



普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学

第二版

多元微积分及其应用

萧树铁 主编

章纪民 萧树铁 编著

高等教育出版社



普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学

第二版

多元微积分及其应用

萧树铁 主编

章纪民 萧树铁 编著

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材,是高等教育出版社2000年版“大学数学”的第二版。内容相当于第一版中的“多元微积分及其应用”。

本书内容包括:多元函数的连续性及微分、含参量的积分及重积分、曲线和曲面积分、平面和空间的数量场和向量场、复变函数、常微分方程及方程组等。在多元函数及向量值函数中本书强调了局部线性化的基本思想及其体现——微分。在重积分及多重积分中强调了物理的处理方式,避免了数学上繁琐的处理推导。复变函数是可供选择的内容,书中把可视为实二元向量值函数的部分内容归入相应部分作为例子,把其精华部分精炼地列为一章。常微分方程分为线性和非线性两部分,后者以典型的例子为主。

讲授本书可有较大的灵活性,教师可根据实际情况对内容进行适当删减,控制学时为60—80学时。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材,也可供其他专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

多元微积分及其应用/章纪民,萧树铁编著. —2版.

北京:高等教育出版社,2003.8(2006重印)

(大学数学/萧树铁主编)

ISBN 7-04-011913-7

I.多… II.①章…②萧… III.微积分—高等学校—教材 IV.0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第052496号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	北京民族印刷厂		
		版 次	2000年5月第1版
开 本	787×960 1/16		2003年8月第2版
印 张	19.75	印 次	2006年4月第4次印刷
字 数	360 000	定 价	20.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 11913-00

再版序言

提高大学数学教学质量的关键在于教师,但一套较好的教材也是重要的.随着我国大学数学教学内容改革的逐步深入,当前不少高等学校在基础数学教学内容的改革方面有了一些进展,例如单纯“面向专业”的观念有所淡化,代数课程的内容和学时有所增加,开设了一些新的课程,如“数学实验”和“随机数学”等;相应地有一批新教材出版.本套教材也在试用了两年多以后,进行了部分修订.这就是《大学数学》的第二版.

在保持原有的指导思想和风格的前提下,这一套教材由原来的五本:《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》及《数学实验》改编、扩充为七本,即:《微积分(一)》、《微积分(二)》、《多元微积分及其应用》、《流形上的微积分》、《代数与几何》、《随机数学》及《数学实验》,其中《流形上的微积分》是新编入的,《随机数学》正在在修订中,《数学实验》这次还来不及修订.除了这三本以外,另外四本改编的大致情况如下:

《微积分(一)》以原来的《一元微积分》中的第一篇,即“直观基础上的微积分”为其主要内容,力求做到“返璞归真”.除了进一步强调了计算和应用之外,还增加了一些对“极限”的朴素描述.

《微积分(二)》是把原来《一元微积分》中的第二篇,即“理性微积分”的内容作一些修改而成.其中为了使读者能更好体会数学分析中的一些基本手法,对用阶梯函数逼近的办法来处理定积分(即函数集扩张的思想)又作了一些改进.

《多元微积分及其应用》是把原书加以适当精简而成.原书中“复变函数”部分重新改写以求突出重点和更加精练;原书的“微分几何”部分移到《代数与几何》.

以上三本教材的习题也都作了调整.

《代数与几何》内容的变动是适当精简了代数的内容,增加了“行列式的几何意义”;几何部分则增加了“微分几何”的基本内容.

《流形上的微积分》与前面三本微积分教材合在一起,就显示了微积分从古典一直到现代的基本面貌,而且也是一个理解当代数学和物理一个不可缺少的台阶.虽然目前它并不属于数学基础课的范围,但可供对此有兴趣的学生选修.此外,对从事微积分教学而在这方面有所欠缺的教师来讲,不妨顺便补上这一课.

《代数与几何》中的几何部分包括了仿射、射影和微分几何,还有两个非欧几何的模型.它所需的学时不多(不超过 30 学时).这些内容的选取和写法是否合适,能在多大程度上体现数学理性思维和“数学美”,还有待进一步讨论.人们对大学数学课程中几何被严重削弱的缺陷已有共识,但又往往以“课内学时不够”或“没有用”等理由保留了这个缺陷.精简课内学时是必要的,内容的选取更可以讨论.希望有志于此的教师能先试开一些这方面的选修课,供大家来讨论.

