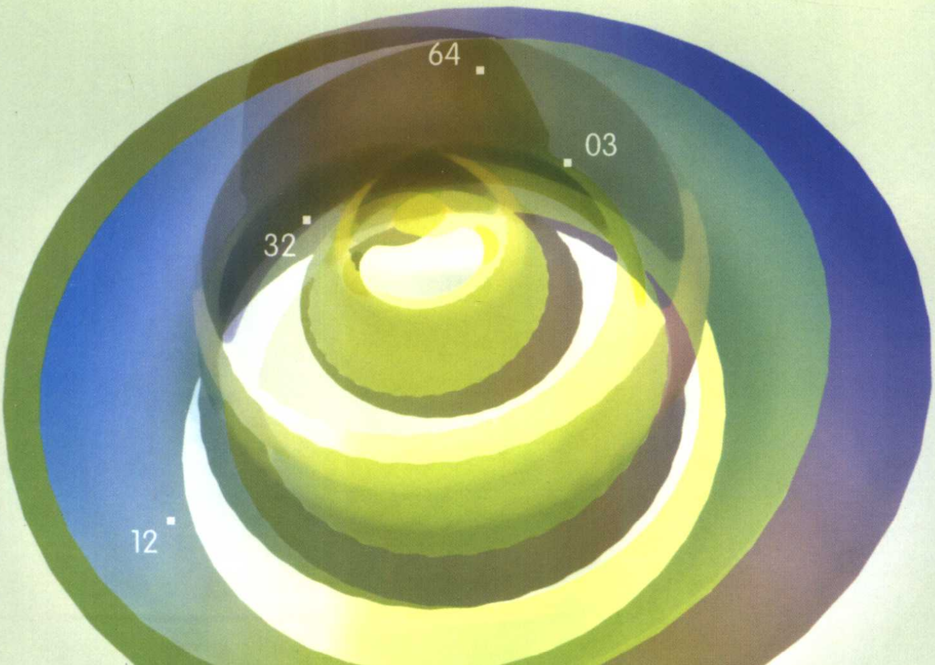
普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学

HIGHER MATHEMATICS

上册

◇ 盛祥耀



高等教育出版社

内容提要

本书是总结作者多年的教学经验，结合目前普通高等院校的教学现状，依据新的课程教学基本要求编写的。

与传统教材相比，本书要求适度、篇幅适度、各种概念理论和计算处理适度。主要特色有：对极限定义的处理独树一帜，既调整了对极限的理论过高要求，又保持了极限定义的论证性功能；淡化了抽象理论，加强了直观应用；简化了分部积分法的程式，突出了方法的本质；删去了除微分外的各种近似计算。

本书分上、下两册，上册内容包括函数，极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程等几部分，适合培养应用型人才的高等院校作为教材使用，高职高专院校也可采用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/盛祥耀．—北京：高等教育出版社，2007.5

ISBN 978-7-04-021400-0

Ⅰ.高… Ⅱ.盛… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 046803 号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 杜晓丹
版式设计 张 岚 **责任校对** 张 颖 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京新丰印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2007年5月第1版
印　　张	15.75	**印　　次**	2007年5月第1次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	16.90元

物料号 21400-00

郑重声明

前　言

目前社会上各种版本的高等数学教材很多，但适合应用型大学教学特点的却不多，这本高等数学教材是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是专为理工类应用型大学本科学生而写的。我们遵循“以应用为目的，以必需够用为度”的原则取舍教材内容，避免内容过多，篇幅过长的弊病，调整过强的理论要求，克服贪多、贪全、贪计算技巧，在保证数学概念、理论的准确性和连贯性的前提下，尽量借助几何直观，力求形象化，淡化抽象理论，注重培养学生分析问题和解决问题的能力，理论联系实际，学以致用。

具体讲本教材有以下的一些特色。

一、极限定义的处理独树一帜。

极限的描述性定义已逐渐地为大家所接受，但怎样落实却有不同的做法，完全搁置 $\varepsilon-\delta$，$\varepsilon-N$ 定义，固然解决了教与学的困难，却失去了极限定义的论证性功能，这将出现无矩可循，无理可述的不利局面。一不小心还会出现逻辑性毛病。本教材的做法是保留 ε，不显现 N 或 δ。这样既克服了教与学的难点，又保留了极限定义的论证性功能（尽管不够严格），将极限的理论要求调整到合理的位置上。

