YOUXIANDANYUANFA
JIQIYINGYONG

有限单元法及其应用

孙建刚　闫庆芳　周利剑　编　著

哈尔滨地图出版社

有限单元法及其应用

YOUXIAN DANYUANFA JIQI YINGYONG

孙建刚　闫庆芳　周利剑　编著

哈尔滨地图出版社
·哈尔滨·

图书在版编目（CIP）数据

有限单元法及其应用 / 孙建刚，闫庆芳，周利剑编著.
哈尔滨：哈尔滨地图出版社，2007.9
ISBN 978-7-80717-749-4

Ⅰ.有… Ⅱ.①孙…②闫…③周… Ⅲ.有限元法—高等学校—教材 Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 140570 号

哈尔滨地图出版社出版发行
(地址：哈尔滨市南岗区测绘路 2 号　邮政编码：150086)
哈尔滨市动力区哈平印刷厂印刷
开本：787 mm×1 092 mm　1/16　印张：10.75　字数：320 千字
2007 年 9 月第 1 版　2007 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-80717-749-4
印数：1~1 000　定价：28.00 元

前　言

本书系统地介绍了有限元法的基本理论和方法、不同单元特性和分析比较，各种数值方法的原理及计算机实现，力求使读者掌握有限元法的基本概念、基本理论以及应用。

全书共8章，内容包括有限元法的基本方法和理论、线弹性有限单元的导出、弹性力学轴对称问题、弹性力学空间问题、弹性薄板、有限元法方程组的求解、有限单元法在大型储罐地震响应分析中的应用和储罐有限元分析结果与试验结果的对比。

参加本书编写工作的主要有：大连民族学院孙建刚（编写第一章、第五章、第八章），大庆石油管理局闫庆芳（第二章、第四章），大庆石油学院周利剑（第三章、第六章、第七章）。全书由大连民族学院孙建刚统稿。

本书可作为土建类专业的研究生、高年级本科生教材，也可供从事有限元教学的教师以及工程技术人员和科学工作者参考。

由于编者水平有限，书中缺点错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

作　者
2007年9月

目　　录

第一章 预备知识

第一节 引 言

有限元法是作为处理固体力学问题的方法提出的。它的基本思想起源于 20 世纪 40 年代初，随着科技进步和发展，特别是电子计算机的发展，有限元法才在结构分析矩阵方法的基础上迅速发展起来。目前有限元法已成为工程应用中备受欢迎而应用广泛的数值计算方法。

有限元的基本思想是用一个较简单的问题去处理复杂的问题，在求解过程中，实际问题已被较简单问题取代得出近似求解。这一方法现已广泛地应用于结构动力学、结构力学、固体力学、热力学、流体力学、电磁学之中。解决的问题已从大型结构的线性问题求解，发展到非线性问题的求解。

现代有限元法最初是 1965 年由 Turner, Claugh, Martin, Topp 提出的，发展至今，日趋完善。单元类型从一维的杆元、二维的平面元发展到三维的空间元、板壳元、管单元等；从常应变单元发展到高次单元；从一维位移场发展到多变量场；从结构的线弹性分析发展到结构的非线性分析；从静力分析发展到动、波动和稳定分析；从固体力学范畴发展到连续体力学的场问题范畴。

有限元法从物理上看：它是用仅在单元结点上彼此相连的单元组合体来代替待分析的连续体，通过单元的特性分析，求解整个连续体。

有限元法从数学上看：实施一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题，使问题大大简化，或者说使不能求解的问题能够求解。

有限元法与计算机技术结合而产生的著名程序有：SAP 系列，ADINA，ANSYS，ASKA，NASTRAN, STRUDL, SAFE, SAMS, ELAS, MARC, FLUNT, FEAP 等。