这次内容的调整主要是为了增加这套教材的灵活性,不同的学校或专业在内容上可以有不同的选择:可以选择其中的某几本,或删去某些用小字写的部分.例如在清华,这套教材就初步适应了一个较为稳定的教学计划.即除了部分文科和艺术类专业以外,数学基础课的内容确定为:“微积分(一)”(3 学分),“微积分(二)”(3 学分),“多元微积分及其应用”(4 学分),“代数”(4 学分),“几何”(2 学分),“随机数学”(3 学分),“数学实验”(3 学分),其中 1 学分表示一个学期(实上课 15 周)上 15 节课(每节 45 分钟),另外适当安排少数课外习题课.这样数学基础课的总学时就是 330 学时,而其中被列为必修基础课的只有“微积分(一)”和“代数”两门.但实际上多数专业的学生几乎都选了大部分甚至全部数学基础课.

参加这一版改写工作的有朱学贤、郑建华、章纪民、华苏、居余马、萧树铁、李津、陈维恒等同志;谭泽光、白峰杉同志参加了讨论并提出很多好的意见.

编者于清华园

2002 年 10 月

序 言

长期以来,我国高等学校各类非数学专业的数学基础课都限于以微积分为主要内容的“高等数学”.面临 21 世纪各门知识的相互渗透和自身加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要,数学的作用将显得日益重要.而作为高等学校数学基础课的作用,除了作为各门学科的重要工具以外,它在提高人才全面素质中起着重要作用的培育理性思维和审美功能方面也应得到充分的重视.这就需要一部与之相适应的教材.

这套“大学数学”教材是在前国家教委“面向 21 世纪教学内容和课程体系改革”研究课题的支持下完成的.共有五本:《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》与《数学实验》.我们认为它们是 21 世纪高级人才应该普遍具备的数学基础.希望学生通过对它们的学习,能在掌握数学工具、提高理性思维和审美素质以及获取新知识的能力诸方面打下一个良好的基础.这种要求应该是针对任何专业的,只是在深度上及侧重的方面可能会有些区别.

在现行的《高等数学》中,微积分和数学分析之间的关系一直是一个难以处理的问题.19 世纪以前的微积分,以它的直观性和不断扩展的应用显示了数学的威力,但同时也暴露出其缺乏严格逻辑基础的缺点.诞生于 19 世纪的数学分析则以其逻辑的完美显示了数学的理性精神.这两个方面在教材中如果结合得好,可以激发初学者对数学的兴趣;但如果结合得不好,则很可能失去两者的活力而形成一堆枯燥的形式推理和繁琐的计算.在本书中我们力图按其本来的面目来编写,把一元微积分分为两部分:前一部分注重直观,着重训练应用和运算,后一部分则着重培育理性思维.

《多元微积分及其应用》的应用内容包括复变函数、微分几何及常微分方程.

《代数与几何》的代数部分基本上是线性代数,其内容也可分为两部分:一部分是以算法为主的求解一般线性方程组的内容;另一部分则主要研究线性空间及其上的线性映射.由于后者是前者的理论框架,而且它已成为近代数学普遍使用的基本语言,因此本书在集合、关系、运算、代数结构之后,较快地进入后者的讨论,并且通过数值表示把两者结合起来.

至于几何,尽管它在古希腊及 19 世纪有着辉煌的历史,在本世纪后半叶也进入了数学研究的主流行列,但近 50 年来,在我国高校的数学基础课中,却一直被压

缩到只剩下一点空间解析几何.这对培养学生的形象思维及理性思维的习惯极为不利.本书除了在多元微积分应用中加上古典微分几何基础(曲线和曲面)以外,在几何部分则增加了“仿射及射影几何”及非欧几何的两个初等模型.

本世纪后半叶以来,人们对事物认识演化的表现之一是从单纯的确定性思维模式进入确定—随机性模式.这一趋势还在发展,在高校数学教学中已受到广泛的关注.我们提出把“随机数学”正式列入基础课.本书内容的重点是通过几个典型范例的讨论,使学习者学会描述与表达随机性及随机变化的过程,即集中于对随机模式认识的训练.

这套系列教材中的《数学实验》有其独特性.它的知识内容包含数值方法、统计计算和优化计算的基本概念和初等方法,其目的是为学生自己动手解决问题提供必要的数学知识和软件平台.这是一门以学生独立动手,教师起辅导作用的课程.这类课程的教材如何编写,本书只是一种尝试.

