全国高职高专教育“十一五”规划教材

高职数学教程

下册

张国勇 主编

高等教育出版社
Higher Education Press

全国高职高专教育"十一五"规划教材

高职数学教程

下 册

张国勇 主编

高等教育出版社

内容简介

本书根据高职教育特殊的层次和特色的教学要求以及目前高职学生数学基础的实际状况，把高职教育专业教学中所需要的应用数学内容有机地整合成通俗、直观、易懂的五个模块，即：第六章，线性代数基础；第七章，概率论；第八章，数理统计初步；第九章，微分方程；第十章，无穷级数。使用者可根据学生中学已学的情况和专业课教学的需要有所侧重或选用。本书建议学时数约60学时。

本书具有篇幅小、学时少、容易教和学的特点，适用于高职院校工科和经管类专业的数学教学，也可用作文科类专业学生的选学教材，还可作为有关科技人员和学生的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高职数学教程. 下册/张国勇主编. —北京：高等教育出版社，2007.7

ISBN 978-7-04-021990-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. 张… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第078315号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张 志 **责任绘图** 尹文军
版式设计 张 岚 **责任校对** 王 雨 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市南方印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2007年7月第1版
印　　张	11	**印　　次**	2007年7月第1次印刷
字　　数	260 000	**定　　价**	16.00元

物料号 21990-00

郑重声明

前　言

目前，已出版的高职数学教材内容的模式大多是传统“中专”、“高专”或“本科压缩”型的，对许多教学一线的教师来说，总感觉不好用。主要原因就是理论偏深，内容偏难，不适合高职层次教学的实际需要。

因此，我们在编写这本教材时，根据教育部制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，基于高职教育层次的特点和实际情况，结合国家示范性高职院校建设的需要和编者长期从事高职数学课程教学教研工作的经验，从教材内容及其结构和要求上，希望打破传统“中专”、“高专”、“本科压缩”型的模式，着力于体现高职数学课程的特殊层次，并突出其教学要求的特色，力求以一种新的“工具课”模式出现。

本教材编写的思路和主要的特色是：

1. 改变了对数学内容传统的描述方式，用通俗、直观、易懂的叙述说明代替了严谨的描述，不在乎对理论知识、逻辑论证等能力上的要求，而是要使读者能了解理论知识的实际背景和用处，并能借助直观的实例表示出来，达到“看得懂，学得来，记得下，用得上”的目的。这样的处理，避免了理论的抽象性，大大降低了数学知识的难度。

2. 根据高职专业教学中的普遍需求，在不违背科学性的前提下，把教材内容有机地整合成相对独立的模块(其中一些专业教学中较少用到的内容(带 * 号)只作为选修或选学的部分)，使不同的专业都可以在本教材中方便地选择教学所需的内容，增强了教材内容的弹性，有助于解决目前普遍存在的“内容多，学时少”的矛盾。

3. 力求体现“必需、够用”的教学要求，凸显数学“工具课”的作用。但不主张一味地删减理论知识，把内容砍得只剩下“枝干”，或者把教材简单地当作工具介绍书，那样只会让学生感到乏味，学后就忘；也不刻意粘贴一些数学家的名言或数学史的一些知识，而是保留必需的理论知识并对其提供尽可能直观、通俗的说明解释，同时，很注重揭示和体现数学本身固有的文化内涵和思想方法，其目的是培养学生的思维品质和学习数学的爱好和兴趣，消除学生对数学学习的“单调、枯燥”之感。

4. 所配备的例题、习题一般都是不偏不难，针对知识点的，还有不少与专业教学联系密切的基本应用题。个别带 * 号偏难的习题供学习有余力的学生选作。

5. 充分注意到与中学教改、专业课教学需要的协调配合。

6. 本教材分上、下两册共十章，上册五章为一般专业公共必修的内容，下册五章为专业选修的内容。建议全书(上、下两册)总学时数为 110 学时左右。

本教材由主编制订编写方案并具体指导。参加下册编写工作的有张国勇(福建交通职业技术学院)、黄金伟(福建信息职业技术学院)、张玉祥(福建交通职业技术学院)、王为民(福建水利电力职业技术学院)。黄金伟、张玉祥参加了全书的修改和校稿工作，全书最后由主编修改定稿。

本教材的编审和出版得到了高等教育出版社有关领导和编辑们的关心和支持，编者表示由衷的感谢！

本教材虽在广泛征求意见的基础上经过反复的修改，但由于编者水平有限，加之时间仓促，不足乃至错漏在所难免，恳请数学教改方面的专家和广大教师提出宝贵的意见和建议，以便再版时修订。

张国勇
2007年2月于福建交通职业技术学院

目 录

6 第六章　线性代数基础

本章介绍高职专业教学中常用到的行列式、矩阵和线性方程组三个部分的线性代数基础知识，整章以行列式、矩阵为工具，围绕着线性方程组及其求解问题展开.

