

初等教育研究丛书

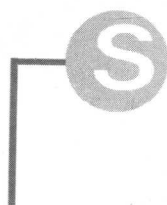
S HUXUE
FANGFA
GAILUN

数学方法概论

周春荔 著

广西教育出版社

初等教育研究丛书

 SHUXUE
FANGFA
GAILUN

数学方法概论

周春荔 著

广西教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学方法概论 / 周春荔著. — 南宁: 广西教育出版社,
2007

(初等教育研究丛书)

I. 数... II. 周... III. 数学课—教学研究—中小
学 IV. G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 150918 号

初等教育研究丛书

数学方法概论

周春荔 著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路 8 号 邮政编码: 530022

电话: 0771-5865797 5852408(邮购)

本社网址 <http://www.gxeph.com>

读者电子信箱 book@gxeph.com

全国新华书店经销 广西万泰印务有限公司印刷

*

开本 890×1240 1/32 9.375 印张 250 千字

2007 年 1 月第 1 版 2007 年 1 月第 1 次印刷

印数: 1—5000 册

ISBN 978-7-5435-4742-1/G·3779 定价: 18.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与承印厂联系调换



作者简历

周春荔 教授。1964年毕业于北京师范学院数学系。中国数学会会员，中国数学奥林匹克首批高级教练员，数学科学方法论研究交流中心副主任。现任华罗庚金杯少年数学邀请赛主试委员会副主任，全国“希望杯”数学邀请赛组织委员会常务委员、命题委员会副主任。

主要从事初等数学与数学教育、数学方法论与数学思想史、奥林匹克数学的综合研究与教学工作。著作有《数学观与方法论》《数学学科教育学》《初等几何基础教程》《中等数学解题研究》《数学创新意识培养与智力开发》《综合与构造》《尺规作图话古今》等。主编了全国高等教育自学考试教材《数论初步》及《数论初步自学辅导》。发表了多篇初等数学与数学教育、数学方法论等方面的论文。

内容简介

本书从数学理论与实践结合的视角,简明地介绍了科学的数学观和方法论,阐述了数学的主要特点和基本规律。通过数学科学“既是归纳的,又是演绎的”两重性,论述了数学教育的目的是发展学生的“理性思维方式”。向读者介绍了数学公理方法、抽象分析与模型方法、特例与反例方法、化归原则与关系映射反演方法以及多种数学探索、发现的思维方法,提出了“观察—猜想—证明或证伪”的思维链。通过大量的中小学数学教学中的事例,解说数学中的辩证思维。最后从数学文化的视野,论述了数学素质教育的意义。

序言

数学素质教育与数学方法论

每个人从小学到高中毕业要学 12 年数学. 上了大学, 不但学理工的要学数学, 学文史哲的也要学数学. 然而, 100 个人中顶多有一个人研究数学. 尽管多数人将来的工作很少用到那么高深的数学, 但数学始终是一门主课, 一门基础课. 大学的入学考试必考数学. 为什么呢? 原因是数学是人与自然的中介, 对人类、自然界、社会的应用非常广泛. 更深一层的理由是: “真正数学的旨趣” 在于 “即使是学生把教给他的所有知识都忘记了, 但还能使他获得受用终生的那些东西的教育, 才是最高最好的教育”. 这就是数学的精神、思想和方法对人的科学素养的陶冶. 著名的 X 射线的发现者伦琴就有这样的名言: “对科学工作者必不可少的, 第一是数学, 第二是数学, 第三还是数学.” 这是极为精辟的.

中小学的数学教育是如何影响学生的素质的? 是不是会做题就是数学素质好? 如何体验感悟数学的精神、思想和方法, 使受教育者形成和发展那些具有数学思维 (或数学家的思维) 特点的智力活动结构呢? 我们将采用漫谈的形式对数学方法论做点粗浅的涉猎式的介绍, 抛砖引玉!

一、什么是数学方法论

方法是一个基本概念, 它和点、线、面、体、运动、集合等概

念一样,不能逻辑地定义,只能概略地加以描述。

汉语中“方法”一词的起源可追溯到《墨子》一书,原意是量度方形之法。《墨子·天志中》说:“中吾矩者谓之方,不中吾矩者谓之方。是以方与不方皆可得而知之。此其故何?则方法明也。”^①这里“法”的含意是指一种“标准”和“规则”。后来,人们用“方法”这个词来翻译英语单词“method”,才出现了我们现代使用“方法”这个词的意义。

