



新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

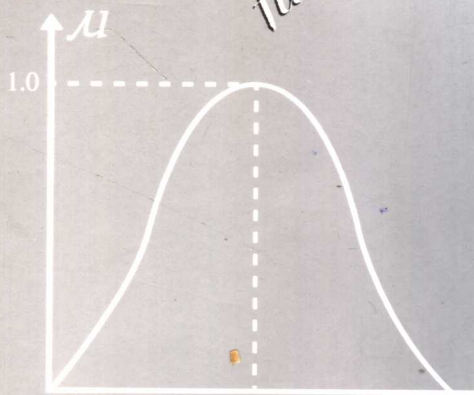
罗承忠 编著

北京师范大学数学科学学院 组编

模糊集引论

(上册)

MOHU
JI
YINLUN



北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

0159

4=2

:1

2005-2007

新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

(上册)

北京师范大学数学科学学院 组编

模糊集引论

MOHUJI YINLUN

罗承忠 编著

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京

内 容 简 介

本书是在汪培庄先生《模糊集合论及其应用》基础上,参考国内外的有关著作,结合作者的教学实践而总结编写的.全书共分上、下两册.上册包括模糊集合的基本概念、模型识别、模糊关系、扩展原理和模糊数、模糊映射与模糊变换、模糊关系方程、模糊规划、模糊逻辑、模糊推理与模糊控制九章内容,每章后面都配备了一定的习题.

本书是模糊数学的基础教材,可供大专院校有关专业选用,也可作为数学专业研究生基础课教材,同时还可供模糊数学工作者及有关科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

模糊集引论.上册/罗承忠编.—北京:北京师范大学出版社,1989.5
(2005.8重印)

新世纪高等学校教材

ISBN 7-303-00418-1

I.模... II.罗... III.模糊集—高等学校—教材

IV.0159

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第093445号

新世纪高等学校教材

模糊集引论(上册)

罗承忠 编著

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

(北京新街口外大街19号 邮政编码:100875)

<http://www.bnup.com.cn>

出版人:赖德胜

北京牛山世兴印刷厂印刷

开本:170mm×230mm 1/16 印张:26.75 字数:470千

2005年8月第2版 2005年8月第1次印刷

印数:3000

定价:35.00元

第二版前言

1915年北京高等师范学校成立数理部,1922年成立数学系.2005年适逢数理部诞辰90周年,也是北京师范大学数学科学学院建院1周年.经过90年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验.将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980年,北京师范大学出版社成立,给教材的出版提供了一个很好的契机.我院教师编著的数十种教材已先后在这里出版.除了北京师范大学现代数学丛书外,就大学教材而言,共有五种版本.第一种是列出编委会的高等学校教学用书,这是在20世纪80年代初期,由北京师范大学出版社王文湧先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会,研究编写出版一套数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材.在出版社的大力支持下,这一计划完全实现,满足了当时教学的需要.第二种是标注高等学校教学用书,但未列编委会的教材.第三种是(北京师范大学)面向21世纪课程教材.第四种是北京师范大学现代数学课程教材.第五种是未标注高等学校教学用书,但实际上是高等学校教学用书.在这些教材中,除再次印刷外,已经有五部教材进行了修订或出版了第二版.

前一段时间,王建华老师和王琦老师分别搜集了我院本科生的所有教材和研究生12门基础课教材的使用情况,李仲来教授汇总了我院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作,由李仲来教授和北京师范大学理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,准备对数学科学学院教师目前使用或眷印(出版社已经没有存书的教材)的北京师范大学出版社出版的部分教材进行修订后再版.计划用几年时间,出版数学和应用数学、数学教育、数学学科硕士研究生三个系列的主要课程教材.

本套教材可供高等师范院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2005年8月8日

第一版前言

《模糊集引论》是在汪培庄先生《模糊集合论及其应用》(上海科技出版社)基础上,参考 D. Dubois、H. Prede《FUZZY SETS AND SYSTEMS》及浅居喜代治《模糊系统理论入门》(北京师范大学出版社),结合作者的教学实践总结编写的. 本书采用“集合套”观点来解释模糊集,因而使一些概念直观易懂,同时使得理论严密系统、便于与经典数学联系,具有适合教学的特点. 由于“集合套”理论只适用 Zadeh 算子($\vee, \wedge$),具有局限性,因此也介绍了其他广义算子($\vee^*, \wedge^*$).