6.1 行列式

中学已经学过求解二元、三元线性方程组，并用消元法求解线性方程组. 本节将由消元法求解二元、三元线性方程组引入行列式，并介绍求解线性方程组的克拉默法则.

6.1.1 行列式的概念

1. 二阶行列式

二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{6.1.1}$$

用加减消元法解上述方程组，得出其解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0). \tag{6.1.2}$$

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{6.1.3}$$

其中横排称为**行**,竖排称为**列**,从行列式左上角至右下角的对角线称为**主对角线**,从右上角至左下角的对角线称为**次对角线**,数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元**,式子(6.1.3)等号右边的式子 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开式.

若分别记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1,$$

则当 $D\neq 0$ 时,二元一次方程组(6.1.1)有唯一解,且其解可表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \tag{6.1.4}$$

称 D 为方程组(6.1.1)的系数行列式;而行列式 D_1 由方程组(6.1.1)中右边的常数项替换系数行列式中的第一列而得到;行列式 D_2 则由方程组(6.1.1)中右边的常数项替换系数行列式中的第二列而得到.

例 6.1.1 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}=-3\times 12-2\times 5=-46.$

2. 三阶行列式

三元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{6.1.5}$$

和二元线性方程组类似,可用加减消元法推导出三元线性方程组解的公式为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a-a_{31}b_2a_{13}-a_{21}b_1a_{33}-a_{11}b_3a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}}, \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{31}a_{12}b_2-a_{31}a_{22}b_1-a_{21}a_{12}b_3-a_{11}a_{32}b_2}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}}, \end{cases} \tag{6.1.6}$$

其中 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}\neq 0$.

类似于二阶行列式的定义,用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

来表示 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$.

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为三阶行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}. \tag{6.1.7}$$

式子(6.1.7)右边的部分称为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的展开式. 容易发现三阶行列式的展开式的规律可用弧线(图 6.1.1)表示，各实线连接的三个元的乘积为正项，各虚线连接的三个元的乘积为负项.

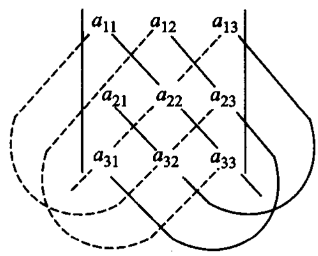

图 6.1.1

按展开式(6.1.7)求得行列式的值的方法叫做对角线展开法.

有了三阶行列式的定义，三元线性方程组(6.1.5)当 $D\neq 0$ 时的解即可表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}, \end{cases} \tag{6.1.8}$$

其中行列式 D 称为方程组的系数行列式；D_1,D_2,D_3 分别由三元线性方程组的常数项替换系数行列式中的第一列、第二列、第三列而得到，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 6.1.2 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 11 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 11 & 2 & 6 \end{vmatrix}=2\times4\times6+0\times2\times3+11\times(-1)\times0-11\times4\times3-0\times(-1)\times6-2\times2\times0=-84.$

例 6.1.3 解线性方程组

$$\begin{cases} -2x + \ y + \ z = -2, \\ \quad x + \ y + 4z = 0, \\ \ 3x - 7y + 5z = 5. \end{cases}$$

解　先计算系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 12 - 7 - 3 - 56 - 5 = -69 \neq 0,$$

再计算 D_1, D_2, D_3,

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -51, D_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 31, D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

代入公式(6.1.8)得

$$\begin{cases} x = \dfrac{17}{23}, \\ y = -\dfrac{31}{69}, \\ z = -\dfrac{5}{69}. \end{cases}$$

3. *n* 阶行列式

一般的,由 n^2 个数排成 n 行 n 列(其中横的称行,竖的称列),并在左、右两边各加一竖线的算式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**. 一般的,我们可以定义 n 阶行列式的计算规则:

(1) 当 $n = 1$ 时, $D_n = a_{11}$;

(2) 当 $n \geqslant 2$ 时, $D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$;

其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$,

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n),$$

M_{1j}称为元 a_{1j}的余子式,即 M_{1j}为划掉 D_n 的第一行与第 j 列后元按相应行与列的顺序重新构成的 $n-1$ 阶行列式, A_{1j}称为元 a_{1j}的代数余子式.