有限元法的推导，理论上借助于矩阵方法 、虚位移原理、势能原理、余能原理和其他变分原理。

第二节 矩阵符号约定

为书写方便将一般矩阵、行列阵采用简记方式，例如：

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \text{计为} \ [A] \qquad [a_1 \cdots a_n] \text{计为} \ \{A\} \qquad \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \text{计为} \ \{A\}^T$$

第三节 能 量 原 理

一、基本概念

1. 弹性应变函数

弹性体在外力作用下，不可避免地要产生变形，同时外力的势能也要产生变化，当外力缓慢地（不致引起物体产生加速度）加到物体上时，便可忽略不计系统的动能，如同时也略去其他的能量（如势能）的消耗，则外力势能的变化就会全部转化为应变能（一种势能）存储于物体外部。

下面给出单位体积应变能的表达式，为此以 σ_x 作用在微小单元 ABCD 两对边为例说明(图 1-1)。

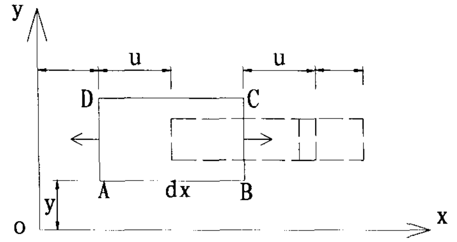

图 1-1

由图 1—1 可知，作用在单元 $ABCD$ 上的外力 AD 与边 CD 上的 σ_x。而 $\sigma_x$dydz 在 AD 边单位应变上所做的功 $-\sigma_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u$，$\sigma_x$dydz 为在 CB 边单位应变上所做的功为 $\sigma_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x)$。所以外力在 $ABCD$ 变形上所做的总功为：

$$W=\int_0^{\varepsilon x} \sigma_x d(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1—1}$$

y 向虽有变形，但没有外力作用，所以没有做功。上述 σ_x 所做的功，将全部转化为系统的应变能。如令总应变能为 U_t，则应有：

$$U_t=W=\int_0^{\varepsilon x} \sigma_x d\varepsilon_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=U_0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

此处，U_0 为单位体积应变能，即：

$$U_0=W=\int_0^{\varepsilon x} \sigma_x \mathrm{d}\varepsilon_x=\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x \tag{1—2}$$

推广到一般情况，即物体的总应变能为：

$$U_t = \iiint_V U_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1—3}$$

其中

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{1—4}$$

或记作张量表达

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \qquad (i,j=x,y,z) \tag{1—5}$$

上式中引入广义胡克定律，可得

$$U_O = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \tag{1—6}$$

由上式可以看出 U_0恒为正。U_0还可表达为

$$U_0 = \frac{1}{2}\left[\lambda e^2 + 2G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right] \tag{1—7}$$

式中：E，ν，G 分别为弹性模量、泊松比、剪切模量、λ 为拉格常数

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{1—8}$$

由式（1—6），（1—7）式可知下式成立

$$\frac{\partial U_0(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \tag{1—9}$$

$$\frac{\partial U_0(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \tag{1—10}$$

此处$U_0(\sigma_{ij})$，$U_0(\varepsilon_{ij})$分别为应力分量及应变分量表示的单位体积应变能（应变能密度），统称为应变能函数。对于理想弹性体，则每一确定的应变状态下，都是有确定的应变能。应变能函数是正定的势函数，所以弹性应变又称弹性势。

2. 应变能与应变余能

在线弹性状态下，单位体积的应变能为

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1—11}$$

以一维应力状态为例，U_0实际上是$\sigma_x - \varepsilon_x$平面内，应力应变曲线与ε_x轴和$\varepsilon_x = \varepsilon_x'$所包围的面积（图 1－2）。