本书是模糊数学基础教材,可用作大专院校有关专业基础课或选课教材(适当选择部分章节),也可用作数学专业研究生基础课教材,还可供模糊数学工作者及有关科技工作者参考. 考虑到不同读者数学基础的差异,本书内容分基础部分与选读部分. 前六章中不带“*”号内容是基础(删去“*”号内容不影响其他部分的讲授),内容较通俗易懂,一般工科院校学员可以接受,讲授 30 课时左右可以完成. 对工科院校,还可以选讲第七、九、十一等章节中不带“*”号有关内容. 这里初步介绍了模糊规划、模糊控制、模糊系统、模糊概率与信息等联系实际的内容. 第八章模糊逻辑的一些基本概念是学习模糊诊断的基础,也可供选用. 书中带*号内容涉及的数学基础知识与基本训练较多,在数学上有一定难度,一般工科院校可以删去. 对数学专业,本科生可讲授前六章包括带“*”内容,然后酌情选讲模糊规划、模糊控制等联系实际内容. 第十二章到第十六章可列入数学专业研究生课程. 第十二章给出 L-Fuzzy 集理论,第十三、十四、十五、十六等章给出可能性理论、Fuzzy 测度与积分、Fuzzy 拓扑、Fuzzy 群与 Fuzzy 范畴等理论基础,其中 Fuzzy 测度与积分主要参照国内王震源先生的科研成果, Fuzzy 拓扑参考了国内蒲保明、刘应明先生的工作. 这部分内容是模糊数学理论工作基础,数学专业研究生尽量选用.

由于作者水平所限,书中一定存在不少缺点,恳请批评指正.

罗承忠

1986 年 12 月

绪 论

模糊数学是研究和处理模糊性现象的数学. 所谓模糊性, 主要是指客观事物在差异的中间过渡时所呈现的“亦此亦彼”性.

一个概念有其内涵与外延, 所谓内涵是指符合此概念的对象所具有的共同属性; 而外延是指符合此概念的对象组成的集合. 集合可以表现概念, 集合的运算和变换可以表现判断与推理. 因此, 建立在集合论基础上的现代数学成为可以描述和表现各门学科的形式语言和系统.

但是经典集合论要求一个对象对于一个集合来说, 要么属于、要么不属于, 两者必居其一且仅居其一. 这样就限定了经典集合只能表现确切的概念, 只能表现“非此即彼”的现象.

一个模糊的概念没有明确的外延, 例如“老人”就是一个模糊概念, 对一个人来说, 他是否属于“老人集”无法明确回答, 它具有“亦此亦彼”的模糊性. 因此模糊概念不能用经典集合来刻画, 于是便产生了模糊集合论, 它是由 L. A. Zadeh (查德) 于 1965 年创立的, 是经典集合论的扩充. 这种扩充如同数系中有理数域扩充到实数域一样, 既有其现实背景, 又有严密的理论基础.

模糊数学在近代科学发展中有着积极的作用: 它为软科学(如经济管理、人工智能、心理、教育、医学等等)提供了数学语言与工具. 模糊数学的发展可以使计算机模仿人脑对复杂系统进行识别判决, 提高自动化水平.

概率论的产生把数学应用范围从必然现象扩大到偶然现象的领域, 模糊数学的产生则提供了把数学的应用范围从精确现象扩大到模糊现象的可能性.