在英语等西方语言中,“方法”一词都源于希腊语,其本意是指“沿着某条道路行进”。现代人所理解的方法基本上并未离开这个意思。我们通常将人们在认识世界和改造世界的活动中所采取的方式、手段、途径等称为方法。这里的“方式”“手段”“途径”与“方法”几乎是同义,算不上严格的定义。

尽管如此,人们对“方法”的含义却所见相同,并未发生什么大的争论。传说中有个神仙能够点石成金,他把点成了金子的石头赐给求助于他的穷人。但是,有一个求助于他的人,总是摇头,表示不要金子,原来他想要神仙的手指头。我们所说的“方法”就相当于那个能点石成金的伸仙的手指头。

所谓“方法”就是“途径”和“道路”,而路是人走出来的。“方法”也是“工具”和“手段”。至于用什么工具和手段,是由有待解决的问题的内容决定的。

所谓“方法论”(methodology),就是把某种共同的发展规律和研究方法作为讨论对象的一门学问。各门学科都有自己的方法论,数学自然也不会例外,数学也有自己独特的方法。

我们将学习数学、研究数学、讲授数学和应用数学的活动统称为“数学活动”。所谓“数学方法”,顾名思义,就是人们从事数学活动时所使用的方法。随着数学方法的丰富发展,又产生了专门研究数学方法的学问。“数学方法论”就是对古往今来的各种数学方法进行概括、分类、评价以及如何运用加以研究的学问。

① 新编诸子集成·墨子问话(上).北京:中华书局,1985.208

一般认为,数学方法论主要是研究数学的发展规律,数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创造等法则的一门学问。^①

习惯上人们常用数学思想来指称某些具有重要意义、内容比较丰富、体系相当完整的数学成果。

例如坐标思想、极限思想、概率统计思想等,可是对这些例子来说,将“思想”换成“方法”同样适用。那么,数学思想与数学方法到底有什么区别呢?一般来说,数学思想是人们对数学内容的本质认识,是对数学知识和数学方法的进一步抽象和概括,属于对数学规律的理性认识的范畴。而数学方法则是解决数学问题的手段,具有“行为规则”的意义和一定的可操作性。同一个数学成果,当用它去解决别的问题时,就称之为方法;当论及它在数学体系中的价值和意义时,则称之为思想。例如“极限”,

当用它去求导数、求积分时,人们就说成是极限方法;当我们讨论它的价值,即使无限向有限转化时,将变化过程的趋势用一个数值加以表示时,就讲极限思想了。为了将这两重意思合在一起,于是也就有



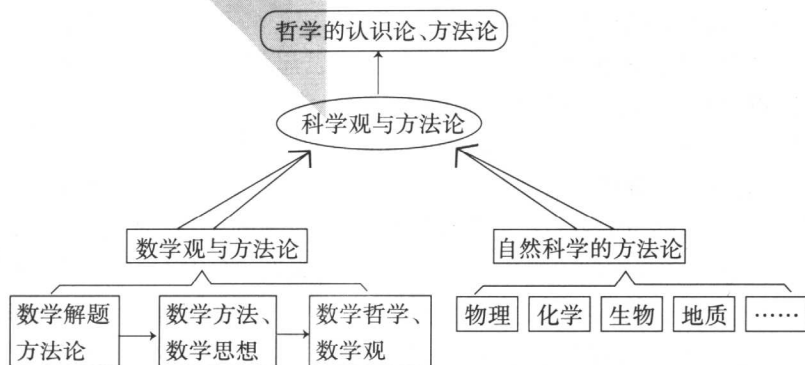
本书作者向徐利治教授(右)请教方法论问题

了“极限思想方法”之说。M. 克莱因(M. Klein)的巨著《古今数学思想》,其实说的都是“古今数学方法”,只不过从数学史角度看,作者更加注重那些数学大师们的思想贡献、文化价值,因而才称之为数学思想。

要将数学思想与数学方法严格区分开来是困难的,因此,人们常常对这两者不加区分,而统称为数学思想方法,这样会显得更为方便。

^① 徐利治. 数学方法论选讲. 武汉:华中工学院出版社,1983. 1

本书所谈的数学方法论,主要是指数学方法与数学思想这一层次.我们用下面的图示表示数学方法论的范畴.从中可以看到,数学方法论是数学联系哲学的纽带和桥梁.