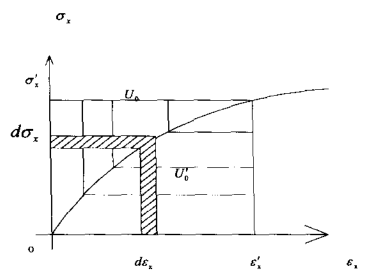

图 1—2

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_x'} \sigma_x \mathrm{d}\varepsilon_x \tag{1—12}$$

$$U_0' = \int_0^{\sigma_x'} \varepsilon_x \mathrm{d}\sigma_x \tag{1—13}$$

一般式

$$U_0' = \int_0^{\sigma_{ij}'} \varepsilon_{ij} \mathrm{d}\sigma_{ij} \tag{1—14}$$

U_0'称为单位体积的应变余能（也称为应力能），简称余能。

应变能U_0表示物体受外力作用时，储存于变形体中的能量，而应变余能U_0'的物理解释便不明显。图（1-2）中，它只表示$\sigma_x - \varepsilon_x$曲线与轴σ_x及$\sigma_x = \sigma_x'$所围成的面积，σ_x'为物体内指定时刻的应力，相应的应变为ε_x'，则$\varepsilon_x'\sigma_x' = U_0 + U_0'$。$U_0$与$U_0'$分别互补对方为$\varepsilon_x'\sigma_x'$矩形的面积。显然，在曲线$\sigma_x - \varepsilon_x$为直线时（即线弹性情况），$U_0 = U_0'$，即余能在数量上等于应变能。

余能是一个重要的概念，尽管它不像应变能那样有明确的物理意义，但引进余能的概念以后，讨论问题的范围扩大了。对余能的认识应强调以下三点：

（1）应变余能与应变能是互补的，面积

$$\varepsilon_x'\sigma_x' = U_0 + U_0';$$

（2）在应变能的积分式中，积分变量为应力分量

$$U_0' = \int_0^{\sigma_x'} \varepsilon_X \mathrm{d}\sigma_x;$$

（3）在线弹性时　　$U_0 = U_0'$。

二、虚位移原理

现考虑一个受一组力F_{bi}（分量为F_{bx}, F_{by}, F_{bz}）和面力P_i（分量为P_x, P_y, P_z）作用而处于平衡状态的物体，其体积为 V，面积为 S，则在体积内有：

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0 \tag{1—15}$$

在表面给定面力和位移，其分别分布于S_σ和S_u表面上（图 1－3）。

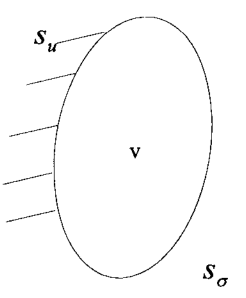

图 1-3

于是：

$$\sigma_{ij} n_j = \overline{P}_i (i,j = x,y,z) \text{（在 } S_\sigma \text{ 上）} \tag{1—16}$$

$$U = \overline{U} \qquad \text{（在 } S_u \text{ 上）} \tag{1—17}$$

现在设想一处于平衡状态的物体，由于某种原因，由其平衡位置得到了一个约束许可的、任意的、微小虚位移 δU_i（其分量为 $\delta u, \delta v, \delta w$），这时实际的力系在虚位移上所做的功叫虚功（见图 1-4）。

虚位移原理：在外力作用下处于平衡状态的可变形体，当给予物体微小位移时，外力的总虚功等于物体的总虚应变能。

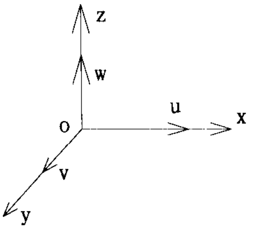

图 1-4

外力的总虚功 δW 为：

$$\delta W = \iiint_V F_{bi} \delta u_i dv + \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i ds \tag{1—18}$$

在物体产生微小虚变形的过程中，该物体的总虚应变能为

$$\delta U = \iiint_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}v \tag{1—19}$$

于是虚位移原理可表示为：

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}v = \iiint_V F_{bi} \delta u_i + \int_{S_\sigma} P_i \delta u_i \mathrm{d}s \tag{1—20}$$

