明确的方向和物理含义，对于动能和势能函数比较容易确定的系统，都可以选择这种方法。对于复杂系统，这种方法更具有优越性。拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}=Q_j \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{1-1}$$

式中：n 为系统自由度数；

q_j 为第 j 个广义坐标；

U 为弹性元件和保守力提供的系统势能；

T 为惯性元件提供的系统动能；

Q_j 为与广义坐标 q_j 对应的广义力，它包括阻尼力和外加激振力等非保守力。

用拉格朗日方程建立系统振动微分方程的关键是，不但要写出系统的势能和动能函数，而且要通过虚功来考虑与广义坐标对应的广义力。要注意广义力和广义坐标是一一对应的。

注意，势能的定义是有参考点的，参考点的位置不同，势能函数就不同，但不影响振动微分方程的形式。

3. 能量守恒定律

保守系统的机械能守恒定律常用的两种形式为

$$T_{\max}=U_{\max} \tag{1-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U)=0 \tag{1-3}$$

根据式(1-3)可以建立保守系统自由振动微分方程。由式(1-2)可以求系统固有振动频率。式(1-2)和式(1-3)构成用机械能守恒定律分析无阻尼系统自由振动的理论基础。机械能守恒定律适合线性和非线性的单自由度和多自由度系统。

4. 虚功原理(也称为虚位移原理)

当弹性体处于平衡状态时,外力在虚位移上所作的外虚功等于弹性体的内虚功。反之,对于任意虚位移,若弹性体的外虚功等于内虚功,则弹性体一定处于平衡状态。

1.1.2 振动微分方程的求解与振动特性分析

描述系统动态响应的三要素是振幅 A、相位 $\omega_0 t+\varphi$ 和固有频率 $\omega_0=\sqrt{k/m}$。不论离散系统和连续系统,还是线性和非线性系统,只要知道了这三要素的特性,也就知道了系统的全部动态特性。

振幅是指系统作简谐振动时,描述振动状态的物理量(通常指位移)偏离平衡位置的最大值。

相位是指物理量(位移等)随时间作简谐变化时,任意时刻对应的角变量。$t=0$ 时对应的相位就是初相位,它是相对时间坐标原点而言的。相位的单位是度和弧度,分别记为(°)和 rad。

固有频率为线性系统固有振动的频率,单位通常是弧度每秒,记为 rad/s。值得注意的是,对于单自由度系统,固有频率和自由振动频率相同,ω_0 和 f 都是固有频率;而对于多自由度系统,固有频率和自由振动频率是不一致的。

无阻尼线性系统的自由振动特性为

① 简谐运动 $x(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$;

② 振幅和初相位由初始条件确定,即

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2},\qquad \varphi=\arctan\frac{x_0\omega_0}{\dot{x}_0}$$

例 1.1-1 说明牛顿运动定律和拉格朗日方程的应用;给出微幅振动(相当于静力学中的小变形)的处理方法。

例 1.1-2 说明如何用能量守恒定律来确定系统的固有频率,并给出振动学中的一个重要原理——瑞利商(Rayleigh quotient)。

例 1.1-3 一般的工程构件如梁和杆是可以转化为弹簧来近似处理的,本例以梁为例说明了一种转化方法。

例 1.1－4　试用能量方法考虑弹簧质量对系统固有频率的影响。

解： 通常弹簧的质量是忽略不计的。若需要考虑弹簧的质量，本例说明了一种方法。下面给出另外一种方法（参见第 4 章杆的固有振动分析方法）。

把弹簧等效成为一个均匀杆，其刚度为 kl，ρ 为线质量密度，$u(\xi,t)$ 为位移函数。弹簧的振动微分方程为

$$kl\frac{\partial u^2(\xi,t)}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2} \tag{a}$$

其边界条件为

$$u(0)=0,\qquad kl\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=-m\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} \tag{b}$$

通过分离变量方法，根据边界条件(b)可以求得质点弹簧系统的固有频率方程，即

$$\frac{\rho l}{m}=\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\tan\left(\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\right) \tag{c}$$

式(c)的右端项为

$$\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\tan\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}=\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\left\{\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}+\frac{1}{3}\left(\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\right)^3+\frac{2}{15}\left(\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\right)^5+\cdots\right\}$$

或

$$\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\tan\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}=\left(\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\right)^4+\frac{2}{15}\left(\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\right)^6+\cdots \tag{d}$$

