



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

博弈论与经济

Game Theory and Economy

□ 于维生 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

博弈论与经济

Game Theory and Economy

于维生 编著

高等教育出版社
Higher Education Press

图书在版编目(CIP)数据

博弈论与经济/于维生编著. —北京:高等教育出版社,
2007. 4

ISBN 978-7-04-021571-7

I. 博… II. 于… III. 对策论-应用-经济 IV. F224.32

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第038454号

策划编辑 权利霞 责任编辑 顾瑶 封面设计 王凌波 责任绘图 朱静
版式设计 王莹 责任校对 俞声佳 责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网址	http://www.hep.edu.cn
总机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landrace.com
印刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.landrace.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开本	787×960 1/16	版次	2007年4月第1版
印张	16.5	印次	2007年4月第1次印刷
字数	300 000	定价	26.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 21571-00

关于本书

内容简介

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书在介绍博弈论的基本概念、基本理论、基本方法、基本模型的基础上,介绍了博弈论在诸多经济问题中的应用。书中依次介绍了非合作博弈的两种模型——策略型与扩展型以及完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、不完全信息静态博弈、不完全信息动态博弈、合作博弈及其在经济生活中的应用,最后,还比较系统地介绍了演化博弈的内容。本书在每章后都附有基本概念、小结、问题与习题,书后附有习题参考答案。

本书可作为经济管理类高年级本科生与低年级研究生的教学用书,也可供其他对博弈论感兴趣的读者参考。

本书配有教师用的教学课件,获取方式请参看书后的“教学支持说明”。

作者简介

于维生,吉林大学商学院教授,长期从事数理经济学、决策与模型、经济博弈论、高等运筹学等教学工作,公开发表了《出口退税问题的不完全信息动态博弈分析》、《具有概率约束的委托代理模型》、《确定产品检验两类错误的博弈论方法》、《非合作对策的纳什均衡及公共物品提供的对策模型》、《具有争当领头企业的 Stackelberg 博弈模型》等论文几十篇,公开出版了《博弈论及其在经济管理中的应用》、《收入分配不均等性数量分析》、《运筹学》等教材与专著多部。

前 言

现代经济学越来越注重个体之间的冲突与合作行为对经济状态的影响,越来越转向人与人之间策略互动关系的研究。对于这些研究,博弈论无疑是最合适的工具。鉴于此,自1994年以来,诺贝尔经济学奖多次授予了经济博弈论方向的学者。1994年诺贝尔经济学奖授予了对博弈论的基础理论作出了杰出贡献的纳什(Nash)、海萨尼(Harsanyi)、塞而腾(Selten);1996年诺贝尔经济学奖授予了对博弈论在经济学应用方面作出卓越贡献的莫里斯(Mirrless)和维克瑞(Vickry);2001年诺贝尔经济学奖荣归于应用博弈论对信息经济学作出了开创性工作的阿克洛夫(Aklof)、斯宾塞(Spence)和斯蒂格里兹(Stiglitz);2005年10月,瑞典皇家科学院宣布“因通过博弈分析加强了我们对冲突与合作的理解”,所以罗伯特奥曼(Robert J. Aumann)和托马斯·谢林(Thomas C. Schelling)获得了当年诺贝尔经济学奖。对于一门学科给予如此高的褒奖,表明了学术界对博弈论与经济学相结合的研究方向的鼓励。

早在20世纪60年代,我国学者就开始接触博弈论,王建华、顾玮琳先生翻译出版了冯·诺伊曼(Von-Neumann)和摩根斯坦(Morgenstern)关于博弈论的奠基性著作《博弈论与经济行为》。改革开放后,1996年张维迎教授出版了《博弈论与信息经济学》,1997年谢识予教授出版了《经济博弈论》,1998年张守一研究员等出版了《经济博弈论》……博弈论的学习、普及和研究工作逐步掀起了热潮,对我国的经济体制改革、转轨理论的研究与实际应用都起到了很大的推动作用。可以预言,博弈论的学习与研究必将进一步对我国和谐社会的构建起到应有的作用。