二、调整过强的理论要求，淡化抽象理论，加强直观性，突出应用。

以导数应用一章为例，我们根据问题的需要分插讲解各个中值定理，加强直观性，淡化抽象理论，从而避免了因集中讲解这些定理突显其理论上的过强要求，也处理好了学生学习这一套理论所引发的困惑和教学目的性，以往教材，曲线的凸性的讲法太抽象，弧微分的论证过程太冗长，本教材尽量借助几何直观，开门见山，使曲线的凸性还其几何属性，弧微分的推导一目了然。清晰、易懂、易掌握、缩短了认知过程。

三、突出基本方法，强调分析，抓住关键。

以不定积分为例，我们删除了函数的几种可积类型的积分，突出基本方法——变量置换法与分部积分法。尤以凑微分法为基础，弱化了解题的技巧性，简化分部积分法的计算程式，突出分部积分法的核心，显现了其基本思路，内容紧凑，层次清晰。

四、以下一些内容被删除：各种近似计算（除微分外），全微分方程，积分因子，微分方程解的存在性与唯一性定理，隐函数存在定理，空间曲线积分，$[0,l]$上的傅氏级数等。

五、在函数一章中增置了备用知识一节，它包括极坐标概念，极坐标方程及其

图形，参数方程等。

还有一些与众不同的细节处理在此不再赘述。

在编写本教材过程中得到北京印刷学院领导关心和支持以及许多老师的热心相助；特别值得一提的是北京印刷学院的孟赵玲副教授、朱晓峰教授审阅了全书，并提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心感谢。

全书分上下两册。上册有函数，极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用和微分方程；下册有空间解析几何，向量代数，多元函数的微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分和无穷级数。

编者　盛祥耀

2006.12 于清华园

目　　录

第一章 函 数 1

§1 备用知识

本节大部分内容将复习在高等数学中要用到的一些中学里学过的但学得不多又很重要的内容，读者可根据自己情况选学.

一、集合

一般可以把集合理解为具有某种属性的一些对象所组成的全体，例如：地球上所有人组成一个集合；地球上所有点的坐标(经纬度)组成一个集合；所有三角形组成一个集合；满足不等式 $a<x<b$(a,b 为常数)的所有 x 组成一个集合等.

集合中每一个成员叫做这个集合的元素. 集合通常用大写英文字母如 A,B,C,…表示，而元素通常用小写英文字母如 a,b,c,…表示.

含有有限个元素的集合称为有限集，含有无限个元素的集合称为无限集. 如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A，否则记作 $a\notin A$(或 $a\overline{\in}A$)，读作 a 不属于 A.

所谓给定一个集合，就是给出这个集合由哪些元素组成. 给出的方式不外两种：列举法和描述法. 所谓列举法就是把集合中所有元素都列举出来写在大括号内. 例如集合 A 包含 1,2,3,4,5 五个数，就可记为

$$A=\{1,2,3,4,5\}.$$

所谓描述法，就是把集合中的元素的公共属性描述出来. 它记为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }p\}.$$

例如满足不等式 $a<x<b$ 的所有 x 的集合表示为

$$A=\{x\mid a<x<b\}.$$

而集合 $M=\{(x,y)\mid y=2x+1,x\in\mathbf{R}\}$ 表示所有在直线 $y=2x+1$ 上的点的集合. 其中 $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合. 显然点 $(1,2)\overline{\in}M$，而点 $(1,3)\in M$.

不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$. 显然数 0 与$\varnothing$是不同的，前者是数，后者是集合. 仅有一个零元素的集合 $A=\{0\}$ 与空集也是不同的. 如果集合只有一个元素 a，不能写为 $A=a$，应写为 $A=\{a\}$.

定义一 如果集合 A 中的每一个元素都属于 B，则称 A 是 B 的子集，记作

$A \subseteq B$. 读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

定义二 设有两个集合 A,B,如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

定义三 既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素的集合叫做集合 A 与集合 B 的交集,记作

$$A \cap B.$$

如图 1-1 中阴影部分表示 $A \cap B$.

定义四 所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的并集. 记作

$$A \cup B.$$

如图 1-2 中阴影部分表示集合 A 与 B 的并集.