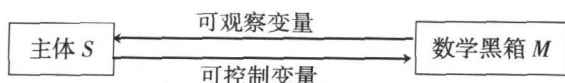


一个数学工作者的主要工作是研究数学,解决数学问题;通过探索,提出新概念,发现新命题,并给予逻辑上的证明.除此之外,他们还要总结数学中的思想和具体的方法.比如数论的方法,集合论的方法,极限的方法,公理化的方法等.这种方法性的研究已经比具体问题的研究高了一个层次.这些数学的具体方法与自然科学的具体方法一起,经过概括,提炼并结晶为科学的一般的方法论.再经过升华、发展,就概括成为哲学认识论中的方法论.可见,数学方法论是在数学与哲学之间的结缘地域,是联系数学与哲学的纽带.数学的新思想、新方法、新成果往往通过这一纽带为哲学提供新的养分,充实哲学的数学与自然科学的基础,同时,哲学思想也经常通过这一纽带对数学的具体研究工作产生影响.

二、本书介绍数学方法论的框架分析

根据控制论原理,我们把未被认识的数学规律看成一个“黑箱”,人类(世世代代的数学研究者)作为认识主体.所谓数学方法论,通俗地说,就是主体解开数学黑箱之谜的途径、手段和方法.

作为客体的数学规律,它与主体的关系可以归结为两个方面.一方面是客体对主体的作用,表现为主体能接收到的客体的信息.一般反映在客体的输出中,叫做这个客体的可观察变量.另一方面是主体对客体的控制作用,包括主体传递给客体的信息及主体对客体的控制作用、影响.它们反映在客体的输入中,一般称为可控制变量.对于一个客体(数学未知规律),我们用一组可观察变量和可控制变量构成的系统来描述它.



人们是用什么手段、途径打开数学黑箱 M 的呢? 依主体群的大小,黑箱的大小,可以得到对数学方法论结构的一种分类.

若主体是人类,黑箱 M 是整个数学的发展规律.这样构成的黑箱系统记作 (S, M) .解开这个黑箱系统,也就是探索关于数学发展的整体规律,属于宏观的数学方法论.它主要研究数学的性质、内容、方法和意义;数学的发展与生产实践和科学技术的关系,数学在科教兴国战略中的地位 and 作用;数学家成长的一般分析,数学学派的形成及对数学发展的影响;还有数学哲学问题,等等.这些都属于数学观的范畴.我们将在第一章作简要介绍.

数学研究人员虽然搞的是具体数学业务,但始终不能离开对数学整体规律进行研究的大背景.在具体数学课题的研究中,从学科发展整体历史得出的数学史分析法,就是一种重要的方法.

若把数学知识内容作为黑箱 M ,人们认识黑箱有两种不同的方法.一种是直接的方法,另一种是间接的方法.所谓直接的方法就是“打开”黑箱,由于数学黑箱是一种抽象的观念,“打开”黑箱可以理解为在实践中进行直接的检验、验证.从数学本身研究中,不用“打开”黑箱而探索黑箱内部构造的间接方法,就显得格外的重要.因此,逻辑分析论证的方法是数学研究中必要的,最终要使用的确认真理的方法.比如存在有多少种正多面体?人们很早就发现有正4面体、正6面

体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体，难道就只有这五种正多面体吗？你怎么就知道没有正 2008 面体呢？你一个地实验制作是永远做不完的。其实，朱德祥先生著的《立体几何复习与研究》中就记载有“只有上述五种正多面体”的使你确信无疑的演绎证明。这个事例表明间接方法——逻辑分析论证法对破译数学黑箱的独特作用。上述这种主体 S 是数学家或数学工作者群体，黑箱 M 指数学体系中的特定问题，这时涉及的打开黑箱方法的研究均属于微观的数学方法论。由于数学黑箱的抽象性、特殊性，研究黑箱 M 主要靠不直接打开黑箱的间接方式。这些间接方式主要包括论证推理与合情推理两类。“数学家的创造性工作成果是论证推理，即证明，但是这个证明是通过合情推理、通过猜想而发现的。”^①

对于论证推理，从属性上看，有经验归纳与演绎推理，我们将说明数学既是归纳的又是演绎的。“证明是数学的灵魂”，证明的标准就是要求从科学定律或理论推导出的结果与观察、实验相一致，这是本书第二章的内容。从论证方法的“结点”上看，我们将介绍划分与分类、数学猜想、数学公理方法、抽象分析模型方法、特例反例方法、化归原则与关系映射反演方法。这些内容属于第三章“数学中的逻辑分析与论证方法”。

对于合情推理，主要介绍从特殊到一般的概括法、联想与类比的相似法、物理实验的模拟法、逻辑矛盾的排除法，综合在一起是“观察—猜想—证明或证伪”的发现过程，以及数学发现的美学方法。使人们看到：数学发现是一个不断试错、逼近的探索过程，是一个合情推理的思维过程，是追求真、善、美的过程。这些内容写在本书第四章“数学的发现与合情推理”之中。