以上是这套教材的一个简要介绍.这套教材既是一个统一的整体,各部分之间又有相对的独立性,可以独立讲授.在内容方面,它包含了现行的高等数学、线性代数、复变函数、微分方程、微分几何、数值分析、概率统计、优化计算等课程最基本的内容,而总学时则大为减少.我们在清华大学几个班的试验表明:全部讲完上述内容所需的学时大约为 340 左右.除数学实验外,如果再减掉一些内容,280 学时左右也是可以的,可由教师灵活掌握.

这套教材在有些大段落后面,附有一段“评注”,主要讲述这一段的重要思想和可能的发展,为有兴趣的学生进一步学习数学开一点小小的窗口.

大凡一本可用的教材,往往有两种写法:尽量多写一点,以便于教师选择;或尽量写少一点,以便于教师发挥.这套教材似乎偏于前者.因为这是一个尝试,对习惯讲授传统“高等数学”的教师来说,对这套教材可能不太适应,也许需要多一些说明.

这套教材原有的基础是清华大学出版社 1995 年出版、由萧树铁、居余马、葛严林等主编的三卷本《高等数学》.参与现在这套教材编写的有朱学贤、郑建华、章纪民、居余马、李海中、钱敏平、叶俊、姜启源、高立、何青等人.谭泽光、白峰杉、韩云瑞等同志为本书的编写作了大量的工作.高教出版社对本书的编写和出版始终给予热情的支持.

前面已说过,这套教材的编写是一个尝试,目的在于根据“百家争鸣”的精神,参与探索大学数学基础课在培养下一世纪高素质人才中所应起的作用,以及与之相适应的教材建设.我们衷心欢迎各方人士对这套教材评头论足,指出缺点和错误.如果这套教材能起到抛砖引玉的作用,我们就很满足了.

萧树铁

1999 年 6 月

第二版前言

自 2000 年本书第一版成书以来,我们又进行了两年的教学实践.在实践过程中对教材作了大量的修改,形成了现在大家看到的第二版.与第一版相比,改动较大之处有:

1. 重新安排了复变函数部分的次序.原版本中复变函数部分较为零碎,以至于学完之后学生缺少对复变函数整体的认识.新版将复变函数的内容分为两部分:可以用实函数研究的部分与复变函数本身特有的部分.前一部分放在各章节的相应位置,(例如在第一章第 1 节通过定义 Euclid(欧几里德)平面上两点的乘积引入复数及复数域的概念;在第 2 节由复平面到复平面的二元向量值函数引入复变函数,并讨论复变函数的极限和连续性;第 5 节通过向量值函数的可微性讨论复变函数的微分;第四章第 2 节通过平面向量值函数的第二类曲线积分引入复变函数的积分).由于这部分内容与多元向量值函数是平行的,我们没有花太多的笔墨去强调,有些甚至作为向量值函数的特例放在习题中让读者自己去探讨.后一部分是复变函数的精华,我们另辟一章(第六章)来单独讨论.

2. 重新安排了一些引出基本概念的例题,力图生动、活泼.我们希望这种改动能稍稍改变某些教科书常有的严肃面孔,使大家能稍微轻松地进行学习.

3. 在每章后面增加了“评注”,除了一些注解外,还提供了进一步思考的线索.

4. 基于本套教材的整体考虑,将微分几何的内容移到《代数与几何》分册.

第二版大致分为五部分.

第一部分是第一章多元函数及其微分学.在简单介绍 Euclid 空间的拓扑——开集,闭集,连通性等之后,将复数当作复平面上的向量引进其加减乘除运算.由 Euclid 空间距离的定义引出多元函数和向量值函数的极限与连续的概念,这些概念与一元函数是一致的.全微分作为一个重点被引进.我们之所以这么做,是因为与一元函数导数对应的是多元函数的全微分而非偏导数,而全微分的重要性经常被初学者所忽视.向量值函数的全微分是这一章的另一个重要内容,由此可得到 Jacobi(雅可比)矩阵.通过 Jacobi 矩阵的非奇异性我们得到隐函数(隐向量值函数)存在性定理及其微分法.从多元函数的 Taylor(泰勒)公式出发,我们研究多元函数的极值与条件极值.多元函数微分的一个

重要的几何应用是曲面的切平面与法线,曲线的切线与法平面.复变函数的极限、连续性与可微性作为向量值函数的应用分别在向量值函数的相应章节中介绍.