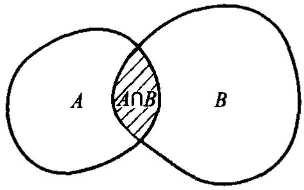


图 1-1

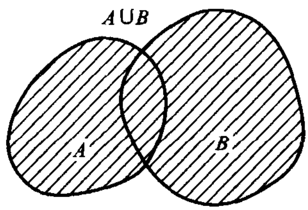


图 1-2

例如, $A=\{x \mid 1<x<3\}, B=\{x \mid 0<x<2\}$, 那么

$$A \cap B=\{x \mid 1<x<2\}; \text{而 } A \cup B=\{x \mid 0<x<3\}.$$

又例如, A,B 分别为两个班学生的姓氏集合: $A=\{$王,陈,张,李,赵$\}$, $B=\{$吴,张,王,郑,李,孙$\}$. 那么这两个班的姓氏的交集为

$$A \cap B=\{\text{王,张,李}\}.$$

如果所讨论的集合都是某一个集合 I 的子集. 那么集合 I 称为全集.

定义五 如果集合 A 是全集 I 的子集,则在 I 中不属于 A 的元素所组成的集合,叫做集合 A 在集合 I 的补集,简称集合 A 的补集,记作 $\complement A$. 如图1-3 中阴影部分是集合 A 的补集 $\complement A$(长方形表示全集 I),它可表示为

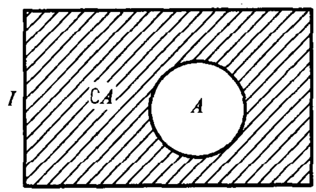


图 1-3

$$\complement A=\{x \mid x \in I, \text{且 } x \notin A\}.$$

显然, $A \cup \complement A=I, A \cap \complement A=\varnothing$. $\complement\complement A=A$. 其中 $\complement\complement A$ 表示:集合 $\complement A$ 的补集. 例如,全集 I 为所有实数的集合 $\mathbf{R}$. $\mathbf{Q}$ 表示所有有理数的集合,则

$$\complement \mathbf{Q}=\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \notin \mathbf{Q}\},$$

即 $\complement \mathbf{Q}$ 为所有无理数的集合.

二、绝对值

定义六 实数 a 的绝对值(记作 $|a|$)规定为

$$|a|=\begin{cases}a, & 若\ a\geqslant 0;\\ -a, & 若\ a<0.\end{cases}$$

a 的绝对值在数轴上表示点 a 到原点的距离. 绝对值有以下的一些性质.

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(2) 如果 $|x|<\varepsilon$,则 $-\varepsilon<x<\varepsilon$, 反之亦然.

(3) 如果 $|x|>N$,则 $x>N$ 或 $x<-N$, 反之亦然.

绝对值有以下的一些运算规则:

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ (a,b 为实数).

事实上
$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|,$$
两式相加,得
$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$
所以
$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

(2) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$ (a,b 为实数).

事实上,
$$|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$
即
$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

(3) $|ab|=|a||b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

这两个公式是显然的.

三、区间与邻域

集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间,记作 (a,b),它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段,但不包括端点 a 与 b(见图 1-4);集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$. 数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段,包括两个端点(见图 1-5).

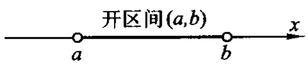


图 1-4

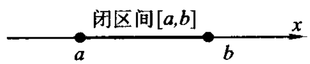


图 1-5

还有其他类型的区间:

$\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 记作 $(a,b]$, $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 记作 $[a,b)$, 称为半开区间;

$\{x\mid x>a\}$ 或 $\{x\mid x<a\}$ 记作 $(a,+\infty)$ 或 $(-\infty,a)$, 称为半无穷区间;

$\{x\mid x$ 为任何实数$\}$ 记作 $(-\infty,+\infty)$, 称为无穷区间等.

集合 $\{x\mid |x-a|<\varepsilon\}$ 称为点 a 的 ε 邻域. 它也可以用开区间来表示.

事实上，

$$|x-a|<\varepsilon,$$

去绝对值，得

$$-\varepsilon<x-a<\varepsilon,$$

即

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

就是说，点 a 的 ε 邻域就是开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 从数轴上看，点 a 的 ε 邻域表示：以点 a 为中心，长度为 2ε 的开区间(图 1－6).