博弈论不仅对经济、管理学科具有重大的价值,对其他自然与社会学科的作用也是不可低估的。因而经济学家保罗·萨缪尔森(Paul Samuelson)教授说:“要想在现代社会做一个有文化的人,你必须对博弈论有一个大致了解。”

博弈论与经济学的融合是困难的,因为它要同时处理两种不同体系的学科。这大体可以遵循两种方法。一是以博弈论理论与模型为基础,向各个经济学分支延伸。二是以各种经济问题为基础,应用博弈论的理论进一步深入研究,这无疑要求对博弈论能够掌握到学以致用用的程度。而对于本科生而言,重要的是奠定好博弈论的基础,准确地掌握博弈论的基本思想、基本概念、基本方法、基本模型,然后再将博弈论应用于经济问题的研究。本教材就是本着这个宗旨而编写的。

在本教材中,我们特别强调了一些博弈论学习中容易混淆的问题,如把信息完全静态博弈等同于策略型博弈模型,把信息完全动态博弈等同于扩展型博弈模型,把策略与行动等同起来,把最优反应函数曲线的交点与支付函数一阶条件方程组的解混为一谈等。本书利用纳什均衡的不变性性质给出了几乎所有的 2×2 矩阵博弈的纳什均衡。

利用最优反应函数曲线的交点求解纳什均衡是博弈论中一般的方法,我们利用最优反应映射的工具进行了证明。利用这个工具,我们还给出了多人有限博弈的纳什均衡求解方法。信号传递博弈是一个非常重要的博弈模型,我们介绍了求解有限信号传递博弈的精炼贝叶斯均衡的方法。

本教材在数学基础方面的要求没有超过本科生的高等数学、线性代数、概率论的基础。对于一些稍难但又十分重要或值得进一步学习的内容,用*标示出来,供选学。由于博弈论起源于国外,因而一些有趣的例子也都是外国流行的寓言、故事,而中华民族是具有优秀博弈潜质的智慧民族,如在我国的王戎辨李、孙臆赛马、破釜沉舟、空城计等故事中都充满了博弈论的思想。我们通过习题的方式试图进行这些方面的发掘。

演化博弈是不要求参与人完全理性假设的另一类博弈,它属于博弈论的前沿,出于课时的考虑,把它作为选学内容。

最后还需指出,博弈论虽然假设参与人的行为是自利的,但这决不等于博弈论提倡自利行为,而恰恰相反,众所周知的囚徒困境问题说明了以自利行为为出发点的参与人最后得不到有利于自己的结果。如何走出困境是博弈论致力研究的课题。

书中错误或不足之处,敬请广大读者提出宝贵的意见。

作者对吉林大学“985工程”项目“中国宏观经济分析与预测”创新基地的资助表示感谢。

于维生

2006年10月于吉林大学

目 录

第 1 章 博弈论基本模型	1
1.1 有限扩展型博弈模型	1
1.2 有限扩展型博弈模型的策略	7
1.3 一般扩展型博弈模型	8
1.4 策略型博弈模型	10
1.5 扩展型博弈模型转化为策略型博弈模型	14
基本概念	17
小结	18
问题与习题	18
第 2 章 纳什均衡	22
2.1 纳什均衡的定义	22
2.2 求纳什均衡的划线法	27
2.3 最优反应映射与纳什均衡	29
2.4 求纳什均衡的反应函数法	34
2.5 纳什均衡的性质	41
2.6 混合策略下的纳什均衡	45
2.7 2×2 双矩阵博弈的纳什均衡	47
2.8 混合策略纳什均衡的有关结论	57
基本概念	62
小结	62
问题与习题	63
第 3 章 完全信息静态博弈的应用	67
3.1 古诺寡头垄断模型	67
3.2 异质产品价格竞争模型	75
3.3 公共地悲剧模型	77
3.4 公共物品的私人供给问题	79
小结	82
问题与习题	82
第 4 章 完全信息动态博弈及应用	85
4.1 子博弈精炼纳什均衡	85
4.2 斯坦克尔伯格双寡头垄断模型	89
4.3 价格领先博弈模型	91