通过简单的验证可知,当 $n = 2, 3$ 时,以上的计算规则与前面二、三阶行列式值的定义是一致的.

例 6.1.4　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&0&1\\1&3&0&-2\\5&1&3&-1\\4&2&0&1\end{vmatrix}.$$

解 按行列式的计算规则有

$$\begin{aligned}D&=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&0&-2\\1&3&-1\\2&0&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&3&0\\5&1&3\\4&2&0\end{vmatrix}\\&=3\times\left[3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&-1\\0&1\end{vmatrix}+(-2)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&3\\2&0\end{vmatrix}\right]\\&\quad-\left[(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&3\\2&0\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&3\\4&0\end{vmatrix}\right]\\&=3\times(9+12)-(-6+36)\\&=33.\end{aligned}$$

由此题的计算可看出,第 1 行的零元越多,按计算规则计算就越简便.

6.1.2 n 阶行列式的性质与计算

从 n 阶行列式的定义出发计算行列式的值是比较麻烦的. 为了简化行列式的计算,我们从行列式的性质入手来探讨这个问题.

1. 行列式的性质

以下行列式的性质,我们仅以具体的行列式来加以说明而不作严密的论证. 对于 n 阶行列式性质的严格证明,有兴趣的读者可参阅其他教材相应的部分.

性质 1 行列式转置后其值不变. 简称转置性质.

n 阶行列式 D 中的行与对应的列互换后所得的行列式,称为行列式 D 的转置,记为 D^{T}.

若 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$,则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$,有 $D=D^{\mathrm{T}}$ 成立.

这个性质说明了在行列式中,凡是对行成立的性质对列也成立.

性质 2 交换行列式中的任意两行(列)的位置后,其值仅改变符号. 简称变号性质.

如二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

D 中的第一列与第二列互换后,得

$$\begin{vmatrix}a_{12}&a_{11}\\a_{22}&a_{21}\end{vmatrix}=a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=-D.$$

对于 n 阶行列式,可以用归纳法加以证明,此处从略.

我们把 n 阶行列中的第 i 行(列)和第 j 行(列)的互换记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$.

例 6.1.5 计算

$$D=\begin{vmatrix}-1&4&5&3\\1&2&5&3\\3&2&4&2\\1&2&5&3\end{vmatrix}.$$

解 注意到 D 中的第二行与第四行相同,因此,有

$$D=\begin{vmatrix}-1&4&5&3\\1&2&5&3\\3&2&4&2\\1&2&5&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}-1&4&5&3\\1&2&5&3\\3&2&4&2\\1&2&5&3\end{vmatrix}=-D,$$

故 $D=0$.

这个结论可推广到一般情况,即

推论 行列式中有两行(或两列)的对应元相同,则这个行列式的值为零.

性质 3 行列中的一行(列)的公因式可以提取到行列式符号的外面,即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

这个性质简称数乘性质,可利用行列式的定义加以证明,此处从略.

例 6.1.6 计算

$$D=\begin{vmatrix}-3&2&5&3\\3&2&7&5\\6&-4&-10&-6\\16&2&1&5\end{vmatrix}.$$

解 注意到 D 中的第一行与第三行的元对应成比例,公比为 -2,由性质 3 及性质 2 的推论,有

$$D=\begin{vmatrix}-3&2&5&3\\3&2&7&5\\6&-4&-10&-6\\16&2&1&5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-3&2&5&3\\3&2&7&5\\-3&2&5&3\\16&2&1&5\end{vmatrix}=-2\times0=0.$$

此例结论也可以推广到一般,即

推论 1 行列式中有两行(或两列)的对应元成比例,则这个行列式的值为零.

由性质 3,可直接得出

推论 2 数 k 乘以行列式,等于数 k 乘以行列式中的某一行(列)的所有元.