第二部分是第二章含参变量积分.这部分篇幅较少,主要介绍由含参变量积分与广义含参变量积分所定义的函数的微积分性质.

第三部分是多元函数的积分,包括第三章,第四章,第五章.这里介绍了二重和三重积分的概念、性质以及它们的计算,极坐标、柱坐标和球坐标系下的变量代换法.第一、二类曲线、曲面积分是这部分的另一重要内容,复积分作为特殊的平面向量值函数第二类曲线积分被引入.通过重积分、曲线、曲面积分的联系引出了场论.

第四部分是复解析函数.第六章将复变函数看成是复数域到复数域的一元函数来研究其导数,引出复变函数解析的概念,并把初等函数解析开拓到复平面上.通过格林公式推出解析函数积分的 Cauchy(柯西)公式.这里我们还介绍了复级数,解析函数的双向幂级数展开,留数定理及辐角原理.实函数 Taylor 级数的收敛域问题也在这里得到了解释.

最后一部分是第七章常微分方程.内容有线性常微分方程及方程组解的结构,常系数线性常微分方程及方程组的求解方法(包括 Laplace(拉普拉斯)变换).这一部分的最后是微分方程定性理论初步,这里讨论了平面系统的平衡点分类及解的渐近性质.

全部使用本教材约需 80 学时,若去掉小字部分的内容,60 学时的课堂讲授也不影响本教材的内容完整性.

教材对于教师而言就相当于琴谱对于钢琴家.同一首乐曲,从萧邦和李斯特手下弹出的感觉可能是完全不同的.希望用本教材讲课的教师能有机会互相联系,交流各自的体会,指正本书的不足和缺陷.

编者

2003 年 3 月

前 言

微积分历来是大学基础数学课程最重要的组成部分.

知识资本是成功国家的基石. 21 世纪的大学教育是更高层次的基础教育. 它的目的之一是培养学生具有终生学习的扎实基础; 能充分发掘自己的潜力, 去吸取和创造新的知识和技术. 微积分的教学也应该围绕这个宗旨.

本书的内容分为“直观基础上”和“理性”的微积分两大块(第一篇和第二篇). 这两个名字取得未必合适, 主要目的是希望强调历史上微积分发展的不同阶段以及不尽相同的教学重点.

第一篇在 3 个直观基本假设(基本初等函数是连续的; 两个重要极限及连续函数可积)的基础上, 讲述微积分的基本思想和方法, 大体相当于 17 和 18 世纪微积分的基本内容. 主要强调的是微积分的运算和它对初等连续模型的应用, 包括极限、连续、导数、导数的应用(微分及其应用、连续函数的一些性质、函数的形态和函数作图、不定型的 L'Hospital 法则、导数在经济学中的应用和 Taylor 公式等)、定积分、不定积分、定积分在几何、物理及经济学中的应用和常微分方程初步(一阶线性方程、一些特殊的二阶方程及 Kepler 三大定律的证明)等内容. 本书尽可能把这部分内容写得浅近一些, 以我国中学毕业生现有的数学基础, 相信经过适当的训练, 对接瘦和理解诸如“以直代曲”, “从有限认识无限”等思想方法不会有太大的困难. 同时也为以后数学的学习及例如物理等课程的学习作好铺垫. 本书还以评注的形式在每章结尾处开一些小窗口, 以激发学生的思考潜能.

这一部分的内容是微积分课程中必不可少的, 学生必需力求熟练地掌握它. 可能有一部分学生对一元微积分的了解只需到此为止.

微积分是近代数学的第一个伟大创造, 同时也是近代科学精神诞生的一个重要标志. 微积分的学习如果仅限于第一部分是够的, 因为它本身存在的一些矛盾有待于提升到理性层次来加以探讨. 本书的第二篇主要讨论“极限理论”和“一致收敛性”, 包括了广义积分、级数、幂级数和 Fourier 级数等内容. 按传统的看法, 这部分内容应该属于“高等微积分”或“数学分析”这类课程. 50 年代以来, 我国高校的数学教师往往在“高等数学”课程中这部分内容的选取和安排方面存在不少争论. 其实, 逻辑推演方法对于近代科学的重要性是大家熟知的, 而且它是我国传统文化较为薄弱的一环. 在初步具有上述用数学处理简单连续模式能力的基础上, 从理性的角度来提出问题和处理问题(在这里就

是审视一下微积分的逻辑基础),这应该是大学数学教学的一项基本任务.当然,鉴于一般中学生在这方面的基础比较薄弱,我们力图写得浅近一些,而且教师还可以在此基础上适当删减,但不能忽视对学生理性思维的训练.