即
$$\delta U = \delta W \tag{1—21}$$

其必要性和充分性证明从略。

但通过高斯散度定理可证明其必要性为：

$$\delta W = \delta U$$

由 $\delta W = \delta U$ 可证明物体处于平衡的充要条件为：

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0$$

和应力边条件：

$$\sigma_{ij} n_j - P_i = 0$$

由上述讨论可知虚位移应变方程（1—20）等价于平衡方程与应力边条件。因此满足变分方程（1—20）的解就一定满足平衡方程和应力边条件。由此，虚位移原理也可表示为：变形连续体平衡的必要与充分条件是对于任意微小虚位移，外力所做总虚功等于变形体所产生的总虚应变能。

应当特别指出，虚位移的成立与材料的本构关系无关。就是说虚位移原理对于弹性体、弹塑性体和理想塑性体等是适用的。

例 1-1：如图 1-5 所示的简支梁，跨中附有弹性支撑，受均布荷载 q 作用，试写出梁的挠曲线的微分方程和边界条件。

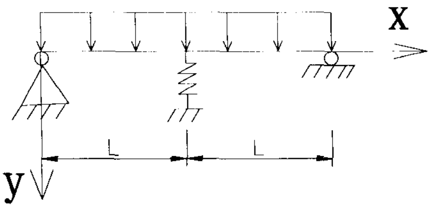

图 1-5

解：梁在平衡状态有附加虚位移 δU 时，虚位移原理给出

$$\delta U = \delta W \tag{a}$$

此处

$$\delta U = 2\int_0^L \left(\int_A \sigma_x \delta\varepsilon_x \mathrm{d}A\right)\mathrm{d}x \tag{b}$$

其中 $\varepsilon_x = -yv''$ ， $\sigma_x = -EV''y$ ， $\delta\varepsilon_x = -y\delta(v'') = -y(\delta v)''$

代入（b）式整理得:

$$\delta U = 2E\int_0^L V''(\delta V)''\mathrm{d}x\int_A y^2\mathrm{d}A = 2EI\int_0^L V''(\delta V)''\mathrm{d}x$$

由分部积分得:

$$\delta U = 2EI\left[V''(\delta V)'\Big|_0^L - V^{(3)}(\delta V)\Big|_0^L + \int_0^L V^{(4)}\delta V\mathrm{d}x\right] \tag{c}$$

如令弹簧内的反力为 F，则

$$\delta W = 2\int_0^l q\,\delta v\mathrm{d}x + F\delta v_c \tag{d}$$

此处 v_c 为梁在弹簧支承 c 处的挠度。由此（a）式化为:

$$2\int_0^l(EIV^4 - q)\delta v\mathrm{d}x + 2EIV''(\delta V)'\Big|_0^l - 2EIV^{(3)}(\delta V)\Big|_0^l + F\delta V_c = 0 \tag{e}$$

边界条件为 $(\delta V)'_L = 0$ ， $(\delta V)_0 = 0$ ， $(\delta V)_L = \delta V_C$

除 δv_c 外，均为任意，故欲使（e）式成立，必有:

$$\left(EIV''\right)_{X=0} = 0\text{，}\ 2\left(EIV^{(3)}\right)_{x=L} - F = 0 \tag{f}$$

挠度函数 V 满足:

$$EIV^{(4)} - q = 0 \tag{g}$$

及

$$(V)_{x=0} = 0\text{，}\ (V)'_{X=L} = 0 \tag{h}$$

三、最小势能原理

应变能函数

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \cdots + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{a}$$

及

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{b}$$

因 $$\{\varepsilon\}=[L]\{U\} \tag{c}$$

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix} \qquad \{U\}=\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix} \qquad [L]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix} \text{ 微分算子} \tag{d}$$