例如

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

类似于 n 阶行列式 D_n 计算规则中对余子式和代数余子式的规定,我们称 M_{ij}为 a_{ij}的余子式,即 M_{ij}为划掉 D_n 中第 i 行第 j 列后元按相应行与列的顺序重新组成的 $n-1$ 阶行列式. 称 A_{ij}为 a_{ij}的代数余子式,即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

性质 4 n 阶行列式等于任意一行(列)的所有元与对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},$$
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},$$

其中 $1\leqslant i,j\leqslant n$. 简称降阶性质.

性质 4 的正确性容易从三阶的行列式的计算得到验证,证明从略. 这个性质主要用于行列式的降阶,但应用中要注意选取非零元比较少的行(列)来展开,这样可以减少计算量.

推论 1 行列式中如果有一行(列)的所有元都为零,那么行列式的值为零.

例 6.1.7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 选一具有较多零元的行(或列)展开行列式,注意第三行只有一个非零元,故按第三行展开,得

$$D=4\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(第三列只有一个非零元,再按第三列展开)}$$
$$=-4\times2\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-56.$$

推论 2 n 阶行列式中任意一行(列)的所有元与另一行(列)的相应元的代数余子式的乘积之和为零. 即

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0 \quad (1\leqslant k,i\leqslant n,k\neq i),$$
$$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=0 \quad (1\leqslant k,j\leqslant n,k\neq j),$$

证 若 $k\neq i$,把 $a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}$排成行列式,即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow D\text{ 中第 }k\text{ 行的元被替换成第 }i\text{ 行的元,} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

即其中第 k 行与第 i 行的元相同,根据性质 2 的推论,即知 $a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0$.

若 $k\neq j$ 时,同理可证 $a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=0$.

性质 5 行列式中的某一行(或某一列)的所有元都是二项之和,则这个行列式可以分成如下两个行列式的和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

简称分项性质

以二项之和所在的行(列)展开行列式,再由行列式的定义即可证明左端等于右端,此处从略.

性质 6 将行列式某一行(列)的倍数加到另一行(列)上,行列式的值不变. 简称倍加性质.

如第 i 行的 k 倍加到第 j 行,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 根据性质 5,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

根据性质 3 的推论 1,上式右边的第一个行列式为零. 这样即得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意:性质 6 主要用于把元化为零. 利用性质 6,作倍加变换时需明确以哪行(列)做倍加,变的是哪行(列),而不变的是哪行(列).

我们把第 i 行的 k 倍加至第 j 行上的变换记为 r_j+kr_i(写在等号的上方),第 i 列的 k 倍加至第 j 列上的变换记为 c_j+kc_i(写在等号的下方). 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+kr_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 & b_3+ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2+kc_1]{} \begin{vmatrix} a_1 & a_2+ka_1 & a_3 \\ b_1 & b_2+kb_1 & b_3 \\ d_1 & d_2+kd_1 & d_3 \end{vmatrix}.$$

例 6.1.8 求行列式的值

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 32 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 注意到第二列与第三列的后三个元对应成比例,公比为 2,故有

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 32 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-2c_2]{} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 & 32 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -4\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4\times(-2)=8.$$

2. 行列式的计算

计算行列式时,利用性质 6,将行列式中某一行(列)化为只含一个非零元,其余均为零,即"造零",然后再利用性质 4,将行列式降低一阶,重复应用这个过程,直到行列式的值容易算出为止,这种求法叫降阶法. 在"造零"时应尽量选定含有元 1 的行(列),若没有 1,则可适当选取便于"造零"的一些数. 也可利用性质 6 把它化为下(上)三角形行列式来求,这种求法叫"化三角形法". 下面,我们举例说明.

例 6.1.9 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[]{\substack{r_1+r_2 \\ r_3-r_2 \\ r_4+r_2}} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_2+2c_1 \\ c_3+c_1}]{} \begin{vmatrix} 3 & 10 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(20-12) = -8.$$

注意：在具体计算过程中一般需要综合运用降阶法和化三角形法.

例 6.1.10 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

解 $$D = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3 \\ c_1+c_4}]{} \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{5}{16}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}} \frac{5}{16}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{16}.$$

注意：在熟悉行列式性质的应用后，在写法过程中只要清楚计算的根据，未必都要写出变换.

例 6.1.11 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式各列的元之和都为 $x+(n-1)a$ 的特点，所以