4.4 具有同时选择的两阶段动态博弈	92
4.5 豪泰林模型	95
*4.6 产品质量博弈模型	98
*4.7 产品广告策略博弈模型	103
*4.8 多阶段可观察行动动态博弈模型——公共资源问题	108
4.9 宏观经济政策的动态一致性问题	114
4.10 重复博弈与伏名定理	115
4.11 讨价还价博弈模型	122
基本概念	127
小结	127
问题与习题	128
第 5 章 不完全信息静态博弈及应用	132
5.1 海萨尼转换	132
5.2 有限型贝叶斯博弈求解	134
5.3 非有限型贝叶斯博弈的应用	141
*5.4 显示原理	151
*5.5 用贝叶斯均衡解释混合策略均衡	152
基本概念	155
小结	155
问题与习题	155
第 6 章 不完全信息动态博弈及应用	159
6.1 子博弈精炼贝叶斯均衡的定义	159
6.2 信号传递博弈的精炼贝叶斯均衡	163
6.3 信号传递博弈求解	166
6.4 信号传递博弈的应用	170
6.5 精炼贝叶斯均衡再精炼	183
基本概念	186
小结	186
问题与习题	186
第 7 章 合作博弈	192
7.1 纳什讨价还价(谈判)问题	192
7.2 具有可转移支付的联盟博弈	196
7.3 具有可转移支付的联盟博弈的转归	197
7.4 稳定集与核心	198
7.5 联盟博弈的沙普利值	204
基本概念	210
小结	210
问题与习题	211

第 8 章 演化博弈	214
8.1 单总体演化博弈的演化稳定策略	214
8.2 单总体演化稳定策略的性质与求解	215
8.3 多总体演化稳定策略	223
8.4 单总体演化博弈的复制子动态	225
8.5 多总体演化博弈的复制子动态	230
基本概念	233
小结	233
问题与习题	234
参考文献	236
部分习题参考答案	237
教学支持说明	

第1章 博弈论基本模型

博弈论的英文是 Game Theory, Game 本意是游戏。我国曾把 Game Theory 翻译为竞赛论、对策论、博弈论等。博、弈两字都是我国棋类的名称。“博弈”既与“游戏”的本意接近,又比“游戏”庄重,因而越来越多的人接受了“博弈论”的译法。

既然 Game 的本意是游戏,我们便可从一个游戏开始,说明什么是博弈活动。考虑一个两人数数的游戏,规则是甲从 1 开始数,可以数 1,也可以连续数两个数:1、2。乙在甲数完后,接着往下数,可以数一个数,也可以数两个数。谁先数到 3,谁赢得一分,对手输掉一分。

这个游戏具有以下特征:

- (1) 有人参加。我们把参加的人称为参与人或局中人。
- (2) 在每一步中,局中人都有明确的、可以选择的行动——数什么数。
- (3) 有明确的行动顺序:甲先乙后。
- (4) 参与人在选择行动时有明确的信息。甲开始不了解什么信息也理解为具有明确的信息——什么也不知道;乙行动时知道甲已经数到了哪个数。
- (5) 游戏结束时有明确的支付规则。

具有上述特征的活动称为博弈活动。下面还将更完善地刻画它。在上述的游戏中,参与人的目标是“赢分”,因而两个参与人没有合作的意向。如果在一项活动中,参与人具有合作的意向,而且合作的行为又能得到有力的保障,则称这种博弈活动为**合作博弈**,否则称为**非合作博弈**。这是两类很不同的博弈。本章主要讨论非合作博弈。合作博弈将在第 7 章讨论。对于非合作博弈,从模型构建的形式上又可分为**扩展型博弈**与**策略型博弈**。

1.1 有限扩展型博弈模型

在博弈论的初始时期,人们确实研究了很多游戏,但随着研究的深入,人们发现众多的政治、经济、军事、外交等重要活动都可以抽象成与游戏具有相同结构的模型,这为博弈论的发展注入了强大的生命力。应用博弈论方法分析研究经济管理或其他领域中的问题,首先要构造出博弈模型,因而需要从大量的博弈活动中抽象出构造博弈模型的基本要素,并对这些要素进行严格、准确地刻画,形成博弈模型。下面以产业经济学中的市场进入问题为例,说明构造一个博弈