于是U_0又可表示为$U_0(u,v,w)$。

当存在应变能函数时，虚功方程可写为：

$$\iiint_v \delta U_0(u_i)\mathrm{d}v-\iiint_v F_{bi}\delta u_i\mathrm{d}v-\int_{S_\sigma} p_i\delta u_i\mathrm{d}s \tag{1—22}$$

假定当物体从平衡状态有微小虚位移时，物体的几何尺寸的变化略去不计。原来作用在物体上的体力F_{bi}、面力P_i，其大小和方向都保持不变。于是（1—22）中的变分符号可以移至积分号以外，令δE_t记作这个变分量，有：

$$\delta E_t=\delta\left[\iiint_v U_0(u_i)\mathrm{d}v-\iiint_v F_{bi}u_i\mathrm{d}v-\int_{S_\sigma} p_i u_i\mathrm{d}s\right]=0$$

于是有：

$$\delta E_t=\delta(U-W)=0 \tag{1—23}$$

其附加条件为：

$$u_i-\bar{u}_i=0\ （在 S_u 上）$$

式中的$\bar{u}_i$为已知量。

$$E_t=\int_v[U_0(u_i)-F_{bi}u_i]\mathrm{d}v-\iint_{S_\sigma} p_i u_i\mathrm{d}s \tag{1—24}$$

E_t称为总势能。

式（1—24）说明在给定的外力作用下，实际的位移使总势能的一阶变分取驻值（总势能最小）。

总势能最小证明从略，可参考有关弹性力学理论书。于是对上述的陈述，可得最小势能原理：在所有给定几何边界条件的位移场中，真实的位移场使物体的总势能取最小值。

例 1－2： 设有受分布荷载集度为 $q(x)$作用的简支梁（图 1-6）。试用最小势能原理导出梁的挠曲线方程。

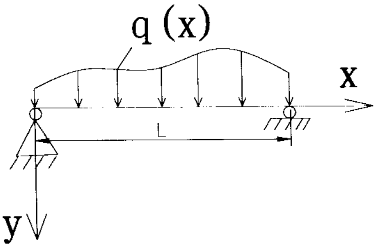

图 1－6

解：忽略切应力，考虑纯弯曲

$$\delta E_t=\delta(U-W)=0$$

于是有：

$$U=\int_v U_0\mathrm{d}w=\frac{1}{2E}\int_v\sigma_x^2\mathrm{d}v$$

其中：$\sigma_x=\frac{M_Y}{I}$ ，$M=-EI\frac{d^2w}{dx^2}$， $I=\iint y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}y$

由此：

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2\mathrm{d}x \tag{a}$$

$$W=\int_0^L qwdx \tag{b}$$

根据 $\delta E_t=0$，变分量为 δw，且

$$\delta w'=\delta\left(\frac{dw}{dx}\right)=\frac{d(\delta w)}{dx}=(\delta w)'$$

$$\delta EI\left(w''\right)^2=2EIw''\left(\delta w\right)''=2Ew''\delta\left(w''\right)$$

所以

$$\delta E_t=\int_0^L EIw''(\delta w)''dx-\int_0^L q\delta w\mathrm{d}x \tag{c}$$

由分部积分：

$$\int_0^l EIw''(\delta w)''\mathrm{d}x=EIw''(\delta w)'\Big|_0^l-\left(EIw''\right)'\delta w\Big|_0^l+\int_0^l EIw^{(4)}\delta w\mathrm{d}x \tag{d}$$

对于简支端:

$$EIw''(\delta w)'\Big|_0^l=EIw^{(3)}\delta w\Big|_0^l=0$$

于是得：

$$\int_0^l\left[EIw^{(4)}-q\right]\delta w\mathrm{d}x=0$$

由 δw 的任意性，得

$$EIw^{(4)}-q=0 \tag{e}$$

此即梁的挠曲线方程。

四、虚应力原理

如同最小势能原理，虚位移原理推导,本节讨论出于同样状态的物体，当应力有微小变化时的情况。为此引进虚应力概念。所谓虚应力是满足力的平衡条件及指定的力的边界条件的、任意的、微小的应力。虚应力记作$\delta\sigma_x,\delta\sigma_y\cdots,\delta\tau_{zx}$,简记为$\delta\sigma_{ij}$。虚应力的特征是使它改变后的应力分量：

$$\sigma_{ij}^{'}=\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij} \tag{a}$$