在第五章我们进入更加微观的领域，结合中小学数学教师的实际，谈谈中小学数学解题方法。

由于数学是辩证的辅助工具与表现方式，我们在第六章专门谈一

^① [匈牙利] G. 波利亚. 数学与猜想(第 1 卷). 北京: 科学出版社, 1984. 序言

些数学中的辩证方法,既介绍对一些数学中概念的矛盾分析,又阐明普遍联系的观点看数学是一个彻底辩证的方法,简要介绍数学的三次危机和四次思想大解放.

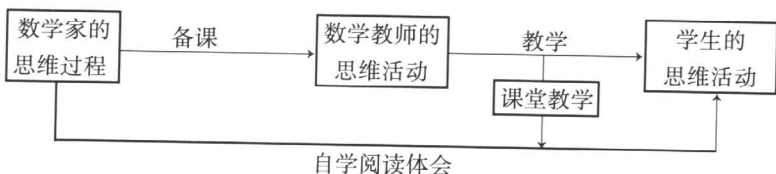
最后一章,我们又回到宏观层面从数学文化的视野,来审视我们的数学教育.

这就是我们以学习体会的方式尝试向中小学数学教育同仁介绍数学方法论的框架结构.

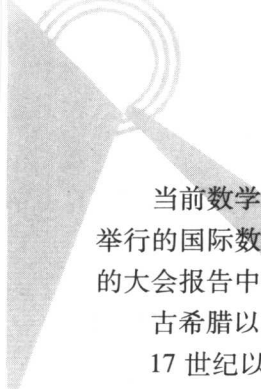
三、数学方法论与数学素质教育

数学教学过程,是学生在教师的指导下通过数学思维活动,学习数学家思维活动的成果,并发展数学思维能力的过程.因此,在数学教学中存在着教师的思维活动、学生的思维活动,还有一种或隐或现地存在于教材之中的(以信息形式表现的)数学家的思维活动.

数学家的思维活动以信息的形式凝固渗透于教材之中,通过备课,被数学教师所体会、所发掘、所感悟,使其“活化”,再通过课堂教学把它作为一种信息传递给学生,或由学生通过自学来自己获取这种信息.而这正是在数学教学中“只能够意会但不可言传”的那些东西.



数学教师是数学教学过程的组织者、积极参与者,起着调控教学过程的主导作用.学生是数学教学活动的对象、主要参加者,是数学学习活动的主体.教师的教学艺术,在于使学习过程与发展过程同步,保证学生思维结构的形成与发展,使之愈来愈和数学家的思维结构相似.要实现这一点,作为一个数学教师,必须具备数学方法论的基本知识,必须对数学家的主要思维方式有相当的了解.这样才有利于人才的培养,才能适应素质教育的要求,才能适应 21 世纪数学教学发展的需要.



当前数学发展的历史进入了一个新阶段. 在 2000 年 8 月于东京举行的国际数学教育大会上, 日本著名数学家藤田宏在长达 1 个小时的大会报告中指出, 人类历史上, 数学发展经历了以下四个阶段, 即

古希腊以欧几里得《几何原本》为代表的演绎数学;

17 世纪以牛顿、莱布尼茨为代表的微积分数学;

19 世纪到 20 世纪初以希尔伯特为代表的现代公理化数学;

20 世纪下半叶以计算机技术为代表的信息时代数学.

我们正处在一个崭新的数学时期之中. 信息时代的数学和牛顿时代的数学有许多相似之处: 数学问题来自实际, 数学和其他科学密切联系, 数学和生产力发展紧密相关, 数学的理论呈现蓬勃发展的态势. 数学已经发展到新阶段, 但是, 我们的思想也许还停留在前一个阶段上. 这种反差, 形成了数学教育改革的困难, 值得我们认真思考. 因此, 学习一些数学思想史, 了解一些数学方法论, 作为 21 世纪信息化时代的中小学数学教师是非常及时和完全必要的.