这本教材曾在清华大学三个系试用.所需学时在 70 左右,另外还需适当安排一些习题课.

改革教学内容和课程体系是新世纪高等教育改革的重要内容.教育部从 1995 年起进行立项研究,本书是清华大学萧树铁教授领导的课题项目的一项成果.萧树铁先生审阅了本书全稿,许多同志为本书提供了宝贵的建议,编者在此一并表示衷心的感谢.

这本教材还没有经过较为广泛的试用,缺点和毛病还不少,期待同行和读者们不吝多提宝贵意见.

编者

1999 年 9 月

策划编辑 王 瑜
责任编辑 胡乃炯
封面设计 于 涛
责任绘图 朱 静
责任印制 陈伟光

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010)58581897/58581896/58581879

传 真：(010)82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

第 1 章 多元函数及其微分学	(1)
1.1 n 维 Euclid 空间	(1)
1.1.1 n 维 Euclid 空间	(1)
1.1.2 n 维 Euclid 空间中的基本拓扑概念	(2)
1.1.3 \mathbf{R}^n 中点集的连通性	(2)
1.1.4 \mathbf{R}^n 中的点列 \mathbf{R}^n 的完备性	(3)
1.1.5 复平面	(3)
1.2 n 元函数 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 的向量值函数	(4)
1.2.1 n 元函数	(4)
1.2.2 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 的向量值函数	(6)
1.3 极限与连续	(9)
1.3.1 向量值函数的极限	(9)
1.3.2 向量值函数的连续性	(13)
1.3.3 无穷小函数的阶	(14)
1.4 多元函数的全微分及偏导数	(16)
1.4.1 n 元函数的全微分	(16)
1.4.2 偏导数 全微分的计算	(19)
1.4.3 方向导数 梯度	(25)
1.4.4 数量场的梯度	(28)
1.4.5 高阶偏导数 高阶微分	(30)
1.5 向量值函数的微分	(33)
1.5.1 向量值函数的微分	(33)
1.5.2 复变函数的微分	(37)
1.5.3 可微复合向量值函数的微分	(39)
1.6 隐(向量值)函数的存在性及其微分	(44)
1.7 曲面与曲线的表示法 切平面与法线	(51)
1.7.1 曲面及其切平面和法线	(52)
1.7.2 空间曲线及其切线和法平面	(55)
1.8 Taylor 公式 多元函数的极值与条件极值	(57)
1.8.1 Taylor 公式	(57)
1.8.2 极值	(59)
1.8.3 条件极值	(64)
习题与补充题	(71)

部分习题和补充题答案	(88)
第 2 章 含参变量积分	(98)
2.1 含参变量积分的概念及性质	(98)
2.2 广义含参变量积分	(104)
2.2.1 广义含参变量积分的收敛性与一致收敛性	(104)
2.2.2 广义含参变量积分的分析性质	(106)
习题	(108)
部分习题答案	(110)
第 3 章 重积分	(113)
3.1 二重和三重积分的概念及其性质	(113)
3.2 二重积分的计算——累次积分法	(117)
3.3 二重积分的变量代换法 极坐标系下的累次积分法	(122)
3.3.1 二重积分的变量代换法	(122)
3.3.2 二重积分在极坐标系下的累次积分法	(125)
3.4 三重积分的计算	(131)
3.4.1 三重积分在直角坐标系下的累次积分法	(131)
3.4.2 三重积分的变量代换法	(135)
3.4.3 三重积分在柱坐标系下的累次积分	(135)
3.4.4 三重积分在球坐标系下的累次积分	(137)
3.5 重积分的应用	(143)
3.5.1 物体的重心(质心或形心)问题	(144)
3.5.2 转动惯量问题	(145)
3.5.3 引力问题	(146)
3.5.4 曲面的面积问题	(147)
习题与补充题	(150)
部分习题和补充题答案	(157)
第 4 章 第一类曲线积分与第一类曲面积分	(159)
4.1 第一类曲线积分	(159)
4.1.1 第一类曲线积分的性质	(161)
4.1.2 第一类曲线积分的计算及其应用	(162)
4.2 第一类曲面积分	(165)
习题	(170)
部分习题答案	(172)
第 5 章 第二类曲线积分与第二类曲面积分	(174)
5.1 第二类曲线积分与复积分	(174)
5.1.1 第二类曲线积分的性质	(175)
5.1.2 第二类曲线积分的计算	(176)
5.1.3 第一、第二类曲线积分之间的关系	(179)