目 录

绪论.....	(1)
第一章 模糊集合的基本概念.....	(1)
§ 1 预备知识	(1)
*§ 2 格与代数系统	(7)
§ 3 模糊子集的定义及运算	(13)
§ 4 分解定理与表现定理	(18)
*§ 5 表现定理的证明,表现定理的其他形式.....	(27)
*§ 6 模糊集与集合套	(31)
*§ 7 模糊集运算的其他定义	(39)
§ 8 广义运算 $\cup^$, $\cap^*$ 的性质	(41)
第二章 模型识别.....	(48)
§ 1 模型识别直接方法	(48)
§ 2 确定隶属函数的若干方法	(50)
§ 3 贴近度与择近原则	(60)
§ 4 贴近度其他定义	(65)
* * § 5 模型识别应用举例	(71)
第三章 模糊关系.....	(83)
§ 1 模糊关系	(83)
§ 2 二元对比排序	(88)
§ 3 模糊关系的合成	(95)
§ 4 模糊等价关系	(102)
§ 5 聚类分析	(105)
*§ 6 用平方法求传递闭包的依据,直接聚类法的理论根据.....	(115)
§ 7 基于模糊划分的模糊聚类方法	(121)
*§ 8 模糊图	(125)
§ 9 基于模糊拟序关系的聚类分析	(136)

第四章 扩展原理, 模糊数	(147)
§ 1 扩展原理的几种表示形式	(147)
§ 2 多元扩展原理	(153)
§ 3 $[0, 1]$ 上的模糊数及其逻辑运算	(160)
*§ 4 模糊数及其运算	(165)
*§ 5 几种类型的模糊黎曼积分	(179)
第五章 模糊映射与模糊变换	(186)
§ 1 模糊关系的投影与截影	(186)
§ 2 模糊映射及其图象, 分解定理与表现定理	(191)
§ 3 模糊线性变换及其“表示”	(196)
*§ 4 广义扩展原理	(200)
§ 5 综合决策的数学模型	(210)
*§ 6 综合决策数学模型的改进及应用实例	(214)
第六章 模糊关系方程	(227)
§ 1 模糊关系方程相容性条件及其最大解	(227)
§ 2 有限集上模糊关系方程	(231)
*§ 3 定理 6.1 与 6.2 的证明	(237)
*§ 4 模糊关系方程极小解的筛选	(240)
§ 5 模糊含度方程	(253)
*§ 6 无限集上模糊关系方程	(256)
*§ 7 广义模糊关系方程	(264)
*§ 8 最大、乘积型模糊关系方程	(267)
第七章 模糊规划	(272)
§ 1 模糊极值	(272)
§ 2 模糊规划	(275)
§ 3 可能性测度与 Fuzzy 积分	(279)
§ 4 多目标或多约束的模糊规划	(283)
§ 5 模糊线性规划	(288)
§ 6 多目标线性规划与模糊线性规划	(304)
*§ 7 具有模糊系数的线性规划	(313)
第八章 模糊逻辑	(322)
§ 1 普通命题与逻辑演算	(322)
§ 2 模糊命题与逻辑演算	(330)

§ 3	模糊逻辑公式的化简	(340)
**§ 4	模糊逻辑公式与组合回路	(350)
§ 5	演绎推理	(355)
**§ 6	一类模糊诊断的数学模型	(361)
第九章	模糊推理与模糊控制	(369)
§ 1	自然语言的集合描述	(369)
§ 2	判断句、推理句及模糊逻辑推理	(373)
§ 3	推理句“若 x 是 a , 则 y 是 b ”及其集合表示	(382)
§ 4	似然推理	(388)
§ 5	条件语句与多段条件语句	(399)
§ 6	一种模糊控制的数学模型	(407)

第一章 模糊集合的基本概念

§1 预备知识

一、经典集合及其运算

集合论是现代数学的基础,集合可以表现概念.

当我们讨论一个具体问题时,总是把自己的议题限制在一定的范围内.例如讨论“男子”这一概念,可以把议题限制在“人”这个范围内,从人的集合 X 中挑选出所有男子,构成 X 的一个子集 A , A 便是“男子”这个概念的外延,即“男子”这个概念的集合表现.

给定论域 X (讨论范围), 设 α 为某一概念, 它的外延是 X 的一个子集 A , 对于 X 中任一元素 x (讨论对象) 来说,

$$x \text{ 符合概念 } \alpha \Leftrightarrow x \in A. \quad (1.1)$$

按照经典集合论要求,元素 x 与集合 A 之间, $x \in A$ 与 $x \notin A$ 两者必居其一且仅居其一. 因而 x 对于概念 α 来说,“ x 符合概念 α ”与“ x 不符合概念 α ”二者必居其一且仅居其一. 我们称这种概念为确切的.