图 1－6

例如，把－1 的$\frac{1}{2}$邻域表示成开区间. 即

$$|x-(-1)|<\frac{1}{2}.$$

去绝对值，得

$$-\frac{1}{2}<x+1<\frac{1}{2},$$

即

$$-1-\frac{1}{2}<x<-1+\frac{1}{2},$$

就是开区间$\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

四、极坐标　极坐标系中曲线的方程及其图形

1. 极坐标

在平面上选定一点 O，并在水平位置上作一条半射线 OA，其上规定单位长，点 O 称为极点，OA 称为极轴. 极轴与半射线 OB 之间的夹角 θ 称为辐角(图1－7(a))，它可正可负，当极轴绕极点逆时针方向旋转到 OB 时的角 θ 为正，反之，顺时针为负. θ 也可大于 2π 或小于 -2π. 例如 $\frac{\pi}{4}+2\pi$ 是指当极轴转到$\frac{\pi}{4}$后再以逆时针方向转 2π(图 1－7(a)). 这样在平面上就建立了极坐标系.

下面介绍在极坐标系中点与有序数组之间的关系.

在平面上任意给定一点 M，它与极点 O 的距离为 ρ 称为点 M 的极半径. 半射线 OM 的辐角为 θ，则点 M 就对应着一组有序数组 ρ,θ. 记作(ρ,θ)或 $M(\rho,\theta)$，ρ,θ 称为点 M 的极坐标. 反之，给定一组有序数组 ρ,θ，在平面上就对应着一点 M，从而建立平面上的点与一组有序数组 ρ,θ 之间的对应关系，如$\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(4,-\frac{\pi}{6}\right)$分别对应着平面上点 M 和点 N(图 1－7(b)). 极半径 ρ 也可以为负值，例如$\left(-3,\frac{\pi}{3}\right)$是在辐角为$\frac{\pi}{3}$的半射线 OM 的相反方向上距极点为 3 个单位

的点 R(见图 1－7(b)).