根据式(c)和式(d)得

$$\frac{\rho l}{m}=\left(\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\right)^4+\frac{2}{15}\left(\omega\sqrt{\frac{\rho l}{k}}\right)^6+\cdots \tag{e}$$

若只取式(e)右端的第 1 项，则有

$$\omega=\sqrt{k/m} \tag{f}$$

若只取式(e)右端的前两项，则有

$$\omega^2=\frac{3}{2}\frac{k}{\rho l}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4}{3}\frac{\rho l}{m}}\right)$$

而

$$\sqrt{1+\frac{4}{3}\frac{\rho l}{m}}=1+\frac{1}{2}\frac{4}{3}\frac{\rho l}{m}-\frac{1\times1}{2\times4}\left(\frac{4}{3}\frac{\rho l}{m}\right)^2+\cdots$$

因此

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\rho l}{m}\right)} \tag{g}$$

还有另外一种考虑式(e)右端前两项的方法：把式(f)代入式(e)右端的第 2 项，则同样可

以得到式(g)。从式(g)可知,考虑了弹簧质量,系统的固有频率变小。实际上,由于通常$\frac{\rho l}{m}<1$,因此有

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\frac{\rho l}{m}\right)}\approx 1+\frac{1}{3}\frac{\rho l}{m}$$

这样式(g)还可以进一步改写为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+\rho l/3}} \tag{h}$$

以此类推,还可以求得精度更高的解。从式(h)可以看出,忽略弹簧质量使计算的固有频率偏高。

1.2 具有黏性阻尼系统的自由振动

1.2.1 运动微分方程的建立与求解

黏性阻尼的定义为

$$F_d=-c\dot{x}$$

根据牛顿运动定律和拉格朗日方程可以得到具有黏性阻尼系统的自由振动方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \tag{1-4}$$

对于欠阻尼情况($\xi<1$),系统方程(1-4)的特征根为$\lambda_{1,2}=-\xi\omega_0\pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$。方程(1-4)的通解为

$$x(t)=Ae^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_d t+\varphi) \tag{1-5}$$

$$\omega_d=\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \tag{1-6}$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0+\xi\omega_0 x_0}{\omega_d}\right)^2},\qquad \varphi=\arctan\frac{x_0\omega_d}{\dot{x}_0+\xi\omega_0 x_0} \tag{1-7}$$

若$c=0$,则系统蜕化到无阻尼系统;若初始位移等于零,则初始相位等于零。

1.2.2 阻尼振动特性分析

临界阻尼和阻尼率的定义为

$$c_c=2m\omega_0=2\sqrt{mk},\qquad \xi=\frac{c}{c_c}$$

黏性阻尼系统的自由振动特性如下:

① 衰减振动,其幅值变化规律$Ae^{-\xi\omega_0 t}$由方程特征根λ的实部$-\xi\omega_0$确定,振动频率就是λ的虚部$\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$,因此说方程(1-4)的特征根决定了系统的动态变化特性。衰减振动是指

系统受初始扰动后不再受外界激励作用，因受到阻尼力造成能量损失而振幅渐减的振动，也称为阻尼振动。

② 振幅的对数衰减率（任意相邻的两个振幅幅值之比的自然对数）为

$$\delta = \xi\omega_0 T_{\mathrm{d}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

③ 衰减振动也可以看成周期运动，其振动频率为 ω_{d}，其周期为 $T_{\mathrm{d}}=2\pi/\omega_{\mathrm{d}}$。

例 1.2-1 综合运用阻尼系统和无阻尼系统的关于频率、周期和阻尼率的公式来计算摩擦系数。

1.3 等效黏性阻尼

把非黏性阻尼等效成为黏性阻尼的原则是：令非黏性阻尼在一个简谐运动周期内耗散的能量与黏性阻尼在同一周期内耗散的能量相等，从而求出等效黏性阻尼系数 c_{eq}。

1.4 相平面方法

二维相空间就是相平面。

1.4.1 相平面、相轨迹与奇点

自治系统 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})=0$ 的相轨迹方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

不含时间微分的形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f(x,y)}{y} \tag{1-9}$$

与系统运动状态一一对应的相平面上的点称为相点。力学系统的运动状态可以由相点在相平面上随时间变化的曲线来描述，该曲线被称为相轨迹。相平面内使方程(1-9)右端项的分子和分母同时为零的点称为相轨迹的奇点。所有相轨迹通过的奇点称为结点；有两条相轨迹相交的奇点称为鞍点；所有相轨迹以螺旋线方式汇聚在一起的奇点称为焦点；闭合相轨迹的中心称为中心奇点。