给定论域 X , 子集 A 可由其特征函数 χ_A 唯一确定.

$$\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$$

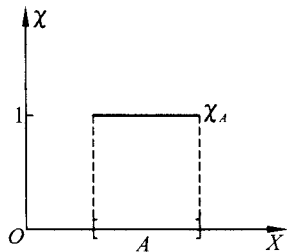


图 1.1

$$x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in A, \\ 0, & \text{当 } x \notin A. \end{cases} \quad (1.2)$$

令 $\mathcal{P}(X)$ 是 X 的所有子集组成的集合 (称为 X 的幂集), $A, B \in \mathcal{P}(X)$. 称 A 包含 B (记作 $A \supseteq B$), 当且仅当对任意 $x \in X$, 都有

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

称 A, B 相等(记作 $A = B$), 当且仅当 $A \supseteq B$ 且 $B \supseteq A$.

称 A 真包含 B (记作 $A \supset B$), 当且仅当 $A \supseteq B$ 且 $A \neq B$.

用特征函数来表示, 我们有

$$\left. \begin{aligned} A \supseteq B &\Leftrightarrow \chi_A(x) \geq \chi_B(x), \forall x \in X, \\ A = B &\Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x), \forall x \in X, \\ A \supset B &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{对 } \forall x \in X, \chi_A(x) \geq \chi_B(x), \\ \text{且 } \exists x_0 \in X, \chi_A(x_0) > \chi_B(x_0), \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

设 $A, B \in \mathcal{P}(X)$, 规定

$$\left. \begin{aligned} A \cup B &\stackrel{d}{=} \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \\ A \cap B &\stackrel{d}{=} \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}, \\ \complement A &\stackrel{d}{=} \{x \mid x \notin A\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

分别叫做 A 与 B 的并集、交集及 A 的余集. 显然它们的特征函数满足

$$\left. \begin{aligned} \chi_{A \cup B}(x) &= \chi_A(x) \vee \chi_B(x), \\ \chi_{A \cap B}(x) &= \chi_A(x) \wedge \chi_B(x), \\ \chi_{\complement A}(x) &= 1 - \chi_A(x), \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

此处“ $\vee$ ”表示上确界“sup”, “ $\wedge$ ”表示下确界“inf”.

上述运算具有下列性质.

1) 幂等律: $A \cup A = A, A \cap A = A$.

2) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

3) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

4) 吸收律: $A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$.

5) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

6) X 与 $\emptyset$ (空集) 满足

$$A \cap X = A, A \cup X = X, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A.$$

7) 复原律: $\complement(\complement A) = A$.

8) 补余律: $A \cup \complement A = X, A \cap \complement A = \emptyset$.

9) 对偶律(Demorgan 律):

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B, \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$$

这些性质可直接从 $\cup$, $\cap$, $\complement$ 定义推出, 也可用特征函数证明. 例如对偶律的证明:

$$\begin{aligned}\text{证法 1 } x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ 且 } x \in \complement B \Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{证法 2 } \chi_{\complement(A \cup B)}(x) &= 1 - \chi_{A \cup B}(x) = 1 - (\chi_A(x) \vee \chi_B(x)) \\ &= (1 - \chi_A(x)) \wedge (1 - \chi_B(x)) = \chi_{\complement A}(x) \wedge \chi_{\complement B}(x) \\ &= \chi_{\complement A \cap \complement B}(x).\end{aligned}$$

集合的并、交运算可推广到任意多个集合的并、交运算.

$$\left. \begin{aligned}\bigcup_{t \in T} A^{(t)} &\stackrel{d}{=} \{x \mid x \in X, \exists t \in T \text{ 使 } x \in A^{(t)}\}, \\ \bigcap_{t \in T} A^{(t)} &\stackrel{d}{=} \{x \mid x \in X, \forall t \in T, \text{ 恒有 } x \in A^{(t)}\},\end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