2. 极坐标与直角坐标之间的关系

所谓极坐标与直角坐标的关系是指:极坐标系中的极点 O,极轴 OA 与直角坐标系中的原点、x 轴的正向分别重合时,点 M 的直角坐标(x,y)与点 M 的极

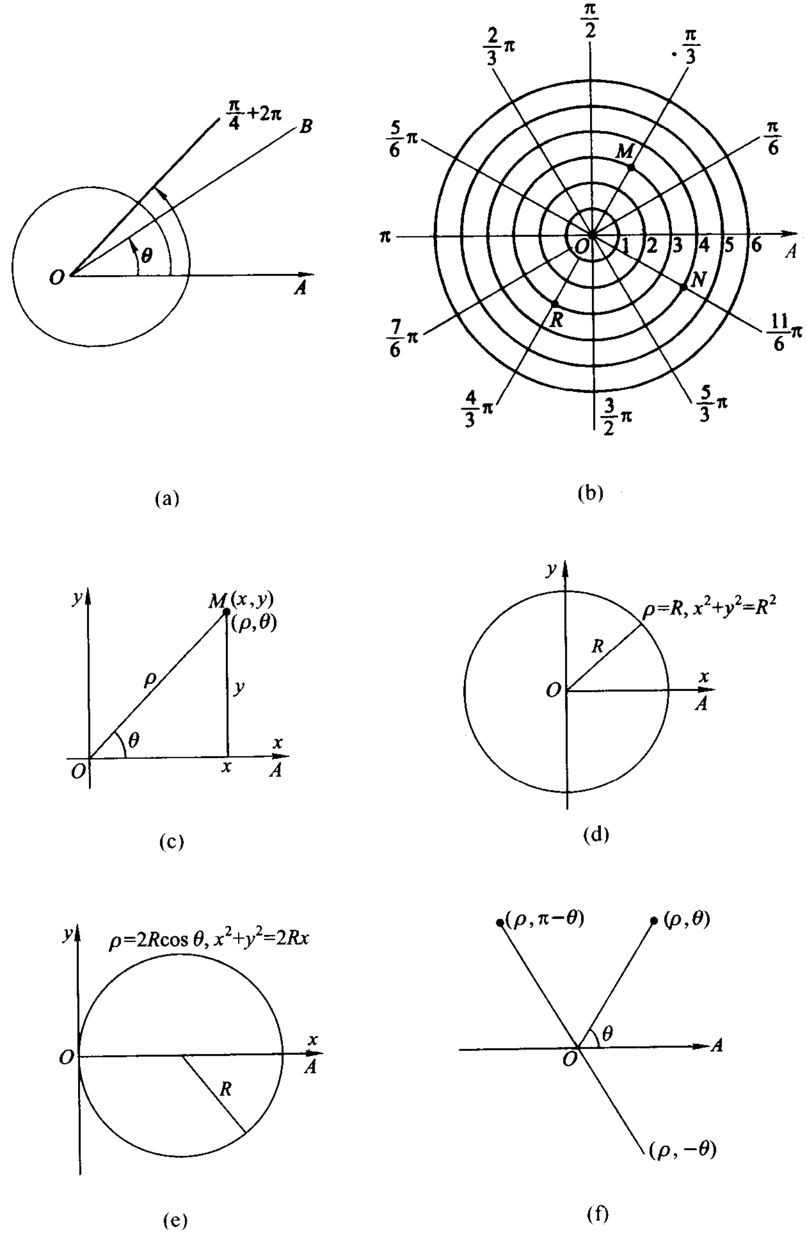


图 1－7

坐标(ρ,θ)之间的关系.

由图 1-7(c),易得 x,y 与 ρ,θ 的关系:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases} \tag{1}$$

运用公式(1),可以将直角坐标系中曲线的方程化为极坐标系中曲线的方程,此方程简称为极坐标方程.

例 1 试将直角坐标系中圆心在原点半径为 R 的圆的方程

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (R > 0 \text{ 的常数})$$

化为极坐标方程.

解 将公式(1)代入 $x^2 + y^2 = R^2$,得

$$\rho = \pm R.$$

取正号①所以圆心在极点半径为 R 的圆的极坐标方程为

$$\rho = R \quad (\text{见图 } 1-7(\mathrm{d})).$$

例 2 试将直角坐标系中的圆的方程 $x^2 + y^2 = 2Rx$($R > 0$ 的常数) 化为极坐标方程.

解 将公式(1)代入,化简后得该圆的极坐标方程

$$\rho = 2R\cos\theta \quad (\text{见图 } 1-7(\mathrm{e})).$$

3. 极坐标方程的图形

作极坐标方程的图形通常要做两方面的工作:

(1) 对称性的判定:当极坐标方程中的 θ 换成 $-\theta$ 时,该极坐标方程不变或 ρ 不变,则该方程所表示的图形关于极轴对称(图 1-7(f)). 当极坐标方程中的 θ 换成 $\pi-\theta$ 时,该极坐标方程不变或 ρ 不变,则该方程所表示的图形关于半射线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 对称(图 1-7(f)).

注意 由于点的极坐标表示式不唯一,所以当上述判定不成立时,不能得出关于极轴或半射线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 不对称的结论.

(2) 列出一系列在图形上的对应点,并把这些点连成光滑的曲线,进而得出其图形.

例 3 试作极坐标方程 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ 的图形,其中常数 $a>0$,该图形称为心形线.

对称性:当 θ 换成 $-\theta$ 时,

$$\rho = a(1 + \cos(-\theta)) = a(1 + \cos\theta).$$

---

① 该圆的极坐标方程也可取 $\rho=-R$,它与 $\rho=R$ 表示同一个圆,通常用 $\rho=R$.

即 ρ 不变,其图形关于极轴对称.

列表:只需列出 θ 由 0 到 π 中的对应值.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π
ρ	$2a$	$1.87a$	$1.5a$	a	$0.5a$	0

把表上的对应点描在图上并连成光滑曲线,再利用图形对称极轴,从而作出 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 的图形(见图 1—8),图形上的箭头是指:当辐角 θ 增大时图形上对应点的走向.

例 4 试作极坐标方程 $r = a\sin 3\theta$(称为三叶玫瑰线)的图形. 其中 a 为大于零的常数.

对称性:当 θ 换为 $\pi-\theta$ 时,方程不变,其图形对称半射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$. 又 $a\sin 3\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right) = a\sin 3\theta$,所以图形关于 θ 的周期是 $\frac{2}{3}\pi$.

列表:只需列出 θ 由 0 到 $\frac{2}{3}\pi$ 的对应值.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$
r	0	$0.7a$	a	$0.7a$	0	$-0.7a$	$-a$	$-0.7a$	0

见图 1—9,曲线上的箭头是指:当 θ 增加时,曲线上对应点的走向.