模型需要了解哪些情况。

在某种产品的市场上,企业的盈利与市场对该产品的需求状态有关。需求可表现为旺盛与疲软两种状态。经过统计分析,确定需求旺盛的概率为 p ,疲软的概率为 $1-p$ 。企业1是潜在的市场进入者,它不了解市场的需求状态,但知道需求的概率分布,他需要在进入市场还是不进入市场这两个行动中作出选择。企业2是市场上的原有企业或在位者,它了解市场的需求状态,当它观察到企业1的进入行动后,需要在容许进入和抵制进入这两个行动中进行选择。当市场需求旺盛时,如果企业1进入且企业2容许,两个企业的利润均为5;如果企业2抵制,需付出一定的成本,两个企业的利润分别为0和3。如果企业1不进入,企业1与企业2的利润分别为0与10。当市场需求疲软时,如果企业1进入,企业2容许,会两败俱伤,两个企业的利润均为-1;如果企业2抵制,两个企业的利润分别为0和1。如果企业1不进入,两个企业的利润分别为0与3。我们关心两个企业如何选择行动。

为将上述市场进入活动构造成博弈模型,需要了解以下6个方面的情况:

(1) 参与人。上述活动中,实际参与人为进入者企业1与在位者企业2。但为了刻画市场需求状态,需要引入一个虚拟参与人,用“0”表示,称其为“自然”,并设“自然”以概率 p 选择旺盛的需求状态,以概率 $1-p$ 选择疲软的需求状态。

(2) 外生事件的概率分布。 $P\{\text{需求旺盛}\} = p, P\{\text{需求疲软}\} = 1-p$ 。

(3) 参与人选择行动的次序。

(4) 参与人所能选择的行动。

上例中,参与人选择行动的次序及其所能选择的行动如下:

第1步:自然首先以概率 p 和 $1-p$ 对需求状态旺盛与疲软进行随机选择。

第2步:企业1选择进入与不进入。

第3步:企业2选择容许还是抵制。

(5) 参与人在选择行动时所了解的信息。“自然”最先选择行动,它不了解博弈的任何信息。

企业1在选择行动时,不了解“自然”的选择,也不可能观察到企业2的选择。

企业2在选择时,既了解市场需求状况,也观察到了企业1的行动。

(6) 参与人的支付。即在参与人的各种选择下,两个企业所得到的利润。

从以上6点出发,可以归纳出构造博弈模型所需要的要素。

1. 局中人集合

$N = \{0, 1, 2, \dots, n\}$,称 N 为局中人或参与人集合, N 中的元素称为参与人或局中人。参与人不专指人,它泛指参与博弈活动的政府、企业、地区、国家、个人

等决策主体。通常用“0”表示虚拟局中人,它的行为是以确定的概率分布进行随机选择的, $i=1,2,\dots,n$ 表示实际参与者。

2. 行动集合

称参与者 $i \in N$ 在博弈中所有可能选择的行动构成的集合 A_i 为局中人 i 的**行动集合**。 A_i 中的元素 a_i 称为局中人 i 的**行动**。

上例中, $A_0 = \{\text{旺盛, 疲软}\}$, $A_1 = \{\text{进入, 不进入}\}$, $A_2 = \{\text{容许, 抵制}\}$ 。