它们的特征函数

$$\left. \begin{aligned}\chi_{\bigcup_{t \in T} A^{(t)}}(x) &= \bigvee_{t \in T} \chi_{A^{(t)}}(x), \\ \chi_{\bigcap_{t \in T} A^{(t)}}(x) &= \bigwedge_{t \in T} \chi_{A^{(t)}}(x),\end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

易证

$$\left. \begin{aligned}A \cap \left(\bigcup_{t \in T} A^{(t)}\right) &= \bigcup_{t \in T} (A \cap A^{(t)}), \\ A \cup \left(\bigcap_{t \in T} A^{(t)}\right) &= \bigcap_{t \in T} (A \cup A^{(t)}),\end{aligned}\right\} \quad (1.8)$$

$$\left. \begin{aligned}\complement\left(\bigcup_{t \in T} A^{(t)}\right) &= \bigcap_{t \in T} \complement(A^{(t)}), \\ \complement\left(\bigcap_{t \in T} A^{(t)}\right) &= \bigcup_{t \in T} \complement(A^{(t)}).\end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

二、格

给定集合 L , 如果对它的元素定义了一种关系“ $\leq$ ”, 满足

$$\left. \begin{aligned}1) \text{ 反身性: } \alpha &\leq \alpha (\forall \alpha \in L). \\ 2) \text{ 反对称性: } \alpha &\leq \beta, \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta. \\ 3) \text{ 传递性: } \alpha &\leq \beta, \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma.\end{aligned}\right\} \quad (1.10)$$

那么, 称“ $\leq$ ”是 L 的一个偏序, $(L, \leq)$ 叫做一个偏序集. 若还有

4) 可比性: $\forall \alpha, \beta \in L, \alpha \leq \beta$ 与 $\beta \leq \alpha$ 必有一成立.

则称 $(L, \leq)$ 是一个全序集(也可称为线性序集).

易见 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 是偏序集.

设 $(L, \leq)$ 是一个偏序集, $A \subseteq L$, 若对任意 $\alpha \in A$, 均有 $\alpha \leq \gamma$, 则称 γ 为 A 的一个上界. 若 γ_0 是 A 的上界中最小者, 则称 γ_0 为 A 的上确界. 记作

$$\gamma_0 = \sup\{\alpha \mid \alpha \in A\}, \quad (1.11)$$

若对任意 $\alpha \in A$, 均有 $\gamma \leq \alpha$, 则称 γ 为 A 的一个下界. 若 γ_0 是 A 的下界中最大者, 则称 γ_0 为 A 的下确界, 记作

$$\gamma_0 = \inf\{\alpha \mid \alpha \in A\}. \quad (1.12)$$

现在我们介绍格的两种定义.

定义 1.1 设 $(L, \leq)$ 为一个偏序集, 若对任意 $\alpha, \beta \in L$, $\{\alpha, \beta\}$ 的上、下确界均存在, 则称 $(L, \leq)$ 为一个格.

定义 1.1' 一个集合 L , 在其中定义了两种运算“ $\vee$ ”与“ $\wedge$ ”, 满足下列性质

(L.1) 幂等律: $\alpha \vee \alpha = \alpha, \alpha \wedge \alpha = \alpha$.

(L.2) 交换律: $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

(L.3) 结合律: $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma),$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

(L.4) 吸收律: $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha = \alpha, (\alpha \wedge \beta) \vee \alpha = \alpha$.

则称 L 是一个格, 记作 $(L, \vee, \wedge)$.

给出满足定义 1.1 的格 $(L, \leq)$, 规定 $\alpha \vee \beta = \sup\{\alpha, \beta\}, \alpha \wedge \beta = \inf\{\alpha, \beta\}$, 可以证明 $(L, \vee, \wedge)$ 是满足定义 1.1' 的格; 反之, 给出满足定义 1.1' 的格 $(L, \vee, \wedge)$, 在 L 中规定关系 $\leq$, 满足 $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta = \alpha$, 可以证明 $(L, \leq)$ 是满足定义 1.1 的格 (见 §2). 所以定义 1.1 与定义 1.1' 是等价的.