5.1.4 复积分	(180)
5.2 第二类曲面积分	(182)
5.2.1 曲面的定向	(182)
5.2.2 第二类曲面积分的概念	(183)
5.2.3 第二类曲面积分的计算	(186)
5.2.4 两类曲面积分之间的关系	(191)
5.3 平面和空间中的向量场	(192)
5.3.1 平面向量场 Green 公式	(192)
5.3.2 平面第二类曲线积分与路径无关 原函数	(197)
5.3.3 空间向量场 Gauss 公式和 Stokes 公式	(203)
习题与补充题	(217)
部分习题答案	(226)
第 6 章 复变函数的微积分	(229)
6.1 解析函数 初等实函数的解析开拓	(229)
6.1.1 解析函数	(229)
6.1.2 初等实函数的解析开拓	(230)
6.2 解析函数的积分	(233)
6.2.1 解析函数的积分	(233)
6.2.2 复积分与路径无关 复变函数的原函数	(238)
6.3 解析函数的幂级数展开	(238)
6.3.1 复级数 函数项级数 幂级数	(239)
6.3.2 解析函数的幂级数展开	(241)
6.3.3 解析函数的零点与孤立奇点	(245)
6.3.4 留数定理 辐角原理	(246)
习题与补充题	(251)
部分习题答案	(255)
第 7 章 常微分方程	(258)
7.1 二阶线性常微分方程	(258)
7.1.1 基本概念和解的存在唯一性定理	(261)
7.1.2 二阶线性常微分方程解的结构	(262)
7.1.3 二阶线性常系数方程的求解	(265)
7.2 一阶线性常微分方程组	(268)
7.2.1 一阶线性常微分方程组解的结构	(269)
7.2.2 常系数一阶方程组的求解 Laplace 变换	(270)
7.3 常微分方程定性理论	(277)
习题与补充题	(287)
部分习题和补充题答案	(293)
索引	(296)

第 1 章 多元函数及其微分学

本章讨论多元函数的定义,极限,连续性和可微性;全微分,偏导数和方向导数的概念及计算;向量值函数的微分;微分的应用,其中包括微分的几何应用——曲面的切平面、法线,曲线的切线、法平面;Taylor 公式及极值、条件极值问题.

1.1 n 维 Euclid 空间

n 元函数的自变量是有序的 n 个实数构成的 n 维向量,记作 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. 这些向量的全体构成 n 维(实)空间 \mathbf{R}^n

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

对于加法和数乘运算, \mathbf{R}^n 是一个实数域上的线性空间, \mathbf{R}^n 中的一个元素也可称为 \mathbf{R}^n 中的一个点, 或一个向量.

1.1.1 n 维 Euclid 空间

直观微积分告诉我们,一元函数的极限就是当 x 趋于一实数 a 时函数 $f(x)$ 的趋势. $|x - a|$ 是刻画 x 趋于 a 的程度的一个量,也就是直线上 x 点与 a 点的距离. 同样,在 \mathbf{R}^n 中我们也需要一个数量来刻画两点 X 与 Y 的接近程度,这就是 \mathbf{R}^n 中的距离^①. \mathbf{R}^n 中最常见的距离是 Euclid 距离 $\|X - Y\|_n$.

定义 1.1 设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, 它们间的 Euclid 距离为

$$\|X - Y\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

在不会引起混淆的情况下,我们省略 X 与 Y 的距离 $\|X - Y\|_n$ 中的下标“ n ”.

容易证明, \mathbf{R}^n 中的上述距离满足以下性质:

- (1) 正定性: $\|X - Y\| \geq 0$, 当且仅当 $X = Y$ 时, $\|X - Y\| = 0$;
- (2) 对称性: $\|X - Y\| = \|Y - X\|$;