局中人的行动集合可能是有限集,也可能是无限集。如果博弈活动中每个局中人的行动集合都是有限集,且每个局中人行动的次数也是有限的,称该博弈为**有限博弈**。

3. 博弈树

对于有限博弈,可用博弈树直观地刻画。市场进入问题的博弈树如图1-1所示。

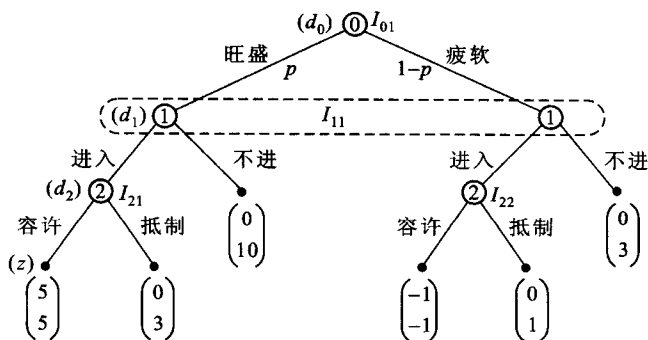


图 1-1

博弈树中最上方的节点 d_0 称为原点,表示博弈从此点开始。对于除 d_0 外的任一节点 d ,必存在唯一的一个从 d_0 开始的点、边序列将 d_0 与 d 连接起来,称这个序列为从 d_0 到 d 的一条路径。对于 $d_1 \neq d_2$,若 d_1 在从 d_0 到 d_2 的路径上,则说 d_2 在 d_1 之后或 d_1 在 d_2 之前。如节点 z 之后无节点,称 z 为**终点**。终点表示博弈结束于此点。终点在博弈树中用实心点“·”表示。非终点的节点称为**决策节点**,用空心点“○”表示。相应的参与者将在决策节点上选择行动。可将相应局中人的标号写在决策节点之内。如图1-1所示。

两个相邻接的节点之间的边表示参与者从前面的节点出发到达后面节点所选择的行动。

4. 支付向量

博弈树中终点 z 下面的向量 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 称为**支付向量**,它的第 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 个分量表示博弈结束于 z 时,局中人 i 所得的支付。支付可表示参与

人的某种收益或损失。本书中的支付指收益、效用、利润等。正式地,支付向量是终点集合 Z 到 n 维向量集合 R^n 的映射。

$$U: Z \rightarrow R^n, U(z) = (u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z)), z \in Z$$

博弈树刻画了局中人、局中人的行动次序、局中人所能选择的行动和局中人的支付,但对于局中人在选择行动时所了解到的信息还没有描述。为此我们引入信息集的概念。

5. 信息集与信息集分割

信息集由同一个局中人在相同的时点上的具有相同信息的决策节点组成。用 $I_{ik} (i=0, 1, 2, \dots, n, k=0, 1, 2, \dots, r_i)$ 表示局中人 i 的第 k 个信息集。它满足:

(1) $I_{ik} \neq \emptyset$ (\emptyset 表示空集)。

(2) 从博弈起始点到任一终点的路径至多与 I_{ik} 交于一点(同一信息集中的节点处于同一时点上)。

(3) 从 I_{ik} 中的任一节点出发,局中人 i 可能选择的行动集合都相同(因为局中人在同一信息集的不同节点上具有相同的信息)。

在博弈树上,将属于同一信息集的节点用虚线框在一起,或连在一起。

称 $I_i = \{I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{ir_i}\}$ 为局中人 $i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 的信息集类(在数学上,称以集合为元素的集合为类)。

称 $I = \{I_0, I_1, I_2, \dots, I_n\}$ 为信息集分割。

在上面的例子中, $I_0 = \{I_{01}\}$, $I_1 = \{I_{11}\}$, $I_2 = \{I_{21}, I_{22}\}$, 局中人 0 与 1 都只有一个信息集 I_{01} 与 I_{11} 。局中人 2 有两个信息集 I_{21} 、 I_{22} 。 I_{01} 、 I_{21} 、 I_{22} 中仅含一个决策节点,称它们为单点信息集。 I_{11} 由两个决策节点构成,它不是单点信息集。

在 I_{01} 上,由于它是博弈的始点,因而“自然”不了解任何信息。在 I_{11} 中,含有两个节点,局中人 1 在这个信息集上不了解市场需求旺盛还是疲软。从这两个节点出发,局中人 1 可能选择的行动集合均为(进入,不进入)。在 I_{21} 上,参与人 2 知道市场旺盛且参与人 1 选择了“进入”。在 I_{22} 上,参与人 2 知道市场需求疲软,且参与人 1 选择了“进入”。

下面正式给出有限扩展型博弈模型的定义

【定义 1.1】 称 $G = \langle N, Y, U, I, q \rangle$ ^① 为有限扩展型博弈模型。其中 N 为参与人集合, Y 为博弈树, U 为支付向量, I 为信息集分割, q 为外生事件的概率分布。