定义 1.2 1) 设 $(L, \vee, \wedge)$ 是一个格, 如果它还满足:

(L.5) 分配律: $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma = (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma),$

$$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma = (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma),$$

那么称 $(L, \vee, \wedge)$ 为分配格.

2) 若格 $(L, \vee, \wedge)$ 满足:

(L.6) 在 L 中存在两个元素 0 与 1 满足:

$$\alpha \vee 0 = \alpha, \alpha \wedge 0 = 0, \alpha \vee 1 = 1, \alpha \wedge 1 = \alpha,$$

则称 $(L, \vee, \wedge)$ 有最小元 0 与最大元 1.

3) 若在一个具有最小元 0 与最大元 1 的分配格 $(L, \vee, \wedge)$ 中规定一种余运算 $\complement$, 满足:

(L.7) 复原律: $\complement(\complement\alpha) = \alpha,$

(L.8) 补余律: $\alpha \vee \complement\alpha = 1, \alpha \wedge \complement\alpha = 0,$

则称 $(L, \vee, \wedge, \complement)$ 为一个布尔代数.

4) 若在一个具有最小元0与最大元1的分配格 $(L, \vee, \wedge)$ 中规定一种余运算 $\complement$, 满足:

$$(L.7) \text{ 复原律: } \complement(\complement\alpha) = \alpha,$$

$$(L.9) \text{ 对偶律: } \complement(\alpha \vee \beta) = \complement\alpha \wedge \complement\beta, \complement(\alpha \wedge \beta) = \complement\alpha \vee \complement\beta,$$

则称 $(L, \vee, \wedge, \complement)$ 为一个软代数.

例 1.1 令 $L_0 = \{0, 1\}$, 规定 $\vee, \wedge, \complement$ 如下:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

α	$\complement\alpha$
0	1
1	0

易验证 $(\{0, 1\}, \vee, \wedge, \complement)$ 是布尔代数.

例 1.2 令 $L_1 = [0, 1]$, 规定:

$$\alpha \vee \beta \stackrel{d}{=} \sup\{\alpha, \beta\}, \alpha \wedge \beta \stackrel{d}{=} \inf\{\alpha, \beta\}, \complement\alpha \stackrel{d}{=} 1 - \alpha.$$

易验证 $([0, 1], \vee, \wedge, \complement)$ 是软代数, 但不是布尔代数, 因为补余律不满足, 如 $\complement 0.2 = 0.8, 0.2 \wedge \complement 0.2 = 0.2 \neq 0$.

可以证明布尔代数中对偶律成立, 因而布尔代数是软代数(见 § 2).

定义 1.3 设 $(L, \vee, \wedge, \complement)$ 为软代数,

1) 若 $\forall A \subseteq L$,

$$\left. \begin{aligned} \vee \{\alpha \mid \alpha \in A\} &\stackrel{d}{=} \sup\{\alpha \mid \alpha \in A\}, \\ \wedge \{\alpha \mid \alpha \in A\} &\stackrel{d}{=} \inf\{\alpha \mid \alpha \in A\} \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

均存在, 则称 L 是完全的.

2) 若

$$\alpha \wedge \left(\bigvee_{i \in T} \alpha_i \right) = \bigvee_{i \in T} (\alpha \wedge \alpha_i), \alpha \vee \left(\bigwedge_{i \in T} \alpha_i \right) = \bigwedge_{i \in T} (\alpha \vee \alpha_i) \quad (1.14)$$

成立, 则称 L 为可无限分配的.

3) 若对 $\forall \alpha, \beta \in L, \alpha < \beta, \exists \gamma \in L$ 使得 $\alpha < \gamma < \beta$,

则称 L 为稠密的.

称稠密的、可无限分配的、完全的软代数为优软代数.

可以验证 $([0, 1], \vee, \wedge, \complement)$ 是优软代数.