1.4.2 保守系统自由振动

利用能量守恒方法可以绘制保守系统的相轨迹。保守系统方程为 $\ddot{x}+f(x)=0$，其对应的相轨迹方程为

$$\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E \tag{1-10}$$

可以根据势能 $U(x)$ 的二阶导数的正负来判断保守系统奇点的稳定性，即

$$U''(x_s) = f'(x_s) = \begin{cases} > 0 & \text{（奇点稳定）} \\ < 0 & \text{（奇点不稳定）} \end{cases}$$

例 1.4-1　给出具有正或负刚度的保守系统的相轨迹特性；说明如何通过相轨迹计算周期；说明即使初始能量等于零，负刚度系统也可以产生运动。

1.4.3　非保守系统自由振动

阻尼系统相轨迹的常用绘制方法包括等倾线方法、Jacobsen 的 Delta 方法、Linenard（李纳）方法和 Pell 方法等。等倾线方法为普遍适用方法，Linenard 方法对具有线性恢复力和某些非线性阻尼的自治系统比较合适，Pell 方法适合含有非线性恢复力和非线性阻尼力的自治系统。具有非线性阻尼力和线性恢复力的系统是比较简单和常见的非线性系统。要求掌握 Linenard 方法和等倾线方法。

把相轨迹切线斜率 dy/dx 相同的点连接起来形成的曲线称为等倾线。

例 1.4-2　针对黏性阻尼系统给出等倾线的使用方法；说明焦点和结点的区别。

例 1.4-3　针对干摩擦系统，说明 Linenard 方法的应用和干摩擦系统相轨迹的特殊性（一系列半圆组成）。

补充例题

补充例 1-1　利用拉格朗日方程建立图 1-1 所示系统的运动微分方程。

解：选择系统的静平衡位置为坐标原点和零势能点。系统的动能 T 和势能 U 为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \qquad U = \frac{1}{2}kx^2$$

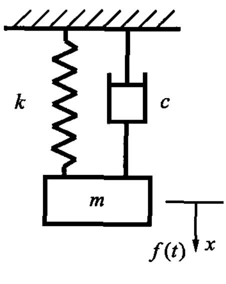

图 1-1　单自由度系统

阻尼力和外力作的虚功为

$$\delta W = -c\dot{x}\delta x + f(t)\delta x = [-c\dot{x} + f(t)]\delta x = Q\delta x$$

因此与广义坐标 x 对应的广义力为

$$Q = -c\dot{x} + f(t)$$

根据拉格朗日方程可以得到该非自治系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

补充例 1-2　如图 1-2 所示，弹簧 2 的刚度 $k_2 = k$，弹簧 1 为硬弹簧，其刚度系数为 $k_1 = k(1+\varepsilon x_1^2)$。用能量守恒定律建立系统的运动微分方程。

解答：系统的动能函数 T 和势能函数 U 分别为

$$T=\frac{1}{2}(m\dot{x}_1^2+m\dot{x}_2^2)$$

$$U=\frac{1}{2}\left[kx_1^2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}x_1^2\right)+k(x_1-x_2)^2\right]$$

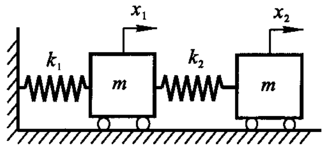

图 1-2　两自由度系统

根据式(1-3)得

$$(m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2+\varepsilon kx_1^3)\dot{x}_1+(m\ddot{x}_2+kx_2-kx_1)\dot{x}_2=0$$

由于坐标 x_1 和 x_2 相互独立，并且对任何时间上式都成立，因此 $\dot{x}_1$ 和 $\dot{x}_2$ 的系数应该为零，即

$$m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2+\varepsilon kx_1^3=0$$

$$m\ddot{x}_2+kx_2-kx_1=0$$

此即该两个自由度非线性系统的运动微分方程。

习题及解答

1-1　下列运动是否为周期振动？若是，求出其周期。

① $x(t)=8\sin^2 6t$

② $x(t)=\tan^2 t$

③ $x(t)=\cos 3t+6\sin 3.5t$

④ $x(t)=8\sin 4t+6\sin^2 2.4t$

解答：由数学分析理论可知，如果周期函数 $f(t)=f(t+T)$ 在一个周期区间 $[0,T]$ 内分段单调连续，则它可以展开成为如下傅里叶级数（$T=2\pi/\omega_0$，ω_0 为基频）