仍满足平衡条件和应力边界条件，但不满足变形协调方程。

于是有：

$$\sigma_{ij,j}^{'}+F_{bi}=0 \tag{b}$$

式中$F_{bi}(i=x,y,z)$是给定的体力，于是(b)式与产生虚力以前的平衡方程相减后，可得:

$$\delta\sigma_{ij,j}=0 \tag{1—25}$$

其应力边条件为：

$$\sigma_{ij}^{'}n_j=p_i^{'} \tag{1—26}$$

即：
$$(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})n_j=p_i+\delta p_i \tag{1—27}$$

与产生虚力前的边界条件$(\sigma_{ij}n_j=p_i)$相减后有：

$$\delta\sigma_{ij}n_j=\delta p_i \quad （S_u\text{上}） \tag{1—28}$$

$$\delta p_i=0 \quad （S_\sigma\text{上}）$$

现在物体处于给定条件下的平衡状态，位移分量和应变分量分别为u,v,w和$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\cdots,\varepsilon_{xy}$,且有：

$$\varepsilon_x-\frac{\partial u}{\partial x}=0,\cdots,\gamma_{xy}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad （在\ V内） \tag{1—29}$$

$$u-\overline{u}=0,\cdots,w-\overline{w}=0 \quad （在S_u\text{上}） \tag{1—30}$$

如物体内的应力分量有一微小虚应力，则有：

$$\begin{aligned}&\iiint_v\left[\left(\varepsilon_x-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta\sigma_x+\left(\varepsilon_y-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta\sigma_y+\cdots+\left(\gamma_{xy}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta\tau_{xy}\right]\mathrm{d}v+\\&\iint_{S_u}\left[(u-\overline{u})\delta p_x+(v-\overline{v})\delta p_y+(w-\overline{w})\delta p_z\right]\mathrm{d}s=0\end{aligned} \tag{1—31}$$

由分部积分，上式可化为：

$$\iiint\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v-\iint_{S_u}u_i\delta\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}s+\iiint_v\delta\sigma_{ij,j}u_i\mathrm{d}v+\iint_{S_u}u_i\delta p_i\mathrm{d}s-\iint_{S_u}\overline{u}_i\delta p_i\mathrm{d}s \tag{1—32}$$

由（1—25）和（1—26）可知，上式简化为：

$$\iiint_v\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v-\iint_{S_u}\overline{u}_i\delta p_i\mathrm{d}s=0 \tag{1—33}$$

如令外力虚功为：

$$\delta w' = \iint_{S_u} \overline{u}_i \delta p_i \mathrm{d}s$$

令物体的虚应力在实际应变上的总虚应变余能为：

$$\delta U' = \iiint_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \mathrm{d}v$$

则有：
$$\delta W' = \delta U' \qquad (1-34)$$

式（1—34）表示虚应力原理，又称虚功原理，可表述为：当物体处于平衡状态时，微小虚外力在真实位移上所做的总虚功，等于虚应力在真实应变上所完成的总虚应变余能。

附加条件：

$$\delta\sigma_{ij,j} = 0 \quad （在 V内）$$

$$\delta p_i = 0 \quad （在 S_\sigma 上）$$

由上讨论可以看出，虚应力原理与虚位移原理是在形式上互补的，与材料的本构关系无关。

应当指出，虚位移原理中包含了实际的外力和内力，可理解为虚位移原理是对系统平衡的要求，而虚应力原理包含有实际的位移和应变，可理解为对系统协调的要求，实际上（1—34）变分方程不难导出变形协调方程，这就是说式（1—34）等价于应变协调条件。于是按（1—34）求解问题时，对于所设解答，不必预先满足变形协调条件，而需使虚应力 $\delta\sigma_{ij}$ 满足物体的平衡和应力条件。