三、 $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \complement)$

由前面列举的集合的 $\cup, \cap, \complement$ 运算性质, $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \complement)$ 构成布尔

代数.

$$\begin{aligned} \text{令 } \{0,1\}^X &= \{\chi \mid \chi: X \rightarrow \{0,1\}\}, \\ T: \mathcal{P}(X) &\rightarrow \{0,1\}^X, A \mapsto T(A) = \chi_A, \\ \chi_A(x) &= \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in A, \\ 0, & \text{当 } x \notin A, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.15)$$

可以证明 T 是 $(\mathcal{P}(X) \cup, \cap, \complement)$ 到 $(\{0,1\}^X, \vee, \wedge, \complement)$ 的同构映射. 即 T 是 $\mathcal{P}(X)$ 到 $\{0,1\}^X$ 的一一映射, 且保持运算

$$\left. \begin{aligned} T(A \cup B) &= T(A) \vee T(B), T\left(\bigcup_{t \in T} A^{(t)}\right) = \bigvee_{t \in T} T(A^{(t)}), \\ T(A \cap B) &= T(A) \wedge T(B), T\left(\bigcap_{t \in T} A^{(t)}\right) = \bigwedge_{t \in T} T(A^{(t)}), \\ T(\complement A) &= \complement(T(A)), \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \chi_{A \cup B} &= \chi_A \vee \chi_B, \chi_{\bigcup_{t \in T} A^{(t)}} = \bigvee_{t \in T} \chi_{A^{(t)}}, \\ \chi_{A \cap B} &= \chi_A \wedge \chi_B, \chi_{\bigcap_{t \in T} A^{(t)}} = \bigwedge_{t \in T} \chi_{A^{(t)}}, \\ \chi_{\complement A} &= 1 - \chi_A. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

由于同构的代数系统可以看作完全一样, 因此可以把集合 A 与其特征函数 χ_A 看作是同一的, 采用下面方便的记号

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}(X) &= \{A \mid A: X \rightarrow \{0,1\}\}, \\ \forall x \in X, A(x) &= \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

$A(x)$ 称为 x 对集合 A 的隶属度. 当 x 属于 A 时, 隶属度 $A(x) = 1$, 当 x 不属于 A 时, 其隶属度 $A(x) = 0$. 同样采用下列写法

$$\left. \begin{aligned} (A \cup B)(x) &= A(x) \vee B(x), \left(\bigcup_{t \in T} A^{(t)}\right)(x) = \bigvee_{t \in T} A^{(t)}(x), \\ (A \cap B)(x) &= A(x) \wedge B(x), \left(\bigcap_{t \in T} A^{(t)}\right)(x) = \bigwedge_{t \in T} A^{(t)}(x), \\ \complement A(x) &= 1 - A(x). \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

* § 2 格与代数系统

一、格与代数系统:

定义 1.4 $(L, \leq)$ 为偏序集, 若对 $\forall \alpha, \beta \in L$, 上确界 $\sup\{\alpha, \beta\}$ 与下确界 $\inf\{\alpha, \beta\}$ 均存在, 则称 $(L, \leq)$ 是格.

在 L 中规定运算 $\vee$ 与 $\wedge$, 对 $\forall \alpha, \beta \in L$,

$$\alpha \vee \beta = \sup\{\alpha, \beta\}, \alpha \wedge \beta = \inf\{\alpha, \beta\},$$

则称 $(L, \vee, \wedge)$ 是格 $(L, \leq)$ 诱导的代数系统.

定理 1.1 设 $(L, \vee, \wedge)$ 为格 $(L, \leq)$ 诱导的代数系统, 则满足:

$$(L.1) \text{ 幂等律: } \alpha \vee \alpha = \alpha, \alpha \wedge \alpha = \alpha.$$

$$(L.2) \text{ 交换律: } \alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha.$$

$$(L.3) \text{ 结合律: } (\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma),$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

$$(L.4) \text{ 吸收律: } \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha, \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha.$$