目录

第一章 数学的实践与认识.....	1
第一节 数学与现实世界.....	1
第二节 数学理论与实践	16
第三节 数学对象与特点	29
第二章 数学科学既是归纳的又是演绎的	45
第一节 数学史分析的方法论价值	46
第二节 经验归纳的方法论价值	50
第三节 思维实验的方法论价值	57
第四节 数学理性思维与演绎证明	65
第三章 数学的逻辑方法与分析方法	78
第一节 划分与分类	78
第二节 数学猜想	84
第三节 数学公理方法	92
第四节 抽象分析与模型方法.....	103
第五节 特例与反例方法.....	114
第六节 化归原则与关系映射反演方法.....	119

第四章 数学的发现与合情推理	135
第一节 从特殊到一般的概括法	136
第二节 联想与类比的相似法	144
第三节 模拟实验与数学实验	155
第四节 逻辑矛盾的排除法	159
第五节 数学发现的美学方法	163
第六节 “观察—猜想—证明”的发现过程	169
第五章 中小学数学解题方法论	183
第一节 题的概念与基本理论	183
第二节 数学解题的分析思路	186
第三节 几种数学解题探索方法	193
第四节 数形结合与构造方法	197
第五节 解题能力结构与思维	205
第六章 数学中的辩证分析方法	208
第一节 数学中的矛盾与矛盾分析	208
第二节 用普遍联系的观点看数学	240
第三节 数学中的三次危机与四次思想解放	253
第七章 数学文化与数学教育	262
第一节 数学观念与数学教育	262
第二节 数学美学与数学教育	266
第三节 数学文化与数学教育	272
第四节 数学是科学与人文的共同基因	278
主要参考书目	286



第一章 数学的实践与认识

第一节 数学与现实世界

数学与现实世界有没有关系？有怎样的关系？自古以来，数学家和哲学家有着各种不同的认识，一直进行着激烈的争论。对这个问题的种种看法可以归结为：是纯数学产生于纯思维呢？还是纯数学是某种起源于经验、来自外部世界然后又脱离外部世界的东西呢？

我们举两个认为纯数学产生于纯思维的例子。

例1 古代的柏拉图学派注意到了演绎推理所得的结论与观察的结果或归纳推理所得的结果非常符合。他们无法利用别的理由去说明这种符合，于是就认定数学乃是对于自然界和宇宙中内在的终极、永恒的实在的研究，认为对数学原理的认识，必定先于对于经验的确切解释。柏拉图曾描写苏格拉底和一个童仆的对话，这个童仆虽然从来没有学过数学，但通过启发，他能够解答数学难题。柏拉图说：为什么他能解答呢？就因为这种知识是他本来就有的，在经验以前已经先有的。

例2 康德(1724 ~ 1804)认为：“严格的数学命题永远是先天的判断，而非经验的判断。因为它们具有不能来自经验的必然性。如果有人对这还有异议，我愿意把我的论断限于纯数学，纯数学这个概念就暗示着它不包含有经验的知识，只包含纯先天的知识。”

以上两例都是把数学说成是与现实世界无关的、先于经验的。



如何正确认识数学与现实世界的关系呢?

辩证唯物主义既反对把数学看成是先验的与现实世界无关的,也反对把数学看成只是经验的科学,而认为纯数学是某种起源于经验、来自外部世界然后又脱离外部世界的东西。精确地说,纯数学的对象是现实世界的空间形式和量的关系,是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现,它是对现实世界的能动的反映。前半句话与唯心主义观点划清界限,后半句话与形而上学机械唯物论区分开来。

一、数学内容的现实起源

我们从数与形概念的起源来分析。

数学发展至今已形成了日益庞杂的分支。数与形这两个基本概念始终是整个数学的两大柱石。然而数与形这两个概念的起源离不开现实世界为我们提供的经验与材料。何以证明呢?

从历史方面看,数学发展史为我们提供了丰富证据。

数(shù)的概念起源于“数(shǔ)”,要数(shǔ),就得有被计数的现实物体为对象。原始人采用“结绳记数”,就是把猎获物等现实物体集合与绳子结的集合进行比较,比较的结果只表明猎获物个数正如绳子的结数那样多。不少原始部落尚残留有用手指、脚趾记数的遗迹。对原始部落的考察再现了人类认识数的过程的缩影。正如恩格斯分析指出的,“人们曾用来学习计数,从而用来作第一次算术运算的十个指头,可以是任何别的东西,但是总不是悟性的自由创造物。为了计数,不仅要有可以计数的对象,而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾及到数目的能力,而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果”。

形的概念也是从现实中抽象得来的。物质世界的物体以各种“形状”客观地存在着。“大自然以数学的语言讲话——这个语言的字母是:圆、三角形以及其他各种数学形体”(伽利略语),耸立的原始森林是直的,满月是圆的,水晶石是结晶体,蜂巢结构是极规则的多面体,向日葵种子的排列是按对数螺线排列的($\rho = ae^{k\theta}$),有些植物绕竿攀缘