五、最小总余能原理

由虚应力原理可直接导出最小总余能原理。为避免混乱，今后把用应变表示的弹性应变能函数 $U(\varepsilon_{ij})$ 称为应变能函数，或应变能；而把用应力表示的应变余能函数，或应变余能（应力能）记作 $U'(\sigma_{ij})$。如在虚应力原理中引进广义胡克定律，并认为应变状态是有势的，及应变分量可由余应变余能函数导出。即

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_0'(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (1-35)$$

$$\delta U_0' = \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \qquad (1-36)$$

总应变余能的变分

$$\delta U' = \iiint_V \delta U_0'(\sigma_{ij}) \mathrm{d}v = \iiint_v \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \mathrm{d}v$$

总虚功：

$$\delta W = \iint \overline{u}_i \delta p_i \mathrm{d}s$$

于是（1—33）式变为：

$$\iiint_v \delta U_0'(\sigma_{ij}) \mathrm{d}v - \iint_S u_i \delta p_i \mathrm{d}s = \delta\left[\iiint_v U_0'(\sigma_{ij}) dv - \iint_{S_u} (\overline{u}_i p_i) \mathrm{d}s\right] = \delta(U' - W) = 0 \qquad (1-37)$$

在此情况下，附加条件为：

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0 \;（在 V 内） \qquad (1-38)$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad （在 S_\sigma 上） \tag{1—39}$$

如令 $E_t^{'}$ 为物体的总余能

$$E_t^{'} = \iiint_v U_0^{'}(\sigma_{ij}) \mathrm{d}v - \iint_{S_u} \overline{u}_i p_i \mathrm{d}s \tag{1—40}$$

则有：

$$\delta E_t^{'} = 0 \tag{1—41}$$

进一步分析，可证明： $\delta^2 E_t^{'} \geq 0$

故得下列最小总余能原理：在所有满足平衡方程和应力边条件的应力场中，其实的应力场使物体的总余能取最小值。最小总余能原理以及最小势能原理都适用于线性、非线性弹性体。

六、利用位移变分原理的近似解法

上述几种能量原理可分为三种类型：虚位移原理和最小总势能原理属于位移变分原理；虚应力原理和最小总余能原理属于应力变分原理；还有所谓混合型的一般变分原理。本节讨论利用位移变分原理的近似解法。

根据虚位移原理或最小势能原理，其变分方程等价于平衡方程和应力边界条件，故采用该变分方程求解，则选取的位移函数，无需预先满足应力边界条件，只需满足位移边界条件。如选取位移函数为

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x,y,z) \\ v &= v_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k v_k(x,y,z) \\ w &= w_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k w_k(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{1—42}$$

式中 a_k, b_k, c_k 为未知待定的任意函数，u_0, v_0, w_0 满足边界条件，即 $u_0 = \overline{u}, v_0 = \overline{v}, w_0 = \overline{w}$（在 S_u 上），而 $u_k, v_k, w_k (k = 1,2,\cdots,n)$ 为坐标的线性的假定函数，则满足：$u_k = v_k = w_k = 0 (k = 1,2,\cdots n)$（在 S_u 上）。这样无论系数 n 如何取值，位移函数总能满足位移边界条件。

对位移取一阶变分时，只需对系数 a_k, b_k, c_k 取一阶变分，

即

$$\delta u = \sum_{k=1}^{n} \delta a_k u_k(x,y,z)$$

$$\delta v = \sum_{k=1}^{n} \delta b_k v_k(x,y,z)$$

$$\delta w = \sum_{k=1}^{n} \delta c_k w_k(x,y,z)$$