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t) \tag{1}$$

式(1)的含义是，周期振动可以用傅里叶级数分解成为各阶谐波分量的叠加，并且组成周期振动的各阶谐波分量的频率是基频 ω_0 的整数倍，即周期运动具有频率分别为 $\omega_0,2\omega_0,3\omega_0,\cdots,n\omega_0,\cdots$ 的谐波分量。

反过来，对于任意两个周期运动的叠加，如

$$x(t)=a\cos\omega_1 t+b\sin\omega_2 t \tag{2}$$

若它们的频率是可以通约的，即可写为

$$\omega_1=n\omega_0,\qquad \omega_2=m\omega_0 \tag{3}$$

式中：n 和 m 为互质（素）整数（除了 1 之外没有其他公因数），则它们合成的运动具有周期性，并且基频为

$$\omega=\omega_0 \tag{4}$$

也就是说，两个可以通约的不同频率的简谐振动，它们的合成运动是周期运动；否则是非周期

运动。下面分别求解 4 个小题。

① 由于 $x(t)=8\sin^2 6t=4(1-\cos 12t)$，因此是周期运动，其周期是 $2\pi/12=\pi/6$；

② 由于 $x(t)=\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}-1=\dfrac{2}{1+\cos 2t}-1$，因此是周期运动，其周期为 $2\pi/2=\pi$；

③ $x(t)=\cos 3t+6\sin 3.5t$ 中两个谐波频率可以写为

$$\omega_1=3=6\times\frac{1}{2},\qquad \omega_2=\frac{7}{2}=7\times\frac{1}{2}$$

令 $\omega_0=1/2$，则 $x(t)$ 是基频为 ω_0 的周期运动，周期为 $2\pi/\omega_0=4\pi$。

④ $x(t)=8\sin 4t+6\sin^2 2.4t=8\sin 4t+3(1-\cos 4.8t)$ 中两个谐波频率可以写为

$$\omega_1=4=5\times\frac{4}{5},\qquad \omega_2=\frac{24}{5}=6\times\frac{4}{5}$$

因此 $x(t)$ 是基频为 $\omega_0=4/5$ 的周期运动，周期为 $2\pi/\omega_0=2.5\pi$。

1-2　求 $x_1=5e^{i(\omega t+30°)}$ 与 $x_2=7e^{i(\omega t+90°)}$ 的合成运动 x，并且求 x 与 x_1 的相位差。

解答： 合成运动 x 为

$$x=5e^{i(\omega t+30°)}+7e^{i(\omega t+90°)}=e^{i\omega t}(2.5\sqrt{3}+9.5i)=\sqrt{109}e^{i(\omega t+65.5°)}$$

x 与 x_1 的相位差为

$$65.5°-30°=35.5°=35°30'$$

1-3　求合成运动 $x=x_1+x_2+x_3$，式中：

$$x_1=3\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right),\qquad x_2=4\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right),\qquad x_3=5\sin\left(\omega t+\frac{3\pi}{4}\right)$$

解答：

$$\begin{aligned}x=x_1+x_2+x_3&=3\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)+4\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+5\sin\left(\omega t+\frac{3\pi}{4}\right)=\\&-\sqrt{2}\sin(\omega t)+4(\sqrt{2}+1)\cos(\omega t)=\\&9.76\sin(\omega t+1.7162)\end{aligned}$$

1-4　在图 1.1 所示的系统中，质量 m 只作上下振动，求其固有振动角频率。质量 m 位于弹簧 k_3 与 k_4 中央，弹簧 k_3 位于弹簧 k_1 与 k_2 中央，忽略刚棒的质量和惯性矩。

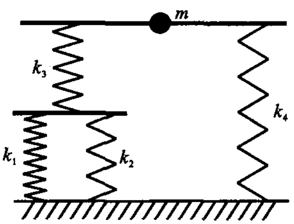

图 1.1　习题 1-4 用图

解答： 施加集中力 P 于质量 m。弹簧 $k_i(i=1,2,3,4)$ 的长度变化分别为 $\delta_i(i=1,2,3,4)$。设质量 m 下降的位移为 δ，合成弹簧常数为 k。

由力的平衡条件得

$$\left.\begin{aligned}k_1\delta_1+k_2\delta_2&=k_3\delta_3\\k_3\delta_3+k_4\delta_4&=P\end{aligned}\right\}\tag{1}$$