如果所有的局中人对构成 G 的元素 N 、 Y 、 U 、 I 、 q 都完全了解,称 G 为完全信息博弈,否则为不完全信息博弈。在第 1 章,我们讨论的都是完全信息博弈。

^① 本书使用 $\langle \rangle$ 标示博弈模型,以示强调和区别。

如果所有的局中人都同时选择行动,更本质的,如果所有局中人在选择行动时不知道对手选择了什么行动,称 G 为静态博弈,否则称 G 为动态博弈。

为进一步了解有限扩展型博弈模型,考虑下例。

【例 1.1】 考虑按以下步骤进行的博弈活动。

第 1 步,局中人 1 从字母 T 、 H 中选一个。

第 2 步,局中人 2 不知道第 1 步的选择,再从 T 、 H 中选一字母。

第 3 步,局中人 1 知道 1、2 两步的选择,又从 T 、 H 中选一字母。

第 4 步,局中人 2 不知道第 3 步的选择,但知道 1、2 两步的选择,最后从 T 、 H 中选一字母,博弈结束。

按照每步选择的结果,每个局中人各得一笔报酬(略)。

该博弈的局中人集合 $N = \{1, 2\}$, 博弈树如图 1-2 所示。

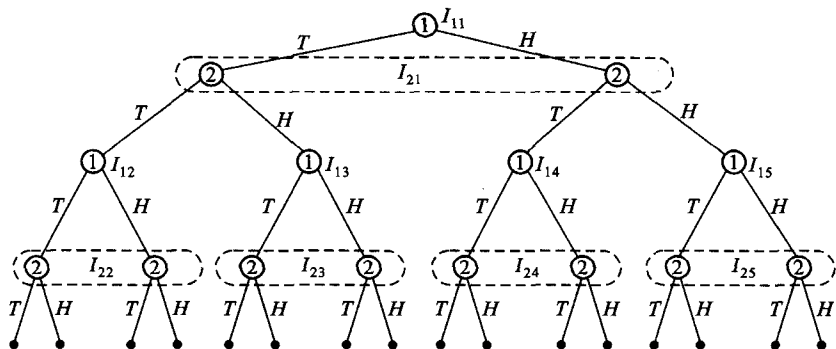


图 1-2

该博弈的信息集合分别为 $I = \{I_1, I_2\}$, 其中 $I_1 = \{I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}, I_{15}\}$, $I_2 = \{I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24}, I_{25}\}$ 。

显然 $I_{ik}, i = 1, 2, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 满足构成信息集的三个条件。

I_{11} 为局中人 1 的单点信息集,是博弈的起始点。从 I_{11} 出发,局中人 1 可以选择的行动集合 $A(I_{11}) = \{H, T\}$ 。

I_{21} 中含有两个决策节点。局中人 2 在 I_{21} 上选择行动。这两个节点分别对应路径 T 和 H 。由于这两个节点属于同一个信息集,因而局中人 2 在 I_{21} 上选择行动时,他不知道第 1 步局中人 1 选择了 T 还是 H 。

$I_{1k} (k = 2, 3, 4, 5)$ 均为局中人的单点信息集,分别对应路径 TT, TH, HT, HH 。在这些信息集上,局中人 1 完全了解博弈从 I_{11} 到达这些信息集上的博弈历程。从 $I_{1k} (k = 2, 3, 4, 5)$ 出发,局中人可能选择的行动集合 $A(I_{1k}) = \{T, H\}, (k = 2, 3, 4, 5)$ 。

对于 $I_{2k} (k = 2, 3, 4, 5)$,我们仅以 I_{22} 为例加以说明。 I_{22} 的左节点对应路径

TTT , 右节点对应路径 TTH 。局中人 2 在 I_{22} 上选择行动时, 知道第 1 步选择 T 、第 2 步也选择 T 的信息, 但不知道第 3 步的选择结果。从 I_{2k} 出发, 局中人 2 可能选择的行动集合为 $A(I_{2k}) = \{H, T\}$ ($k=2, 3, 4, 5$)。