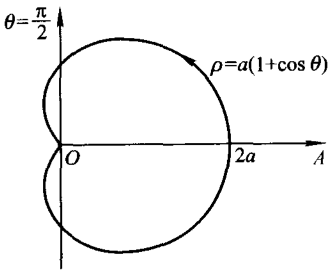


图 1—8

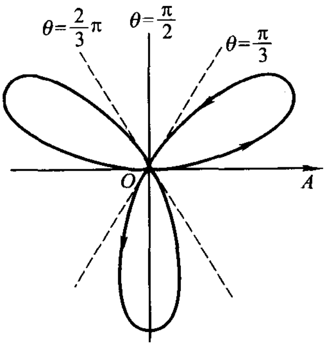


图 1—9

例 5 试作双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 的图形,其中 a 为大于零的常数.

对称性:当 θ 换为 $-\theta$ 时,方程不变;又 θ 换为 $\pi-\theta$ 时,方程不变,所以图形关于极轴和半射线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 对称. 当 θ 在 $\frac{\pi}{4}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间时,方程右边不为正,所以无图

形，因而只需列出 θ 由 0 到 $\frac{\pi}{4}$ 之间的对应值.

列表

θ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
r	a	$0.7a$	0

见图 1—10.

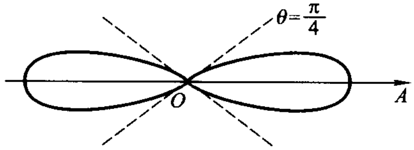


图 1—10

五、几种常见的参数方程

1. 圆的参数方程

圆心在原点，半径为 r 的圆的参数方程为（见图 1—11）

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x = r\sin t, \\ y = r\cos t. \end{cases}$$

圆心在点 (a,b)，半径为 r 的圆的参数方程为（见图 1—12）

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta, \\ y = b + r\sin\theta. \end{cases}$$

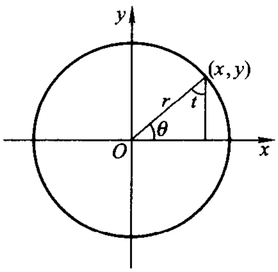


图 1—11

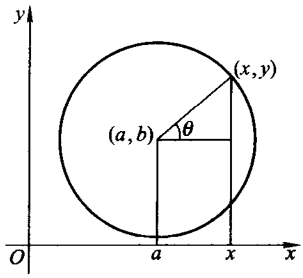


图 1—12

2. 椭圆的参数方程

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x=a\sin t,\\ y=b\cos t.\end{cases}$$

当椭圆中心在点(x_0,y_0)且其长短轴分别平行坐标轴时，其参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+a\cos\theta,\\ y=y_0+b\sin\theta.\end{cases}$$

3. 旋轮线(又称摆线)的参数方程

旋轮线的形成及其方程：半径为 r 的圆，其圆心在 y 轴正半轴上且与 x 轴相切，当该圆沿 x 轴滚动(不滑动)时，则圆周上原与原点相切的点的轨迹称为旋轮线，如图 1－13.

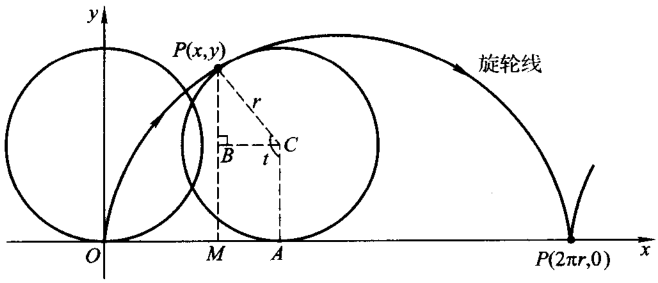


图 1－13

设点 $P(x,y)$为轨迹上的点，$\angle ACP=t$. 由轨迹可知

$$OA=\overset{\frown}{AP}=rt,$$

则
$$x=OA-AM=rt-r\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=rt-r\sin t,$$

$$y=PB+BM=r\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+r=r-r\cos t.$$

所以旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases}x=r(t-\sin t),\\ y=r(1-\cos t).\end{cases}$$

滚动一周后的点 P 的横坐标为 $2\pi r$.

4. 星形线的参数方程

星形线的形成及其方程：设有两个圆，其半径分别为 R 与 r，且 $R=4r$. 大圆的