证明 按照上、下确界定义, 我们有:

$$1) \alpha \leq \alpha \Rightarrow \alpha \vee \alpha = \sup\{\alpha, \alpha\} = \alpha, \alpha \wedge \alpha = \inf\{\alpha, \alpha\} = \alpha.$$

$$2) \sup\{\alpha, \beta\} = \sup\{\beta, \alpha\}, \inf\{\alpha, \beta\} = \inf\{\beta, \alpha\}.$$

$$\Rightarrow \alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha.$$

$$3) \left. \begin{aligned} (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &\leq \alpha \wedge \beta \leq \beta, \\ (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &\leq \gamma, \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \leq \beta \wedge \gamma.$$

又

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \leq \alpha \wedge \beta \leq \alpha,$$

于是

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \leq \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

同理

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \leq (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma.$$

由反对称性:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma),$$

同样可证

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma).$$

4) $\alpha \leq \alpha$ 且 $\alpha \wedge \beta \leq \alpha$, 因而 α 是 $\alpha \wedge \beta$ 与 α 的上界. 又对 $\alpha \wedge \beta$ 与 α 的任何上界 γ 来说, $\alpha \leq \gamma$, 所以 α 是 $\alpha \wedge \beta$ 与 α 的上确界(最小上界), 即 $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha$. 同样可证 $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha$. $\square$

引理 1.1 若代数系统 $(L, \vee, \wedge)$ 满足吸收律, 则幂等律也成立.

证明 $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha, \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha$

$$\Rightarrow \alpha \wedge \alpha = \alpha \wedge (\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) = \alpha,$$

$$\alpha \vee \alpha = \alpha \vee (\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) = \alpha. \quad \square$$

定理 1.2 若代数系统 $(L, \vee, \wedge)$ 满足交换律、结合律、吸收律, 则存在一个格 $(L, \leq)$, 其诱导的代数系统就是 $(L, \vee, \wedge)$, 而且满足

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta = \alpha \Leftrightarrow \alpha \vee \beta = \beta. \quad (1.20)$$

证明 在 L 上定义关系 $\leq$ 如下:

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta = \alpha.$$

1) 往证“ $\leq$ ”是 L 上的偏序关系:

i) $\alpha \wedge \alpha = \alpha \Rightarrow \alpha \leq \alpha$. (自反性成立)

ii) $\alpha \leq \beta, \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha \wedge \beta = \alpha, \alpha \wedge \beta = \beta \Rightarrow \alpha = \beta$. (对称性成立)

iii) $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta = \alpha, \beta \wedge \gamma = \beta$

$$\Rightarrow \alpha \wedge \gamma = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \alpha \wedge \beta = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \gamma. \text{ (传递性成立)}$$

2) 往证 $\alpha \wedge \beta = \alpha \Leftrightarrow \alpha \vee \beta = \beta$,

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta = (\alpha \wedge \beta) \vee \beta = \beta. \text{ (利用吸收律)}$$

$$\alpha \vee \beta = \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta = \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha.$$

3) 往证 $\inf\{\alpha, \beta\} = \alpha \wedge \beta, \sup\{\alpha, \beta\} = \alpha \vee \beta$,

$$\alpha \wedge (\alpha \wedge \beta) = (\alpha \wedge \alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta \leq \alpha,$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \beta = \alpha \wedge (\beta \wedge \beta) = \alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta \leq \beta,$$

因此 $\alpha \wedge \beta$ 是 α 与 β 的下界. 设 γ 是 α, β 的任意下界, 则

$$\gamma \leq \alpha, \gamma \leq \beta \Rightarrow \gamma \wedge \alpha = \gamma, \gamma \wedge \beta = \gamma$$

$$\Rightarrow \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) = (\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta = \gamma \wedge \beta = \gamma$$

$$\Rightarrow \gamma \leq \alpha \wedge \beta,$$

因此 $\alpha \wedge \beta$ 是 α, β 的下确界, 即 $\inf\{\alpha, \beta\} = \alpha \wedge \beta$.

同样可证 $\sup\{\alpha, \beta\} = \alpha \vee \beta$.

由于 $\inf\{\alpha, \beta\}, \sup\{\alpha, \beta\}$ 均存在, 所以 $(L, \leq)$ 是格, 其诱导的代数系统即