由例 1.1 可知, 信息集可以告诉我们以下四点:

- (1) 在一个信息集上应由哪个局中人选择行动。
- (2) 从一个信息集出发, 局中人可能选择哪些行动。
- (3) 局中人在一个信息集上选择行动时已知道了哪些信息。
- (4) 单点信息集表明相应的局中人完全了解博弈从开始到该信息集的博弈历程。

如果 G 的每个信息集都是单点信息集, 表明博弈的每个参与人在选择行动时对博弈到现在为止的历程都完全了解, 这时称 G 为完美信息博弈。

扩展型博弈不仅能刻画动态博弈, 也能刻画静态博弈。

下面给出一个静态扩展型博弈的例子。

【例 1.2】 两个参与人同时从字母 T, H 中选择一个, 博弈结束时两个参与人各得一笔支付, 该博弈的博弈树如图 1-3 所示。

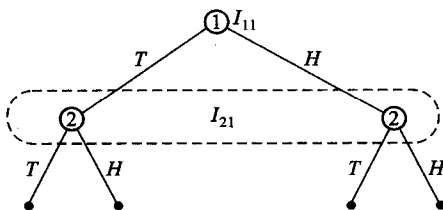


图 1-3

为了今后学习的需要, 下面介绍扩展型博弈的子博弈的概念。

扩展型博弈的子博弈大体上说是原博弈的一部分, 但它不能破坏原博弈的信息集。

【定义 1.2】 设 $G = \langle N, Y, U, I, P \rangle$ 为一有限扩展型博弈, 从 Y 的决策节点 h 出发的子博弈 $G_h = \langle N_h, Y_h, U_h, I_h, P_h \rangle$ 满足:

- (1) h 是 G 的单点信息集;
- (2) $N_h \subseteq N$;
- (3) Y_h 是 Y 的子树, 它由 h 及其后的所有节点与终点构成;
- (4) G_h 不能割裂 G 的信息集;
- (5) 若“自然”仍属于 N_h , 则 G_h 中“自然”的概率分布 $P_h = P$;
- (6) 设 z 为 P_h 的终点, 支付向量 $U_h(z) = U(z)$ 。

图 1-1 给出的扩展型博弈有 3 个子博弈:

- (1) 从 I_{01} 开始的子博弈, 即原博弈。

(2) 从 I_{21} 出发的子博弈。

(3) 从 I_{22} 出发的子博弈。

图 1-2 给出的扩展型博弈可分别由 I_{11} 、 I_{12} 、 I_{13} 、 I_{14} 、 I_{15} 引出子博弈。

图 1-3 给出的扩展型博弈仅有一个子博弈,即原博弈自身。

1.2 有限扩展型博弈模型的策略

在有限扩展型博弈模型的定义中,没有提到博弈论中的一个十分基本的概念——策略。直观上说,局中人的策略是局中人的一个行动计划,它指明了局中人在获知任何信息的情况下所选择的行动。策略的正式定义如下。

【定义 1.3】 局中人 $i=1,2,\dots,n$ 的策略集合用 S_i 表示, S_i 中的元素 s_i 称为局中人 i 的策略。它定义为局中人 i 的信息集类 I_i 到行动集 A_i 的映射:

$$S_i: I_i \rightarrow A_i, S_i(I_{ik}) = a_i, a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, r_i$$

定义 1.3 清楚地表明了策略是信息集的映射,行动是映射值。两者是不同的概念。

【例 1.3】 考虑图 1-1 所示的扩展型博弈的策略。

参与人 1 仅有一个信息集 I_{11} ,从这个信息集出发有两个可选择的行动: a_{11} ——进入, a_{12} ——不进入。因而局中人 1 的策略与行动是等同的,即 $S_1 = A_1 = \{a_{11}, a_{12}\}$ 。

局中人 2 有两个信息集 I_{21}, I_{22} 。从每个信息集出发,局中人 2 都有两个选择: a_{21} ——容许, a_{22} ——抵制。可用二维向量 $X = (x_1, x_2)$ 表示局中人 2 的一个策略。 x_1 表示局中人 2 在其第 1 个信息集 I_{21} 上选择的行动,因而 x_1 可取值 a_{21} 或 a_{22} 。 x_2 表示局中人 2 在其第 2 个信息集 I_{22} 上选择的行动, x_2 可取的值也是 a_{21} 或 a_{22} 。这样,

$$\begin{aligned} S_2 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 = a_{21}, a_{22}, x_2 = a_{21}, a_{22}\} \\ &= \{(a_{21}, a_{21}), (a_{21}, a_{22}), (a_{22}, a_{21}), (a_{22}, a_{22})\} \end{aligned}$$

策略 (a_{22}, a_{21}) 表明参与人 2 在第 1 个信息集 I_{21} 上选择行动 a_{22} ,在第 2 个信息集 I_{22} 上选择行动 a_{21} 。其余策略可同样理解。

由上例,我们可以归纳出求有限扩展型博弈策略的方法:如果参与人 i 的信息集为 $I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{ik}$,则可用 k 维向量 (x_1, x_2, \dots, x_k) 表示 i 的一个策略,其中 x_1 表示参与人 i 在 I_{i1} 上所选择的行动, x_2 表示参与人 i 在 I_{i2} 上所选择的行动…… x_k 表示参与人 i 在 I_{ik} 上所选择的行动。

【例 1.4】 考虑例 1.1 所给出的扩展型博弈的策略。

在例 1.1 中,局中人 1 有 5 个信息集 $I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}, I_{15}$, 可用 5 维向量 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 表示他的一个策略。 X 的第 k ($= 1, 2, 3, 4, 5$) 个分量表示局中人 1 处于他的第 k 个信息集 I_{1k} 上所选择的行动。因而 $x_k = T, H$ 。这样,

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_k = T, H, k = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

局中人 2 也有 5 个信息集 $I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24}, I_{25}$, 且从每个信息集出发,局中人 2 都有两个可能的选择: T, H , 因而有 $S_2 = S_1$ 。

【例 1.5】 考虑例 1.2 给出的扩展型博弈的策略。

在例 1.2 中,局中人 1 仅有一个信息集 I_{11} , 局中人 2 也仅有一个信息集 I_{21} 。我们有

$$S_1 = A_1 = \{T, H\}, S_2 = A_2 = \{T, H\}。$$

例 1.5 表明,在静态博弈模型中,局中人的策略与行动等同。

博弈树可将有限扩展型博弈直观地表示出来,但对于非有限博弈,它就不能使用了。

* 1.3 一般扩展型博弈模型

在博弈论的应用中,局中人的行动集合可能是无限的,或局中人可能要进行无限次选择。这时博弈树已不能使用,因而需要介绍一般扩展型博弈模型,它包括了有限扩展型博弈模型。

一般扩展型博弈模型由下列要素构成。

(1) 一个有限的局中人集合: $N = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, 其中“0”表示虚拟局中人——“自然”,它以确定的概率分布进行随机选择。

(2) 一个满足下列三条性质的行动序列集合 H 。

① H 中包含一个空序列,即 $\emptyset \in H$ 。

② 如果局中人的有限行动序列 $(a^k)_{k=1}^K \in H$, 则对任何正整数 $L < K$, 都有 $(a^k)_{k=1}^L \in H$ 。

③ 对于局中人的无限行动序列 $(a^k)_{k=1}^\infty$, 若对任何正整数 L 都有 $(a^k)_{k=1}^L \in H$, 则 $(a^k)_{k=1}^\infty \in H$, 否则 $(a^k)_{k=1}^\infty \notin H$ 。

称满足以上三条性质的行动序列集合 H 为历史集。称历史集中的元素 $h \in H$ 为博弈的一段历史。

称一段历史 $(a^k)_{k=1}^K \in H$ 为博弈的终点,如果它是无限的 ($k = \infty$) 或不存在 a^{k+1} 使 $(a^k)_{k=1}^{k+1} \in H$ 。博弈的全体终点构成的集合记为 Z 。

(3) 局中人映射 $P: H \setminus Z \rightarrow N, P(h) = i, h \in H \setminus Z$, 表示历史 h 之后应由局中